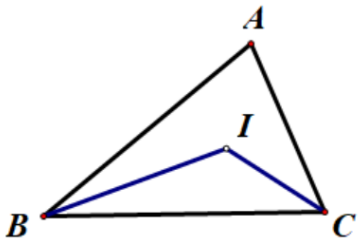
专题 1.17 三角形几何模型-双角平分线（知识讲解）

模型 1：内角平分线+内角平分线模型

如图一、条件：BI、CI分别为$\triangle ABC$的内角$\angle ABC$、

结论：$\angle BIC = 90^0 + \frac{1}{2}\angle A$



如图一

已知：如图一：BI、CI分别为$\triangle ABC$的内角$\angle ABC$、$\angle ACB$的角平分线相交于点I.

求证：$\angle BIC = 90^0 + \frac{1}{2}\angle A$

证明：在$\triangle BIC$中，

$\because BI$、CI分别为$\triangle ABC$的内角$\angle ABC$、$\angle ACB$

$\therefore \angle BIC = 180^0 - (\angle IBC + \angle ICB)$

$= 180^0 - \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB)$

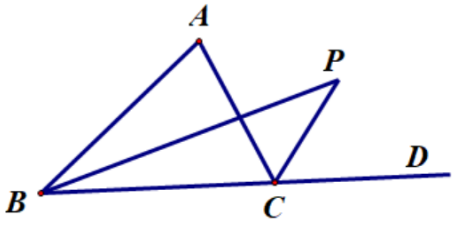
$= 180^0 - \frac{1}{2}(180^0 - \angle A)$

$= 90^0 + \frac{1}{2}\angle A$

模型 2：内角平分线+外角平分线模型

如图二、条件：P为ΔABC的内角$\angle ABC$和外角$\angle ACD$的角平分线BP、CP相交于点，

结论：$\angle P = 90^0 + \frac{1}{2}\angle A.$



如图二

已知：如图二：BP、CP分别为△ABC的内角∠ABC、外角∠ACD的角平分线相交于点P.

求证: $\angle P=\frac{1}{2}\angle A$

证明: ∵ ∠ABC、∠ACD平分线交于点P,

$\therefore \angle PBC=\frac{1}{2}\angle ABC;\angle PCD=\frac{1}{2}\angle ACD,$

$\because \angle PCD=\angle P+\angle PBC,\angle ACD=\angle A+\angle ABC,$

$\therefore \angle P+\angle PBC=\frac{1}{2}(\angle A+\angle ABC)$

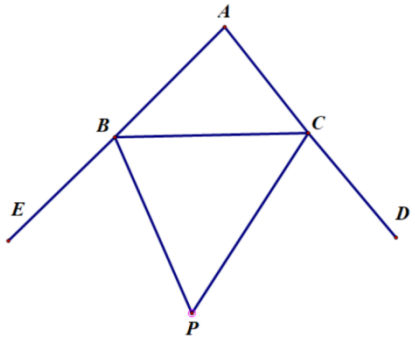
$\therefore \angle P+\angle PBC=\frac{1}{2}\angle A+\angle PBC$

$\therefore \angle P=\frac{1}{2}\angle A$

模型三：外角平分线+外角平分线模型

如图三、条件：ΔABC的外角∠CBE和外角∠BCD的角平分线相交于点，

结论：$\angle P=90^0-\frac{1}{2}\angle A.$



如图三

已知：如图三：BP、CP分别为$\triangle ABC$的外角$\angle CBE$、外角$\angle BCD$的角平分线相交于点P.

求证: $\angle P = 90^0 - \frac{1}{2}\angle A$

证明: $\because \angle EBC$、$\angle DCB$平分线交于点P,

$\therefore \angle PBC = \frac{1}{2}\angle CBE; \angle PCB = \frac{1}{2}\angle BCD,$

$\because \angle P = 180^0 - (\angle PBC + \angle PCB)$

$= 180^0 - \frac{1}{2}(\angle EBC + \angle DCB)$

$= 180^0 - \frac{1}{2}(\angle A + \angle ACB + \angle A + \angle ABC)$

$= 180^0 - \frac{1}{2}(2\angle A + 180^0 - \angle A)$

$= 90^0 - \frac{1}{2}\angle A$

模型四：飞镖+角平分线模型

1、飞镖模型内角关系模型：

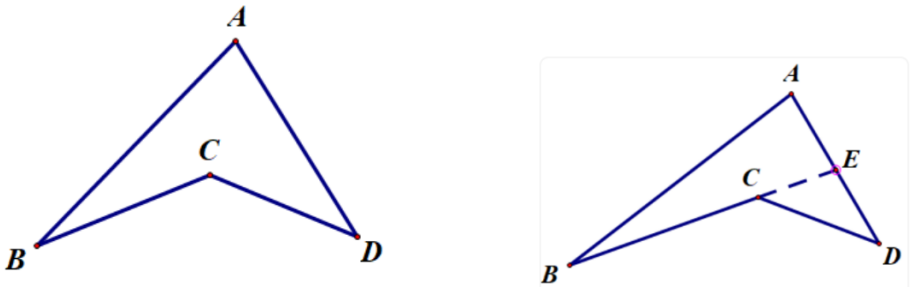
如图四：如图，在四边形$ABCD$中，

结论：$\angle C=\angle A+\angle B+\angle D$.

证明：延长BC交AD于E，则$\angle BCD$、$\angle BED$ 分别为 $\triangle CDE$、$\triangle ABE$ 外角，

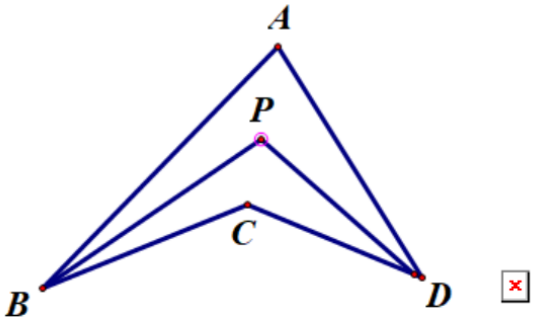
$\therefore \angle BCD=\angle CED+\angle D, \angle CED=\angle A+\angle B,$

$\therefore \angle C=\angle A+\angle B+\angle D$.



图四

2、飞镖模型“内角平分线+内角平分线”模型：



图五

如图五：条件：$\angle ABC$、$\angle ADC$平分线交于点P,

结论：$\angle P=\dfrac{\angle A+\angle C}{2}$

略证：如图五：$\angle C=\angle PBC+\angle PDC+\angle P$ (1)

$\angle P=\angle PBA+\angle PDA+\angle A$（2）

$\because \angle PBC=\angle PBA,\ \angle PDC=\angle PDA$

（1）-（2）得$\angle C-\angle P=\angle P-\angle A$

$\therefore \angle P=\dfrac{\angle A+\angle C}{2}$

类型一、内角平分线+内角平分线模型

例 1．在三角形中，由三角形的内角平分线所形成的角存在一定的规律，理解并掌握其中的规律，有助于同学们巩固相关的数学知识．

如图 1，$\triangle ABC$ 中，BA_1, CA_1 分别平分 $\angle ABC, \angle ACB$，且相交于点 A_1,“勤奋小组”的同学发现: $\angle BA_1C=90°+\dfrac{1}{2}\angle BAC$．证明过程如下:

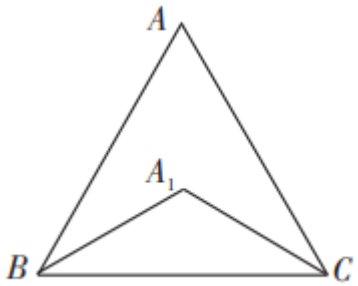


图 1

证明:如图 2，连接 AA_1 并延长，

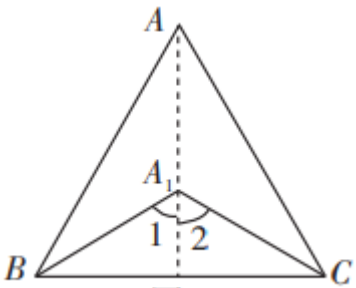


图 2

则 $\angle 1=\angle ABA_1+\angle BAA_1$, $\angle 2=\angle ACA_1+\angle CAA_1$ (依据 1)

$\because$ BA_1 与 CA_1 分别平分 $\angle ABC, ACB$

$\therefore \angle ABA_1=\frac{1}{2}\angle ABC$, $\angle ACA_1=\frac{1}{2}\angle ACB$

$\therefore \angle BA_1C=\angle 1+\angle 2$

$=\frac{1}{2}\angle ABC+\angle BAA_1+\frac{1}{2}\angle ACB+\angle CAA_1$

$=\frac{1}{2}\angle ABC+\frac{1}{2}\angle ACB+\angle BAC$

$=\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle ACB+\angle BAC)+\frac{1}{2}\angle BAC$

又 $\because \angle ABC+\angle ACB+\angle BAC=180°$，(依据 2)

$\therefore \angle BA_1C=\frac{1}{2}\times 180°+\frac{1}{2}\angle BAC=90°+\frac{1}{2}\angle BAC$.

(1) 依据 1 是_____，依据 2 是_____；

(2) 如图 3，在图 1 的基础上，作 $\angle A_1BC, \angle A_1CB$ 的角平分线 BA_2, CA_2, 交于点 A_2, 试探究 $\angle BA_2C$ 与 $\angle BAC$ 之间的数量关系.

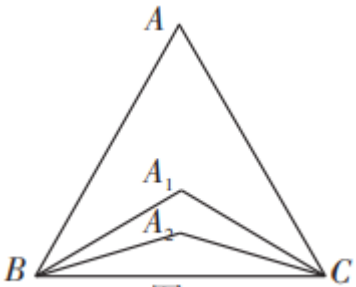


图 3

【答案】(1) 三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角之和；三角形的内角和等于 180°；(2) $\angle BA_2C=135°+\frac{1}{4}\angle BAC$

【分析】

（1）根据三角形外角的性质和三角形的内角和定理即可得出结论；

（2）连接 AA_2 并延长，交 BC 于点 D, 根据角平分线的定义和三角形外角的性质可得 $\angle BA_2D=\frac{3}{4}\angle ABC+\angle BAD$ ， $\angle CA_2D=\frac{3}{4}\angle ACB+\angle CAD$ ，然后根据 $\angle BA_2C=\angle BA_2D+\angle CA_2D$ 、等量代换和三角形的内角和定理即可求出结论.

解：（1）由三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角之和可得 $\angle 1=\angle ABA_1+\angle BAA_1$, $\angle 2=\angle ACA_1+\angle CAA_1$ ；

由三角形的内角和等于 $180°$ 可得 $\angle ABC+\angle ACB+\angle BAC=180°$

故答案为：三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角之和；三角形的内角和等于 $180°$ ；

（2）如图，连接 AA_2 并延长，交 BC 于点 D,

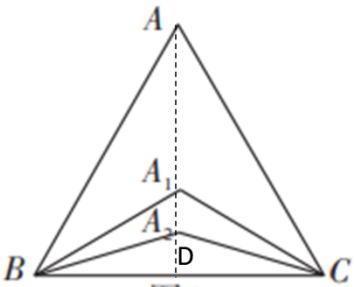


图 3

Q BA_2 是 $\angle A_1BC$ 的平分线，

$\therefore \angle A_1BA_2=\frac{1}{2}\angle A_1BC=\frac{1}{4}\angle ABC$,

$\therefore \angle ABA_2=\frac{1}{4}\angle ABC+\frac{1}{2}\angle ABC=\frac{3}{4}\angle ABC$

$\therefore \angle BA_2D=\frac{3}{4}\angle ABC+\angle BAD$

同理 $\angle ACA_2=\frac{3}{4}\angle ACB$

$\angle CA_2D=\frac{3}{4}\angle ACB+\angle CAD$

$\therefore \angle BA_2C=\angle BA_2D+\angle CA_2D$

$=\frac{3}{4}\angle ABC+\angle BAD+\frac{3}{4}\angle ACB+\angle CAD$

$=\frac{3}{4}\left(\angle ABC+\angle BAC+\angle ACB\right)+\frac{1}{4}\angle BAC$

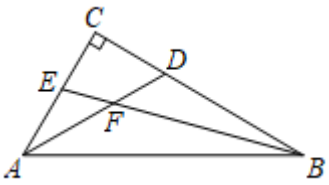
$$=\frac{3}{4}\times180°+\frac{1}{4}\angle BAC$$

$$=135°+\frac{1}{4}\angle BAC$$

【点拨】此题考查的是三角形内角和定理、三角形外角的性质和角平分线的定义，掌握三角形内角和定理、三角形外角的性质和角平分线的定义是解决此题的关键.

举一反三：

【变式 1】如图，在Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，AD，BE 分别平分 $\angle CAB$ 和 $\angle CBA$，AD，BE 相交于点 F，求 $\angle AFE$ 的度数.



【答案】45°

【分析】根据三角形角平分线的定义可得 $\angle FAB+\angle FBA=\frac{1}{2}(\angle CAB+\angle CBA)$，根据三角形内角和定理即可求解.

解：∵在Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，

$\therefore \angle CAB+CBA=90°$

∵ AD，BE 分别平分 $\angle CAB$ 和 $\angle CBA$，

$\therefore \angle FAB=\frac{1}{2}\angle CAB,\angle FBA=\frac{1}{2}\angle CBA$

$\therefore \angle FAB+\angle FBA=\frac{1}{2}(\angle CAB+\angle CBA)=45°$

$\therefore \angle AFB=180°-(\angle FAB+\angle FBA)=135°$

$\therefore \angle AFE=45°$.

【点拨】本题考查了三角形的角平分线的性质，三角形内角和定理，掌握三角形角平分线的定义是解题的关键.

【变式 2】已知△ABC 中，∠A=50°.

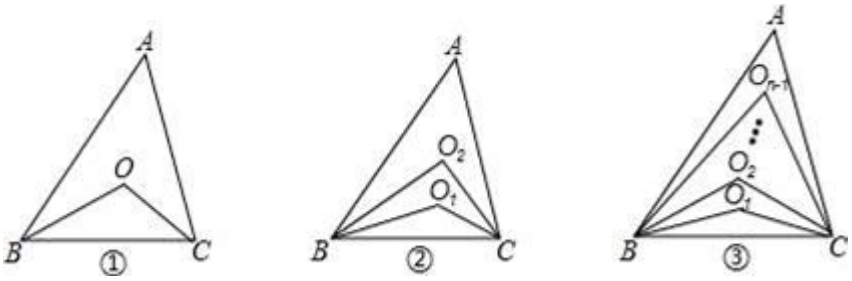
（1）如图①，∠ABC、∠ACB 的角平分线交于点 O，则∠BOC=_____°.

（2）如图②，∠ABC、∠ACB 的三等分线分别对应交于 O_1、O_2，则 ∠BO_2C=_____°.

（3）如图③，∠ABC、∠ACB 的 n 等分线分别对应交于 O_1、O_2…O_{n-1}（内部有 n－1

个点），求∠$BO_{n-1}C$（用 n 的代数式表示）.

（4）如图③，已知∠ABC、∠ACB 的 n 等分线分别对应交于 O_1、O_2…O_{n-1}，若∠$BO_{n-1}C$=60°，求 n 的值.



【答案】(1)、115°；(2)、$\frac{280}{3}$；(3)、$-\frac{n-1}{n}\times130°$；(4)、n=13.

解：试题分析：(1)、△ABC 中，已知∠A 即可得到∠ABC 与∠ACB 的和，而 BO、CO 是∠ABC，∠ACB 的两条角平分线，即可求得∠OBC 与∠OCB 的度数，根据三角形的内角和定理即可求解；(2)、先根据三角形内角和定理求得∠ABC+∠ACB，再根据三等分线的定义求得∠O_2BC+∠O_2CB，即可求出∠BO_2C；

(3)、先根据三角形内角和定理求得∠ABC+∠ACB，再根据 n 等分线的定义求得∠$O_{n-1}BC$+∠$O_{n-1}CB$，即可求出∠$BO_{n-1}C$．(4)、依据(3)的结论即可求出 n 的值.

解：(1)、∵△ABC 中，∠ABC+∠ACB=180°－∠A=180°－50°=130°，BO、CO 是∠ABC，∠ACB 的两条角平分线．　∴∠OBC=$\frac{1}{2}$∠ABC，∠OCB=$\frac{1}{2}$∠ACB，　∴∠OBC+∠OCB=$\frac{1}{2}$（∠ABC+∠ACB）=65°，

∴△OBC 中，∠BOC=180°－（∠OBC+∠OCB）=115° (2)、∵点 O_2 是∠ABC 与∠ACB 的三等分线的交点，

∴∠O_2BC+∠O2CB=$\frac{2}{3}$（∠ABC+∠ACB）=$\frac{2}{3}\times130°$=（$\frac{260}{3}$）°，

∴∠BO2C=180°－（$\frac{260}{3}$）°=（$\frac{280}{3}$）°.

(3)、∵点 O_{n-1} 是∠ABC 与∠ACB 的 n 等分线的交点，

∴∠$O_{n-1}BC$+∠$O_{n-1}CB$=$\frac{n-1}{n}$（∠ABC+∠ACB）=$\frac{n-1}{n}\times130°$，　∴∠BOn－1C=180°－$\frac{n-1}{n}\times130°$；

(4)、∵∠$BO_{n-1}C$=60°，　∴180°－$\frac{n-1}{n}\times130°$=60°，解得 n=13.

考点：三角形内角和定理.

类型二、内角平分线+外角平分线模型

例 2．阅读下面内容，并解答问题．

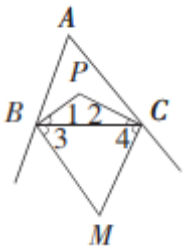
探索三角形的内（外）角平分线形成的角的规律

在三角形中，由三角形的内角平分线、外角平分线所形成的角存在一定的规律，如果能理解并掌握其中的规律，对解决相关的问题会起到事半功倍的效果．

规律 1：三角形的两个内角的角平分线形成的角等于 90°加上第三个内角度数的一半．

规律 2：三角形的两个外角的角平分线形成的角等于 90°减去与这两个外角不相邻的内角度数的一半．

如图，已知点 P 是 $\triangle ABC$ 的内角平分线 BP 与 CP 的交点，点 M 是 $\triangle ABC$ 的外角平分线 BM 与 CM 的交点．则 $\angle P=90°+\frac{1}{2}\angle A$，$\angle M=90°-\frac{1}{2}\angle A$．



证明：规律 1，$\because BP$，CP 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，

$\therefore \angle 1=\frac{1}{2}\angle ABC$，$\angle 2=\frac{1}{2}\angle ACB$．

$\therefore \angle A=180°-2(\angle 1+\angle 2)$．

$\therefore \angle 1+\angle 2=90°-\frac{1}{2}\angle A$．

$\therefore \angle P=180°-(\angle 1+\angle 2)=90°+\frac{1}{2}\angle A$．

规律 2，$\because \angle 3=\frac{1}{2}(\angle A+\angle ACB)$，$\angle 4=\frac{1}{2}(\angle A+\angle ABC)$，

$\therefore \angle 3+\angle 4=\frac{1}{2}(\angle A+\angle ACB+\angle ABC)+\frac{1}{2}\angle A=90°+\frac{1}{2}\angle A$．

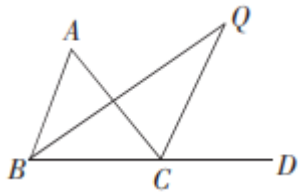
$\therefore \angle M=180°-(\angle 3+\angle 4)=90°-\frac{1}{2}\angle A$．

请解决以下问题：

（1）写出上述证明过程中依据的一个定理：_____；

（2）如图，已知点 Q 是 $\triangle ABC$ 的内角平分线 BQ 与 $\triangle ABC$ 的外角平分线 CQ 的交点，试

探究$\angle Q$和$\angle A$的数量关系？并说明理由.



【答案】（1）三角形内角和定理；（2）$\angle Q=\frac{1}{2}\angle A$，见分析

【分析】

（1）根据题意直接进行解答即可；

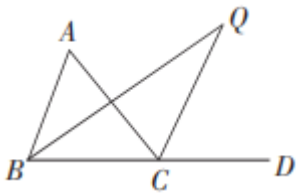
（2）由题意易得$\angle QBC=\frac{1}{2}\angle ABC$，$\angle QCD=\frac{1}{2}\angle ACD$，然后根据三角形内角和及外角的性质可进行求解.

解：（1）答案不唯一，如三角形内角和定理或者三角形的内角和等于180°或者三角形的一个外角等于和它不相邻的两个内角的和.

（2）$\angle Q=\frac{1}{2}\angle A$.

理由如下：

$\because BQ$，CQ平分$\angle ABC$和$\angle ACD$，



$\therefore \angle QBC=\frac{1}{2}\angle ABC$，$\angle QCD=\frac{1}{2}\angle ACD$，

$\because \angle QCD$是$\triangle BCQ$的外角，

$\therefore \angle QCD=\angle QBC+\angle Q$，

$\because \angle ACD$是$\triangle ABC$的外角，

$\therefore \angle ACD=\angle ABC+\angle A$，

$\therefore \angle ACD=2\angle QBC+\angle A$，

$\therefore \angle QCD=\frac{1}{2}(2\angle QBC+\angle A)=\angle QBC+\frac{1}{2}\angle A$，

$\therefore \angle QBC+\angle Q=\angle QBC+\frac{1}{2}\angle A$，

$\therefore \angle Q=\frac{1}{2}\angle A$.

【点拨】本题主要考查三角形角平分线、三角形内角和及外角的性质，熟练掌握三角形角平分线、三角形内角和及外角的性质是解题的关键.

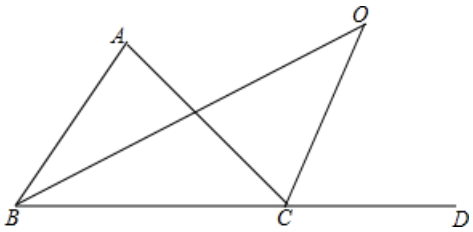
举一反三：

【变式 1】如图，$\angle ACD$ 是 ΔABC 的外角，$\angle ABC$ 与 $\angle ACD$ 的角平分线交于点 O.

（1）若 $\angle ABC=66°$，$\angle ACB=34°$，则 $\angle A=$_____°，$\angle O=$_____°；

（2）探索 $\angle A$ 与 $\angle O$ 的数量关系，并说明理由；

（3）若 $AB//CO$，$AC\perp BO$，求 $\angle ACB$ 的度数.



【答案】（1）80、40；（2）$\frac{1}{2}\angle A=\angle O$；理由见分析；（3）$\angle ACB=60°$.

【分析】

（1）由三角形内角和定理可求∠A，然后求出∠OBC 和∠OCD，再由三角形外角的性质即可求出结论；

（2）由题中角平分线可得∠ABO＝$\frac{1}{2}$∠ABC，∠ACO＝$\frac{1}{2}$∠ACD，根据三角形内角和定理可得∠A＋∠ABO＝∠O＋∠ACO，又由∠ACD＝∠A＋∠ABC＝∠A＋2∠ABO，进而得出∠A＋∠ABO＝∠O＋$\frac{1}{2}$∠A＋∠ABO，即可得出结论；

（3）AC 与 BO 交于点 E，由 OC∥AB，证得∠ABO＝∠O，由 AC⊥BO，证得∠AEB＝90°，故 2∠O＋∠O＝90°，进而证得∠A＝60°，由∠ABC＝2∠ABO 即可证得结论.

解：设 AC 与 BO 交于点 E

解：（1）$\because \angle ABC=66°$，$\angle ACB=34°$，$\therefore \angle A=80°$，

$\because \angle ABC$ 与 $\angle ACD$ 的角平分线交于点 O，

$\therefore \angle OBC=\frac{1}{2}\angle ABC=33°$，$\angle OCD=\frac{1}{2}(180°-34°)=73°$，

$\therefore \angle O=\angle OCD-\angle OBC=40°$，

故答案为 80、40；

（2）∵BO 平分∠ABC，

∴∠ABO＝$\frac{1}{2}$∠ABC，

∵CO 平分∠ACD，

∴∠ACO＝$\frac{1}{2}$∠ACD，

∵∠AEB＝∠CEO，

∴∠A＋∠ABO＝∠O＋∠ACO，

∴∠A＋∠ABO＝∠O＋$\frac{1}{2}$∠ACD，

∵∠ACD 是△ABC 的外角，

∴∠ACD＝∠A＋∠ABC＝∠A＋2∠ABO，

∴∠A＋∠ABO＝∠O＋$\frac{1}{2}$∠A＋∠ABO，

∴$\frac{1}{2}$∠A＝∠O；

（3）如图，AC 与 BO 交于点 E，

$\because OC//AB$，$\therefore \angle ABO=\angle O$，

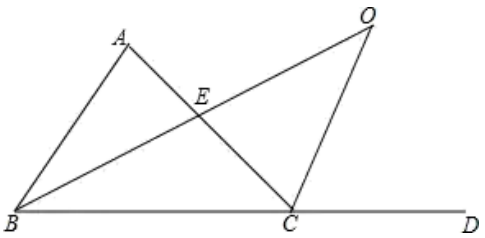
$\because AC\perp BO$，$\therefore \angle AEB=90°$，

$\therefore \angle A+\angle ABO=90°$，$\therefore 2\angle O+\angle O=90°$，

$\therefore \angle O=30°$，

$\therefore \angle A=60°$，$\angle ABC=2\angle ABO=60°$，

$\therefore \angle ACB=60°$.



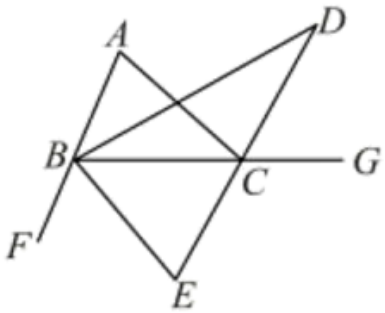
【点拨】本题主要考查了三角形的内角和定理以及外角的性质，平行线的性质，能够掌握并熟练运用平行线的性质是解决问题的关键.

【变式 2】如图，∠CBF, ∠ACG 是△ABC 的外角, ∠ACG 的平分线所在的直线分别与∠ABC,∠CBF 的平分线 BD，DE 交于点 D,E.

（1）∠DBE 的度数;

（2）若∠A=70,求∠D 的度数;

（3）若∠A=α ,求∠E 的度数(用含α 的式子表示).



【答案】（1）$\angle DBE=90°$；（2）$\angle D=35°$；（3）$\angle E=90°-\frac{1}{2}\alpha$

【分析】

（1）根据角平分线的定义可得$\angle DBC=\frac{1}{2}\angle ABC,\angle EBC=\frac{1}{2}\angle FBC$，再根据平角的定义可得出结论；

（2）根据角平分线的定义可得$\angle DCG=\frac{1}{2}\angle ACG,\angle DBC=\frac{1}{2}\angle ABC$，再根据三角形外角的性质可推出$\angle A=2\angle D$则可求出∠D 的度数；

（3）由第（2）问的结论可知$\angle D=\frac{1}{2}\angle A=\frac{1}{2}\alpha$，再加上第（1）问的结论$\angle DBE=90°$，则可表示出∠E 的度数.

解：（1）∵BD 平分$\angle ABC$，BE 平分$\angle FBC$,

$\therefore \angle DBC=\frac{1}{2}\angle ABC,\angle EBC=\frac{1}{2}\angle FBC,$

$\because \angle ABF=180°$

$\therefore \angle DBE=\angle DBC+\angle EBC=\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle FBC)=90°$

（2）∵CD 平分$\angle ACG$, BD 平分$\angle ABC$

$\therefore \angle DCG=\frac{1}{2}\angle ACG,\angle DBC=\frac{1}{2}\angle ABC,$

$\because \angle ACG=\angle A+\angle ABC$

$\therefore 2\angle DCG=\angle A+2\angle DBC$

$\because \angle DCG=\angle D+\angle DBC$

$\therefore 2\angle DCG=2\angle D+2\angle DBC$

$\therefore \angle A=2\angle D$

$\therefore \angle D=\frac{1}{2}\angle A=\frac{1}{2}\times 70°=35°$

（3）由（2）知 $\angle D=\frac{1}{2}\angle A=\frac{1}{2}\alpha$

$\because \angle DBE=90°$

$\therefore \angle E=90°-\frac{1}{2}\alpha$

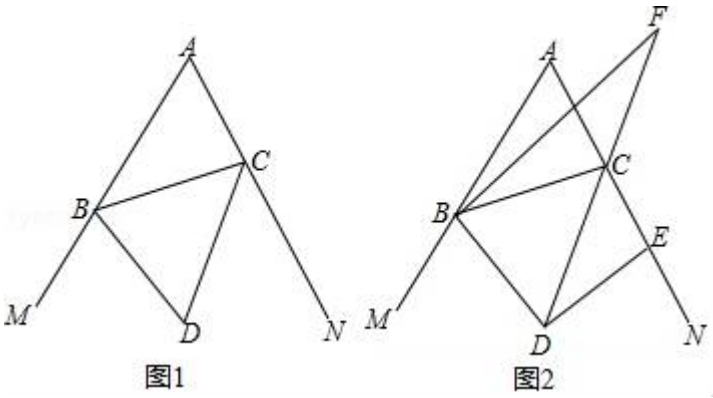
【点拨】本题主要考查角平分线的定义及三角形外角的性质，掌握角平分线的定义及三角形外角的性质是解题的关键.

类型三、 外角平分线+外角平分线模型

例 3．如图 1，在△ABC 中，∠A＝60°，∠CBM，∠BCN 是△ABC 的外角，∠CBM，∠BCN 的平分线 BD，CD 交于点 D.

(1)求∠BDC 的度数；

(2)在图 1 中，过点 D 作 DE⊥BD，垂足为点 D，过点 B 作 BF∥DE 交 DC 的延长线于点 F(如图 2)，求证：BF 是∠ABC 的平分线.



【答案】(1)∠BDC=60°；(2)证明见分析.

【分析】

(1)依据三角形内角和定理可得，∠ABC+∠ACB＝120°，进而得出∠CBM+∠BCN＝360°﹣120°＝240°，再根据∠CBM，∠BCN 的平分线 BD，CD 交于点 D，即可得到，∠DBC+∠BCD＝120°，即可得出∠D＝180°﹣120°＝60°；

(2)依据 DE⊥BD，BF∥DE，即可得出∠2+∠3＝90°，∠1+∠4＝90°，再根据∠3＝∠4，可得∠1＝∠2，进而得到 BF 是∠ABC 的平分线.

解：(1)∵△ABC 中，∠A＝60°，

∴∠ABC+∠ACB＝120°，

又∵∠ABM＝∠ACN＝180°，

∴∠CBM+∠BCN＝360°﹣120°＝240°，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/247144141044006062