2.6 从系统动态方程求系统传递函数（阵）

- 系统动态方程和系统传递函数（阵）是控制系统两种经常使用的数学模型。
- 动态方程不但体现了系统输入输出的关系，而且还清楚地体现了系统内部状态变量的关系。
- 相比较，传递函数只体现了系统输入与输出的关系。
- 我们已懂得，从传递函数到动态方程是个系统实现的问题，这是一种比较复杂的而且是非唯一的过程。
- 但从动态方程到传递函数（阵）却是一种唯一的、比较简朴的过程。

已知线性定常系统的状态空间体现式为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t) \end{cases}$$

式中 $\boldsymbol{x}(t)$—系统n维状态向量；$\boldsymbol{u}(t)$—系统r维输入向量；$\boldsymbol{y}(t)$—系统m维输出向量。

对上式两端取拉氏变换，可得

$$sX(s)-x(0)=AX(s)+BU(s)$$

$$Y(s)=CX(s)+DU(s)$$

设初始条件**x**(0)=**0**，则有

$$sX(s)=AX(s)+BU(s)$$

$$X(s)=(sI-A)^{-1}BU(s)$$

$$\mathrm{Y}(s)=[\mathrm{C}(s\mathrm{I}-\mathrm{A})^{-1}\mathrm{B}+\mathrm{D}]\mathrm{U}(s)=W(s)\mathrm{U}(s)$$

式中，$W(s)=[\mathrm{C}(s\mathrm{I}-\mathrm{A})^{-1}\mathrm{B}+\mathrm{D}]$ ，$m\times r$ 维。

传递函数阵

W(S)为一种m×r的传递函数阵，即：

$$W(s)=\begin{bmatrix} w_{11}(s) & w_{12}(s) & \cdots & w_{1r}(s) \\ w_{21}(s) & w_{22}(s) & \cdots & w_{2r}(s) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ w_{m1}(s) & w_{m2}(s) & \cdots & w_{mr}(s) \end{bmatrix}$$

其中，$w_{ij}(s)$为一标量传递函数，它表达第j个系统输入对第i个系统输出的传递作用。

对于单输入单输出（SISO）系统，按上式求出的$W(s)$为系统的标量传递函数，可表达为

$$W(s)=c(sI-A)^{-1}b+d=c\frac{\mathrm{adj}(sI-A)}{|sI-A|}b+d$$

当系统的传递函数无零极点对消时，有

$$W(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_0s^n+b_1s^{n-1}+\cdots+b_{n-1}s+b_n}{s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n}$$

(1)系统矩阵***A***的特征多项式等于传递函数的分母多项式；

(2)传递函数的极点就是***A***的特征值。

因为系统状态变量的选择不惟一，故建立的系统状态体现式也不是惟一的。但是同一系统的传递函数阵却是惟一的。

补例： 已知系统的状态空间体现式为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

试求其传递函数阵。

解: 传递函数阵为:

$$G(s)=C(sI-A)^{-1}B$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s & -1\\ 2 & s+3\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{s+4}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{1}{(s+1)(s+2)}\\ \dfrac{2}{s+2} & \dfrac{1}{s+2}\end{bmatrix}$$

【例2-14】求下列动态方程的传递函数。

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}-2\\ 1\\ 1\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}4 & 6 & 2\end{bmatrix},D=0$$

解： $$W(s)=C(sI-A)^{-1}B+D$$

$$=\begin{bmatrix}4 & 6 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}s+1 & -1 & 0\\ 0 & s+1 & 0\\ 0 & 0 & s+2\end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix}-2\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{2s+6}{s^3+4s^2+5s+2}$$

在MATLAB中，用SS2TF语句能够直接求出W(S)。

```
A=[-1 1 0;0 -1 0;0 0 -2];
B=[-2;1;1];C=[4 6 2];D=0;
[NUM,DEN]=ss2tf(A,B,C,D)
end
```

2.7 离散时间系统的状态空间体现式

- 离散时间系统就是系统的输入和输出信号只在某些离散时刻取值的系统。
- 与离散时间系统有关的数学措施有差分方程，信号Z变换，以及系统脉冲传递函数。
- 离散时间系统一般用差分方程表达其输入和输出信号的关系。

设系统n阶差分方程为：

$$y(k+n)+a_{n-1}y(k+n-1)+\cdots+a_1y(k+1)+a_0y(k)$$
$$=b_mu(k+m)+b_{m-1}u(k+m-1)+\cdots+b_1u(k+1)+b_0u(k)$$

其中 $m \le n$.

k —— 表达时刻kT

T —— 为采样周期；，

$u(k)$ $y(k)$ —— 分别为时刻kT的输入、输出；

a_i b_i —— 表征系统特征的常系数。

系统脉冲传递函数为输出信号的Z变换与输入信号的Z变换之比：

与连续时间系统传递函数在形式上相同

$$W(z)=\frac{b_mz^m+b_{m-1}z^{m-1}+\cdots+b_1z+b_0}{z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0}$$

- 同连续时间系统一样，由离散时间系统差分方程或脉冲传递函数求取离散状态空间体现式的过程叫做离散系统的实现。
- 离散系统动态方程一般形式为：

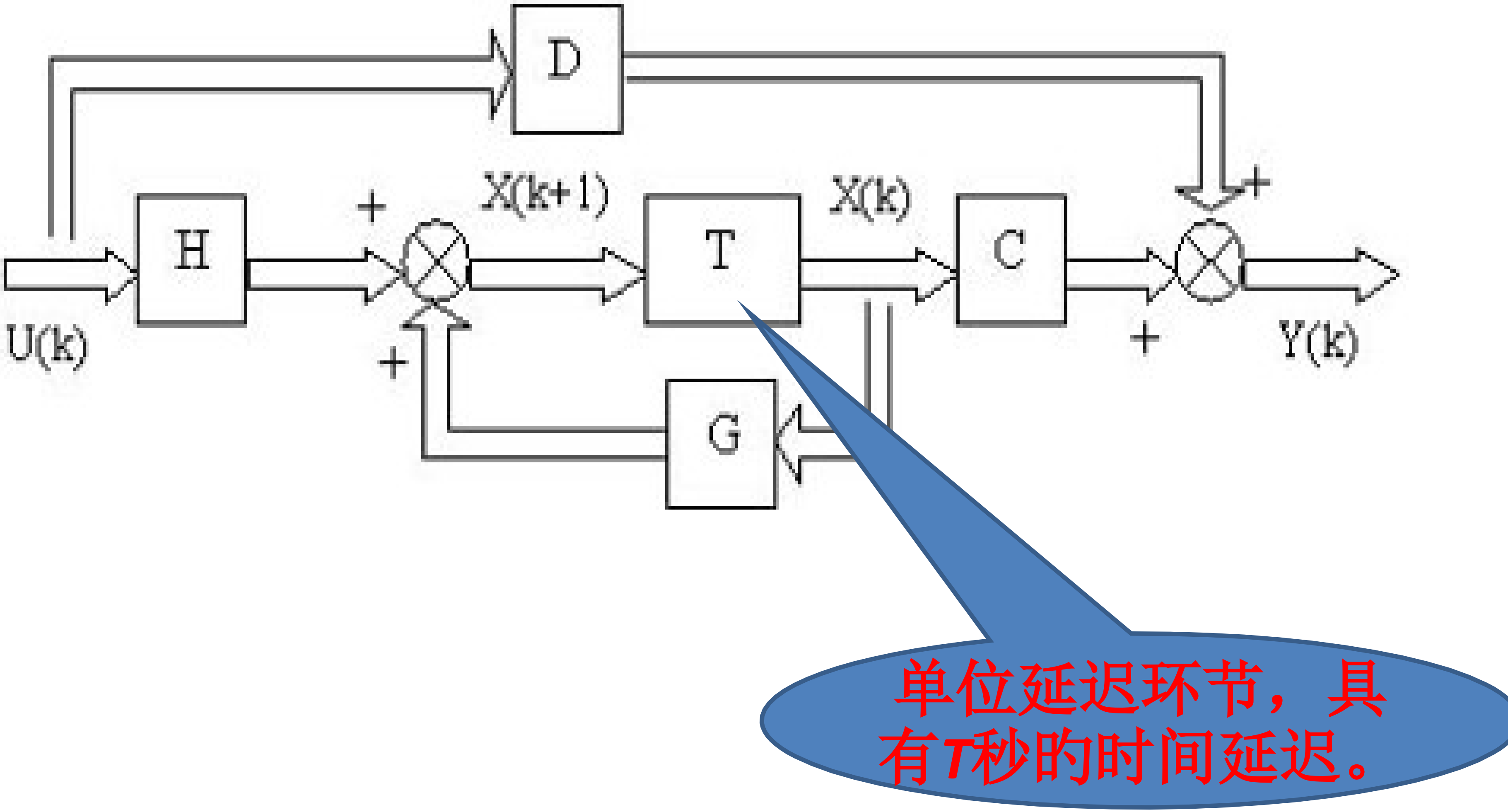
$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{G}(k)\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{H}(k)\boldsymbol{u}(k) \\ \boldsymbol{y}(k) = \boldsymbol{C}(k)\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{D}(k)\boldsymbol{u}(k) \end{cases}$$

式中 $\boldsymbol{x}(k)$—系统的n维状态向量；$\boldsymbol{u}(k)$—系统的r维输入向量（控制向量）；$\boldsymbol{y}(k)$—系统的m维输出向量；$\boldsymbol{G}(k)$—$n\times n$线性离散系统的系统矩阵；$\boldsymbol{H}(k)$—$n\times r$线性离散系统的控制矩阵；$\boldsymbol{C}(k)$—$m\times n$线性离散系统的输出矩阵；$\boldsymbol{D}(k)$—$m\times r$线性离散系统的直接传播矩阵。

假如$\boldsymbol{G}(k)$，$\boldsymbol{H}(k)$，$\boldsymbol{C}(k)$，$\boldsymbol{D}(k)$均为常数矩阵，上式就变为线性定常离散系统，其状态空间体现式为：

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{G}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{H}\boldsymbol{u}(k) \\ \boldsymbol{y}(k) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(k) \end{cases}$$

方块图表达如图：



◆差分方程式化为状态空间体现式

1．差分方程的输入函数为$bu(k)$时

设系统的差分方程为

$$y(k+n)+a_{n-1}y(k+n-1)+\cdots+a_1y(k+1)+a_0y(k)=bu(k)$$

选用状态

$$\begin{cases} x_1(k)=y(k) \\ x_2(k)=y(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k)=y(k+n-1) \end{cases}$$

则高阶差分方程可化为一阶差分组

$$\begin{cases} x_1(k+1)=x_2(k) \\ x_2(k+1)=x_3(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k+1)=x_n(k) \\ x_n(k+1)=-a_0x_1(k)-a_1x_2(k)-\cdots-a_{n-1}x_n(k)+bu(k) \end{cases}$$

写成向量方程形式，得

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k+1) \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix}$$

或

$$\begin{cases} x(k+1) = Gx(k) + hu(k) \\ y(k) = cx(k) \end{cases}$$

其中：

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \qquad h = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{bmatrix}$$

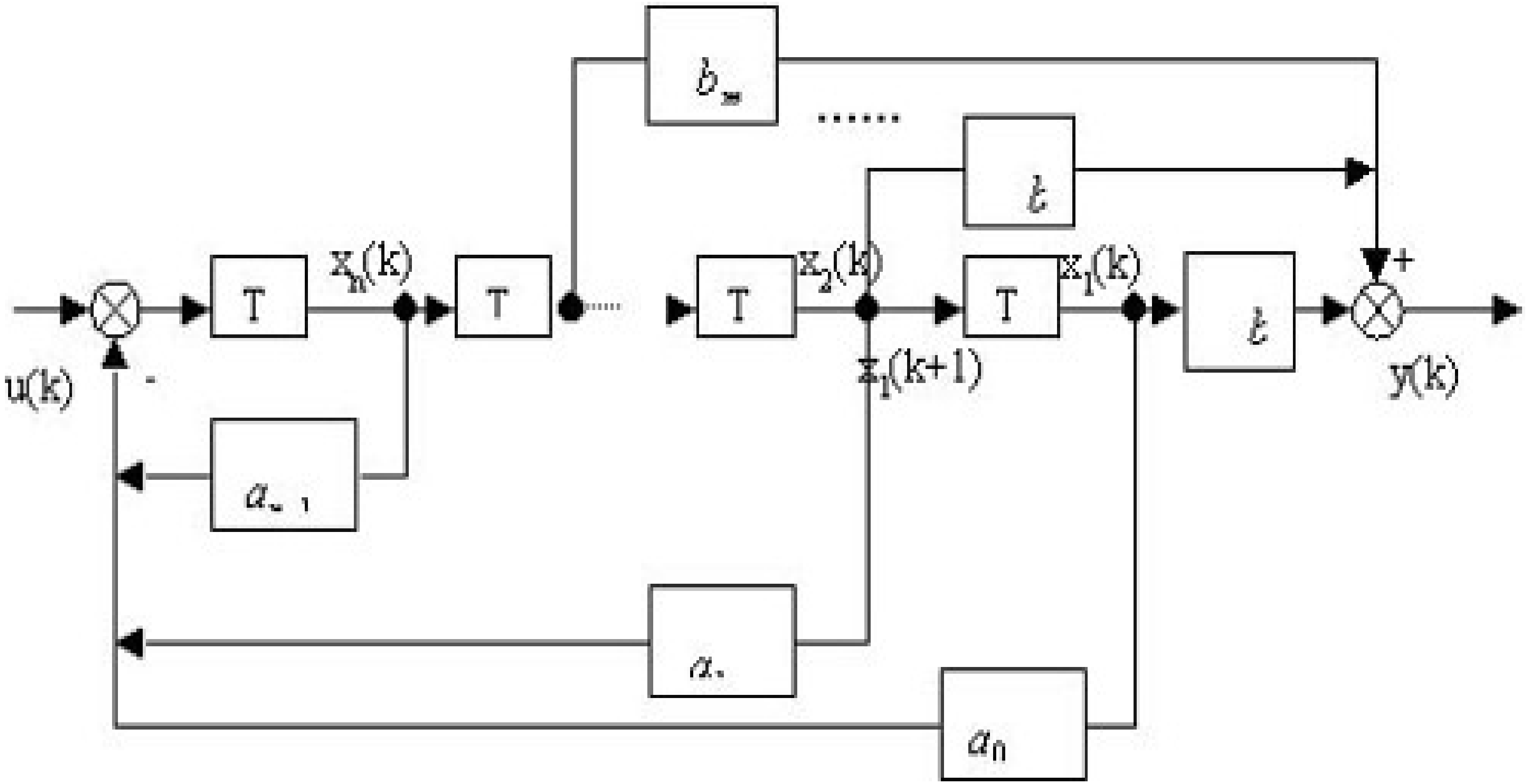
$$c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2．差分方程的输入函数包括$u(k)$ $u(k+1)$，… 时

设系统差分方程为

$$
\begin{aligned}
&y(k+n)+a_{n-1}y(k+n-1)+\cdots+a_1y(k+1)+a_0y(k)\\
&=b_mu(k+m)+b_{m-1}u(k+m-1)+\cdots+b_1u(k+1)+b_0u(k)
\end{aligned}
$$

其中 $m\le n$.



u(k)
-
T
$x_n(k)$
T
T
$x_2(k)$
T
$x_1(k)$
$x_1(k+1)$
+
y(k)
b_m
....
a_n

可选择如下一组状态变量

$$
\begin{cases}
x_1(k+1) = x_2(k) \\
x_2(k+1) = x_3(k) \\
\vdots \\
x_{n-1}(k+1) = x_n(k) \\
x_n(k+1) = -a_0 x_1(k) - a_1 x_2(k) - \cdots - a_{n-1} x_n(k) + u(k)
\end{cases}
$$

$$
y(k) = b_0 x_1(k) + b_1 x_2(k) + \cdots + b_m x_{m+1}(k)
$$