

高中数学新教材必修第一册 2.2 基本不等式 (南开题库)

一、选择题 (共 40 小题; 共 200 分)

1. 设 $\{a_n\}$ 是等差数列. 下列结论中正确的是

- A. 若 $a_1 > 0$, 则 $a_n > 0$
- B. 若 $a_1 < 0$, 则 $a_n < 0$
- C. 若 $a_1 > 0$, 则 $a_n > 0$
- D. 若 $a_1 < 0$, 则 $a_n < 0$

2. 已知命题 $p: x^2 - 2x - 3 < 0$; 命题 $q: x < -1$, 则下列判断正确的是

- A. p 是假命题
- B. q 是真命题
- C. $p \wedge q$ 是真命题
- D. $p \vee q$ 是真命题

3. 若 $a > 0, b > 0, c > 0$, 则下列不等式中

- ① $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$; ② $a^2 + b^2 + c^2 \geq 2ab + 2bc + 2ca$; ③ $a^2 + b^2 + c^2 \geq 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{bc} + 2\sqrt{ca}$; ④ $a^2 + b^2 + c^2 \geq 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{bc} + 2\sqrt{ca}$.

对一切满足条件的 a, b, c , 恒成立的序号是

- A. ①②
- B. ①③
- C. ①③④
- D. ②③④

4. 已知 $a > 0, b > 0$, 且 $a + b = 1$, 则

- A. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 4$
- B. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 2$
- C. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 1$
- D. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 0$

5. 设 $a > 0, b > 0$. 若 \sqrt{ab} 是 a 与 b 的等比中项, 则 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 的最小值为

- A. $\frac{1}{2}$
- B. $\frac{1}{3}$
- C. $\frac{1}{4}$
- D. $\frac{1}{5}$

6. 已知 $f(x) = x^2 - 2x + 1$, 则函数 $f(x)$ 有

- A. 最小值
- B. 最大值
- C. 最小值
- D. 最大值

7. 若正数 a, b 满足 $a + b = 1$, 则 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 的最小值是

- A. $\frac{1}{2}$
- B. $\frac{1}{3}$
- C. $\frac{1}{4}$
- D. $\frac{1}{5}$

8. 过抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点 F 作直线 l , 与抛物线交于 A, B, C, D 四点, 且 $AF = 3$, 则 BD 的最大值等于

- A. $\frac{1}{2}$
- B. $\frac{1}{3}$
- C. $\frac{1}{4}$
- D. $\frac{1}{5}$

9. 已知 $a > 0, b > 0$, 且 $a + b = 1$, 则 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 的最小值是

- A. $\frac{1}{2}$
- B. $\frac{1}{3}$
- C. $\frac{1}{4}$
- D. $\frac{1}{5}$

10. 已知函数 $f(x) = x^2 - 2x + 1$, 设 $g(x) = x^2 - 2x + 1$, 若关于 x 的不等式 $f(x) > g(x)$ 在 $x \in [1, 2]$ 上恒成立, 则 a 的取值范围是

- A. $a > 1$
- B. $a > 2$
- C. $a > 3$
- D. $a > 4$

11. 若函数 $f(x) = x^2 - 2x + 1$ 有最大值 $\frac{1}{4}$, 则 a 的值是

②若正整数 a 和 b 满足 $a^2 + b^2 = c^2$ ，则 c 为奇数；

③设 C_1 为圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上任意一点，圆 C_2 以 $(2, 0)$ 为圆心且半径为 1 。当时，圆 C_1 与圆 C_2 相切。

其中假命题的个数为

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

23. 设正实数 x, y, z 满足 $x + y + z = 1$ ，则当 x 取得最大值时， $xy + yz + zx$ 的最大值为

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{3}{4}$

24. 已知 $a, b > 0$ ，若不等式 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{k}{a+b}$ 恒成立，则 k 的最大值为

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

25. 一个篮球运动员投篮一次得 3 分的概率为 $\frac{1}{5}$ ，得 2 分的概率为 $\frac{2}{5}$ ，不得分的概率为 $\frac{2}{5}$ ，已知他投篮一次得分的数学期望为 $\frac{6}{5}$ ，则 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 的最小值为

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{5}$

26. 已知 $a, b > 0$ ， e 为自然对数的底数，则 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{e}$ 的最小值为

- A. $\frac{1}{e}$ B. $\frac{1}{e} + \frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{e} + \frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{e} + \frac{1}{4}$

27. “ $x > 1$ ”是“ $x^2 > 1$ ”的

- A. 充要条件 B. 充分而不必要条件
C. 必要而不充分条件 D. 既不充分也不必要条件

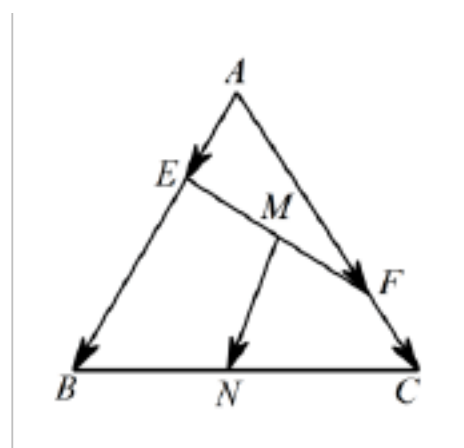
28. 若直线 $ax + by + c = 0$ 过点 $(1, 1)$ ，则 $a^2 + b^2$ 的最小值为

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{5}$

29. 设向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 满足 $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ ，其中 O 为坐标原点， $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 2, |\vec{c}| = 3$ ，若 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 三点共线，则 $|\vec{a}| + |\vec{b}| + |\vec{c}|$ 的最小值为

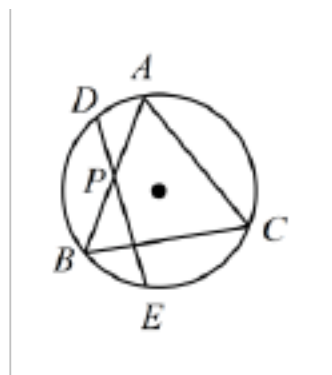
- A. 4 B. 5 C. 6 D. 7

30. 如图，在边长为 1 的正三角形 ABC 中， E, F 分别为边 AB, AC 上的动点，且满足 $AE = CF$ ， M, N 分别为 EF, BC 的中点，则 $AM + MN$ 的最小值为



- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{5}$

31. 如图所示，正三角形 ABC 的边长为 a ，其外接圆为圆 O ，点 P 为劣弧 BC 上的一个动点（不与点 B 、 C 重合），过点 P 与 BC 的中点 E 的直线交圆 O 于另一点 D ，则 PD 的最小值为



- A. $\frac{a}{2}$ B. $\frac{a}{4}$ C. $\frac{a}{2\sqrt{3}}$ D. $\frac{a}{4\sqrt{3}}$

32. 已知函数 $f(x) = \sin x + \cos x$ ，若 $f(x) \geq m$ 恒成立，则 m 的取值范围是

- A. $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ B. $[-1, 1]$ C. $[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$ D. $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

33. 设 $l_1: y = kx + 1$ ，过定点 $(0, 1)$ 的动直线 l_1 和过定点 $(1, 0)$ 的动直线 l_2 交于点 P ，则 OP 的取值范围是

- A. $[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$ B. $[\frac{1}{2}, 1]$ C. $[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]$ D. $[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$

34. 函数 $f(x) = x^2 + 2x + a$ 且 $f(x) > 0$ 的图象恒过定点 $(-1, 0)$ ，且点 $(-1, 0)$ 在直线 $ax + by + c = 0$ 上，则 $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2}$ 的最小值为

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{5}{2}$ D. $\frac{7}{2}$

35. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，且 $a^2 + b^2 = c^2$ ，若 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{2}ab \sin C$ ，则 $\frac{1}{\sin C}$ 的最小值为

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{5}{4}$ D. $\frac{7}{4}$

36. 设正实数 x, y 满足 $x + y = 1$ ，则当 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 取得最小值时， $\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ 的最大值为

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{5}{2}$ D. $\frac{7}{2}$

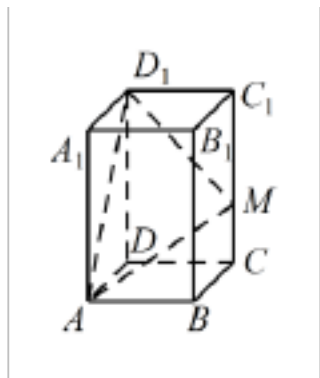
37. 设 $l: y = kx + 1$ ，若直线 l 与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 相切，则 k 的取值范围是

- A. $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ B. $[-1, 1]$ C. $[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$ D. $[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$

38. 设 P 是 $\triangle ABC$ 内一点，且 $\angle APB = \angle BPC = \angle CPA = 120^\circ$ ，定义 $f(P) = \frac{PA}{\sin 120^\circ} + \frac{PB}{\sin 120^\circ} + \frac{PC}{\sin 120^\circ}$ ，其中 PA, PB, PC 分别是 P 到 A, B, C 的距离，若 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{2}ab \sin C$ ，则 $f(P)$ 的最小值是

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{5}{4}$ D. $\frac{7}{4}$

39. 如图，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， $AB=2$ ， $AD=1$ ， $AA_1=1$ ，点 M 在棱 BC_1 上，且 $AM \perp BC_1$ ，则当 $\triangle AMB$ 的面积最小时，棱 BM 的长为



- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{5}$

40. 已知棱长为 1 的正四面体 $ABCD$ ，在侧棱 BC 上任取一点 M （与 B, C 不重合），若点 M 到平面 ABD 与平面 ABC 的距离分别为 d_1, d_2 ，则 $d_1 + d_2$ 的最小值为

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{1}{4}$

二、填空题（共 40 小题；共 200 分）

41. 椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 上一点 P 到两焦点的距离之积是 t ，当 t 取最大值时，点 P 坐标为 _____.

42. 已知 a, b, c 是 $\triangle ABC$ 的三边长，则 $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$ 的最小值为 _____.

43. 已知 $x > 0, y > 0$ ，则函数 $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x + y}$ 的最小值为 _____.

44. 已知 α, β, γ 分别为 $\triangle ABC$ 三个内角 A, B, C 的对边，且 $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ ，且 α, β, γ 成等差数列，则 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 _____.

45. 若直线 $ax + by + c = 0$ 过点 $(1, 1)$ ，则 $a^2 + b^2$ 的最小值为 _____.

46. 已知 x, y 满足 $x + y = 1$ ，且 $x > 0, y > 0$ ，则 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 的最小值为 _____.

47. 若 x, y 满足 $x^2 + y^2 = 1$ ，则 $x + y$ 的最小值为 _____.

48. 已知正数 x, y 满足 $x + y = 1$ ，那么使得 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 取最小值的实数对 (x, y) 是 _____.

49. 设 x, y 满足 $x + y = 1$ ，则 $\frac{x}{1-x} + \frac{y}{1-y}$ 的最大值为 _____.

50. 已知 $x > 0, y > 0$ ，则函数 $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x + y}$ 的值域是 _____.

51. 已知 x, y 满足 $x + y = 1$ ，且 $x > 0, y > 0$ ，则 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 的最小值为 _____.

52. 已知 a, b, c 是 $\triangle ABC$ 的三边长，下列不等式：① $a^2 + b^2 > c^2$ ，② $a^2 + b^2 < c^2$ ，③ $a^2 + b^2 = c^2$ ，④ $a^2 + b^2 \geq c^2$ ，其中一定恒成立的是 _____（填写序号）.

53. 若 x, y 均为正实数，且 $x + y = 1$ ，则 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 的最小值为 _____.

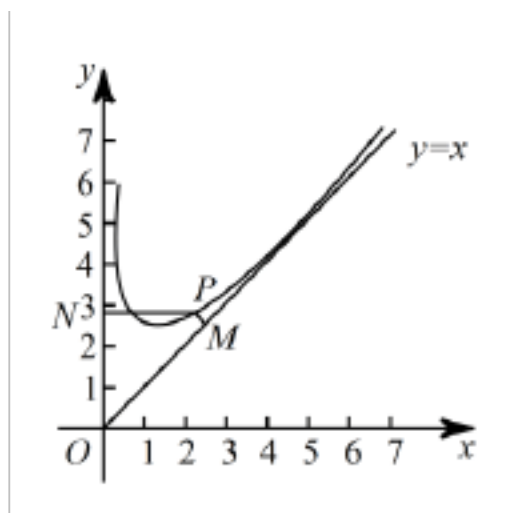
54. 函数 $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}$ 的图象恒过定点 $(\frac{1}{2}, 4)$ ，若点 P 在直线 $x + y = 1$ 上，则 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 的最小值为 _____.

55. 已知 a, b, c 为实数，且 $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ ，若 $ab + bc + ca \geq -\frac{1}{2}$ 恒成立，则实数 k 的取值范围是_____.
56. 函数 $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}$ (且 $x > 1$) 的图象恒过定点 $(2, 2)$ ，若点 (x, y) 在直线上，其中 $x > 1$ ，则 $x + y$ 的最小值为_____.
57. 若对于 $x \in (0, 1)$ ， $\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} \geq k$ 恒成立，则 k 的取值范围是_____.
58. 已知 a, b, c 为实数，且 $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ ，则 $ab + bc + ca$ 的最小值为_____.
59. 已知 a, b, c 均为正， $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$ ，则 $ab + bc + ca$ 的最小值为_____.
60. 已知 a, b, c 均为正， $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$ ，则 $ab + bc + ca$ 的最小值为_____.
61. 已知 a, b, c 均为正， $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$ ，则 $ab + bc + ca$ 的最小值是_____.
62. 已知 A, B 分别为三角形两个内角，满足 $A + B = \frac{\pi}{2}$ ，则 $\sin A + \sin B$ 取最大值时 _____.
63. 若对 $x \in (0, 1)$ ， $\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} \geq k$ 总成立，则实数 k 的取值范围是_____.
64. 设 a, b, c 均为正， $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$ ，则 $ab + bc + ca$ 的最小值为_____.
65. 设 l 为直线，若直线 l 与 x 轴相交于点 $(a, 0)$ ，与 y 轴相交于点 $(0, b)$ ，且 l 与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 相交所得弦的长为 $\frac{2}{3}$ ， O 为坐标原点，则 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 面积的最小值为_____.
66. 给出下列命题：
- ① 函数 $f(x) = x^2 + 2x + 1$ 既有极大值又有极小值，则 $a > 1$ 或 $a < -1$ ；
 - ② 若 $f(x) = x^2 + 2x + 1$ ，则 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty, -1)$ ；
 - ③ 过点 $(1, 1)$ 可作圆 $x^2 + y^2 = a^2$ 的两条切线，则实数 a 的取值范围为 $a > 1$ 或 $a < -1$ ；
 - ④ 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的离心率为 $\frac{5}{4}$ ，双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的离心率为 $\frac{3}{2}$ ，则 $\frac{a^2}{b^2}$ 的最小值为 $\frac{16}{9}$ 。
- 其中为真命题的序号是_____.
67. 已知集合 $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x + 1 < 0\}$ ， $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4x + 4 < 0\}$ ，则集合 $A \cap B =$ _____.
68. 已知实数 a, b, c ， a, b, c 的等差中项为 -1 ，设 $x = a^2 + b^2 + c^2$ ， $y = ab + bc + ca$ ，则 $\frac{x}{y}$ 的最小值为_____.
69. 在等腰梯形 $ABCD$ 中，已知 $AD \parallel BC$ ， $AB = CD$ ， $AD = 1$ ， $BC = 3$ ，动点 E 和 F 分别在线段 AB 和 CD 上，且 $EF \parallel AD$ ，则当 $EF =$ _____ 时， $AE + CF$ 有最小值为_____.
70. 某公司一年购买某种货物 1000 吨，每次都购买 x 吨，运费为 $4x$ 万元/次，一年的总存储费用为 $4x$ 万元，要使一年的总运费与总存储费用之和最小，则 $x =$ _____ 吨.
71. 已知集合 $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x + 1 < 0\}$ ， $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4x + 4 < 0\}$ ，则集合 $A \cap B =$ _____.

72. 已知 a, b 都是正实数, 且满足 $a^2 + b^2 = 1$, 则 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 的最小值为_____.
73. 设 x, y 满足 $x + y = 1$, 则当 $x = \frac{1}{3}$ 时, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 取得最小值.
74. 设 x, y 满足 $x + y = 1$, 则 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 的最小值为_____.
75. 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}$, $a_1 = 1$, 为非零常数, 则称数列 $\{a_n\}$ 为“梦想数列”, 已知正项数列 $\{a_n\}$ 为“梦想数列”, 且 $a_1 = 1$, 则 a_{10} 的最小值是_____.
76. 在三棱锥 $P-ABC$ 中, PA, PB, PC 两两垂直, 且 $PA = PB = PC = 1$, 设 M 是底面 ABC 内一点. 定义 $f(M) = \frac{1}{S_{PAB}} + \frac{1}{S_{PBC}} + \frac{1}{S_{PCA}}$, 其中 $S_{PAB}, S_{PBC}, S_{PCA}$ 分别是三棱锥 $P-ABM, P-BCM, P-CAM$ 的体积. 若 $f(M) = 1$, 且 $AM + BM + CM$ 恒成立, 则正数 k 的最小值为_____.
77. 已知函数 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$, 若函数 $f(x)$ 有四个零点 x_1, x_2, x_3, x_4 , 且 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$, 则 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ 的取值范围是_____.
78. 已知 a, b, c 分别为 $\triangle ABC$ 的三个内角 A, B, C 的对边, $a^2 + b^2 = c^2$, 且 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$, 则 $\triangle ABC$ 面积的最大值为_____.
79. 在等腰梯形 $ABCD$ 中, 已知 $AD \parallel BC, AB = CD, AD = 2, BC = 4, AB = 2$. 动点 M 和 N 分别在线段 AB 和 CD 上, 且 $AM = CN$, 则 MN 的最小值为_____.
80. 已知 O 为 $\triangle ABC$ 的外心, $\angle A = 60^\circ, \angle B = 45^\circ$, 若 $OA = 2$, 则 OB 的最小值为_____.

三、解答题 (共 20 小题; 共 260 分)

81. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 且 $f(x) = 0$. 设点 P 是函数图象上的任意一点, 过点 P 分别作直线 l_1 和 l_2 的垂线, 垂足分别为 M, N .
- 求 $PM \cdot PN$ 的值.
 - 问: $PM \cdot PN$ 是否为定值? 若是, 则求出该定值; 若不是, 请说明理由.
 - 设 O 为坐标原点, 求四边形 $OPMN$ 面积的最小值.

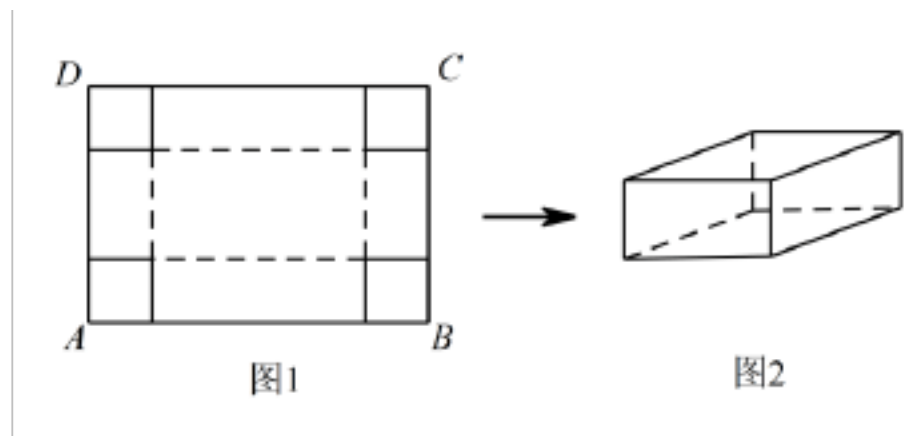


82. 已知直线 $l: y = kx + 1$ 与函数 $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$ 的图象相切于点 P .
- 求实数 k 的值;
 - 证明除切点 P 外, 直线 l 总在函数 $f(x)$ 的图象的上方;

- (3) 设 a, b, c 是两两不相等的正实数, 且 a, b, c 成等比数列, 试判断 $a^2 + b^2 + c^2$ 与 $2(ab + bc + ca)$ 的大小关系, 并证明你的结论.
83. 某工厂生产某种产品, 每日的成本 $C(x)$ (单位: 元) 与日产量 x (单位: 吨) 满足函数关系式 $C(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 15x + 10$, 每日的销售额 $R(x)$ (单位: 元) 与日产量 x 满足函数关系式 $R(x) = 10x - \frac{1}{3}x^3$, 已知每日的利润 $L(x) = R(x) - C(x)$, 且当 $x = 3$ 时, $L(x)$ 取得最大值.
- (1) 求 $L(x)$ 的值;
- (2) 当日产量为多少吨时, 每日的利润可以达到最大, 并求出最大值.
84. 已知函数 $f(x) = x^2 - 2x + 1$ 的最小值为 0 .
- (1) 求 $f(x)$ 的值以及此时的 x 的取值范围;
- (2) 若实数 a, b, c 满足 $a + b + c = 1$, 证明: $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}$.
85. 设函数 $f(x) = x^2 - 2x + 1$ 的最小值为 0 .
- (1) 求 $f(x)$ 的值;
- (2) 已知 a, b, c 满足 $a + b + c = 1$, 求 $a^2 + b^2 + c^2$ 的最小值.
86. 已知定义在 $[0, 1]$ 上的函数 $f(x) = x^2 - 2x + 1$, 若存在实数 a 使得 $f(a) = 0$ 成立.
- (1) 求实数 a 的值;
- (2) 若 a, b, c 满足 $a + b + c = 1$, 求证: $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}$.
87. 已知函数 $f(x) = x^2 - 2x + 1$, $g(x) = x^2 - 2x + 1$.
- (1) 求不等式 $f(x) > g(x)$ 的解集;
- (2) 若 $f(x)$ 的最小值为 0 , 正数 a, b, c 满足 $a + b + c = 1$, 求 $a^2 + b^2 + c^2$ 的最小值.
88. 已知 a, b, c 为正实数, 且 $a + b + c = 1$, 证明: $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}$.
89. 已知函数 $f(x) = x^2 - 2x + 1$ 的最大值为 0 .
- (1) 求 $f(x)$ 的值;
- (2) 若 a, b, c 满足 $a + b + c = 1$, 试比较 $a^2 + b^2 + c^2$ 与 $\frac{1}{3}$ 的大小.
90. 已知函数 $f(x) = x^2 - 2x + 1$ 的最小值为 0 , 且 $a + b + c = 1$.
- (1) 求 $f(x)$ 的值以及实数 a 的取值集合;
- (2) 若实数 a, b, c 满足 $a + b + c = 1$, 证明: $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}$.
91. 已知 a, b, c 满足 $a + b + c = 1$.
- (1) 求 $a^2 + b^2 + c^2$ 的最小值;
- (2) 是否存在 a, b, c 满足 $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{1}{3}$? 并说明理由.
92. 已知实数 a, b, c 均大于 0 .
- (1) 求证: $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3$;
- (2) 若 $a + b + c = 1$, 求证: $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3$.
93. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的离心率 $e = \frac{1}{2}$, 且点 $(2, 1)$ 在椭圆上.
- (1) 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的方程;

(2) 直线 l 与椭圆 C 交于 M, N 两点, 且线段 MN 的垂直平分线经过点 P . 求 $\triangle PMN$ (以 P 为坐标原点) 面积的最大值.

94. 在一张足够大的纸板上截取一个面积为 S 平方厘米的矩形纸板, 然后在矩形纸板的四个角上切去边长相等的小正方形, 再把它的边沿虚线折起, 做成一个无盖的长方体纸盒 (如图). 设小正方形边长为 x 厘米, 矩形纸板的两边 AB, CD 的长分别为 a 厘米和 b 厘米, 其中



- (1) 当 $x = \frac{a}{4}$ 时, 求纸盒侧面积的最大值;
- (2) 试确定 a, b 的值, 使得纸盒的体积最大, 并求出最大值.

95. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x$, 其中 $x > 0$.

- (1) 当 $x = 1$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处切线的方程;
- (2) 当 $x > 0$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调区间;
- (3) 若 $x > 0$, 证明对任意 $x > 0$, $f(x) > -\frac{1}{x}$ 恒成立.

96. 给定椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 称圆 $C': x^2 + y^2 = a^2$ 为椭圆 C 的“伴随圆”, 已知椭圆 C 的短轴长为 $2b$, 离心率为 $\frac{1}{2}$.

- (1) 求椭圆 C 的方程;
- (2) 若直线 l 与椭圆 C 交于 M, N 两点, 与其“伴随圆”交于 P, Q 两点, 当 l 过点 $(1, 0)$ 时, 求 $\triangle MPN$ 面积的最大值.

97. 已知 $f(x)$ 是定义在 $(0, +\infty)$ 上的单调递增函数. 对于任意的正数 x, y 满足 $xy = 1$; 对于 $x > 0$ 满足 $f(x) > \frac{1}{x}$.

- (1) 求 $f(x)$;
- (2) 若 $x > 0$, 解不等式 $f(x) > \frac{1}{x}$;
- (3) 求证: $f(x) > \frac{1}{x}$.

98. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px$.

- (1) 写出抛物线 C 的准线方程, 并求抛物线 C 的焦点到准线的距离;
- (2) 过点 $(1, 0)$ 且斜率存在的直线 l 与抛物线 C 交于不同的两点 M, N , 且点 M, N 关于 x 轴的对称点为 M', N' , 直线 MM', NN' 与 x 轴交于点 P .
 - (i) 求点 P 的坐标;
 - (ii) 求 $\triangle PMN$ 与 $\triangle P'M'N'$ 面积之和的最小值.

99. 在平面直角坐标系 xOy 中, F_1, F_2 分别为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的左、右焦点, B 为短轴的一个端点, P 是椭圆上的一点, 满足 $|PF_1| = |PF_2|$, 且 $\triangle PF_1F_2$ 的周长为 $4a$.

(1) 求椭圆 C 的方程,

(2) 设点 Q 是线段 BF_1 上的一点, 过点 Q 且与 x 轴不垂直的直线 l 交椭圆于 M, N 两点, 若 $\triangle QMN$ 是以 Q 为顶点的等腰三角形, 求点 Q 到直线 l 距离的取值范围.

100. 设函数 $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$.

(1) 解方程: $f(x) = 0$;

(2) 令 $g(x) = f(x) - \frac{1}{x}$, 求 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的值;

(3) 若 $h(x) = f(x) - \frac{1}{x} - \ln x$ 是实数集 \mathbb{R} 上的奇函数, 所以 $h(x) = 0$, 且 $h(x) > 0$ 对任意实数 x 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

联立 $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = -1 \end{cases}$ 化为 $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$ ，
 得 $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$ ，
 同理可得 $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ ，
 所以

同理可得 $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ 。
 所以

$$\frac{1}{2}$$

当且仅当 $x = 0, y = 1$ 时取等号。
 所以 $\frac{1}{2}$ 的最大值等于 $\frac{1}{2}$ 。

9. D

10. A

【解析】当 $a > 0$ 时，关于 x 的不等式 $ax^2 - 2x + 1 > 0$ 在 \mathbb{R} 上恒成立，

即为 $\Delta = 4 - 4a < 0$ ，

即有 $a < 1$ ，

由 $ax^2 - 2x + 1$ 的对称轴为 $x = \frac{1}{a}$ ，

可得 $x = \frac{1}{a}$ 处取得最大值 $\frac{1}{a}$ ；

由 $ax^2 - 2x + 1$ 的对称轴为 $x = \frac{1}{a}$ ，

可得 $x = \frac{1}{a}$ 处取得最小值 $\frac{1}{a}$ ，

则 $\frac{1}{a} = \frac{1}{a}$ 。

当 $a < 0$ 时，关于 x 的不等式 $ax^2 - 2x + 1 > 0$ 在 \mathbb{R} 上恒成立，

即为 $\Delta = 4 - 4a < 0$ ，

即有 $a < 1$ ，

由 $ax^2 - 2x + 1$ 的对称轴为 $x = \frac{1}{a}$ （当且仅当 $a = 1$ ）取得最大值 $\frac{1}{a}$ ；

由 $ax^2 - 2x + 1$ 的对称轴为 $x = \frac{1}{a}$ （当且仅当 $a = 1$ ）取得最小值 $\frac{1}{a}$ 。

则 $\frac{1}{a} = \frac{1}{a}$ 。

由 $\frac{1}{a} = \frac{1}{a}$ 可得， $a = 1$ 。

11. B

12. C 【解析】 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ ，等号当且仅当 $a=b$ ，即 $x=y$ 时取得。

13. C 【解析】因为 $\ln x < x-1$ ，取对数，得 $\ln \frac{1}{x} > 1-x$ ，所以 $-\ln x > 1-x$ 。

14. A 【解析】因为 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ ，两边平方得 $\frac{(a+b)^2}{4} \geq ab$ ，所以 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 。因为 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ ，所以 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 。

15. C 【解析】因为 $f(x)$ 的值域为 $[-1, 1]$ ，所以 $f(x) \in [-1, 1]$ ，即 $-1 \leq f(x) \leq 1$ ，所以 $f(x) \in [-1, 1]$ 。

16. C 【解析】对于 (C)，若 $\neg p$ 为假命题，则 p 与 q 均为假命题，所以 (C) 错误。

17. C

18. B 【解析】因为 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 恒成立，所以 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 恒成立。

两边同时平方，整理后得 $\frac{(a+b)^2}{4} \geq ab$ 恒成立，即不等式左边的最大值 $\frac{(a+b)^2}{4}$ 不等式右边的最小值 ab 。

因为 $\frac{(a+b)^2}{4} \geq ab$ （当且仅当 $a=b$ 时取等号），所以不等式左边的最大值为 $\frac{(a+b)^2}{4}$ ，所以 $\frac{(a+b)^2}{4} \geq ab$ ，所以 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 。

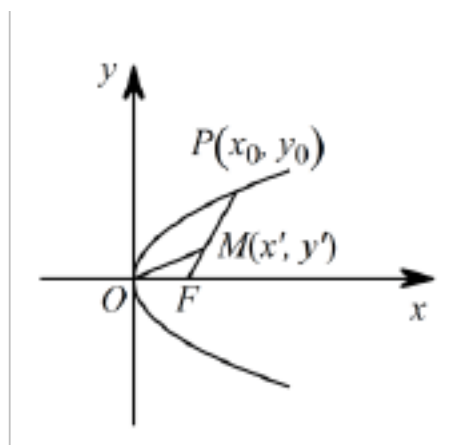
19. B

20. B

【解析】由题意， $\triangle OAB$ 为直角三角形， $\angle AOB = 90^\circ$ ， $OA = a$ ， $OB = b$ ， $AB = \sqrt{a^2 + b^2}$ 。所以 $S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2}ab$ 。

所以此三角形面积的最大值为 $\frac{1}{2}ab$ 。

21. C 【解析】如图所示，



设 $P(x_0, y_0)$ ，则 $M(x', y')$ ，即 $\frac{x'}{x_0} = \frac{y'}{y_0}$ 。

设 $a, b, c > 0$ ，由 $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ ，得 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \sqrt{3}$ 化简可得 $\frac{a+b+c}{abc} \geq \sqrt{3}$

所以直线 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = \sqrt{3}$ 的斜率为 $\frac{\sqrt{3}-\frac{z}{c}}{\frac{x}{a}-\frac{y}{b}}$ (当且仅当 $a=b=c$ 时取等号)。

22. B 【解析】① $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \sqrt{3}$ 在 $a=b=c$ 上为增函数，故①真；由均值不等式知②真；③由题意知点 (a, b, c) 为圆 $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ 的交点，得不出其他结论，故③假，假命题个数为 1。

23. B 【解析】由 $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ ，得 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \sqrt{3}$ 。

所以 $\frac{a+b+c}{abc} \geq \sqrt{3}$ ，

当且仅当 $a=b=c$ ，即 $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 时取等号。

此时 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \sqrt{3}$ ，

$$\begin{aligned} \frac{a+b+c}{abc} &\geq \sqrt{3} \\ \frac{a+b+c}{abc} &\geq \frac{a+b+c}{\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} \\ &= \sqrt{3}(a+b+c) \\ &\geq \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \\ &= 3 \end{aligned}$$

(当且仅当 $a=b=c$ 时等号成立)。

24. B 【解析】因为 $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ ，且 $a, b, c > 0$ ，所以 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \sqrt{3}$ ，又 $\frac{a+b+c}{abc} \geq \sqrt{3}$ (当且仅当 $a=b=c$ 时等号成立)，所以 $\frac{a+b+c}{abc} \geq \sqrt{3}$ ，故 $\frac{a+b+c}{abc}$ 的最大值为 $\sqrt{3}$ 。

25. C

26. A

27. C

28. D 【解析】因为直线 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = \sqrt{3}$ 过点 (a, b, c) ，所以 $\frac{a}{a} + \frac{b}{b} + \frac{c}{c} = \sqrt{3}$ ，即 $\sqrt{3} = \frac{a+b+c}{abc}$ ，

因为 $\frac{a+b+c}{abc} \geq \sqrt{3}$ ，所以 $\frac{a+b+c}{abc} = \sqrt{3}$ ，

当且仅当 $a=b=c$ ，即 $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 时取等号，

所以 $\frac{a+b+c}{abc}$ 的最小值为 $\sqrt{3}$ 。

29. C

30. C

【解析】 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \sqrt{3}$ ，所以 $\frac{a+b+c}{abc} \geq \sqrt{3}$ ，

因为 $\frac{a+b+c}{abc} \geq \sqrt{3}$ ，所以 $\frac{a+b+c}{abc} = \sqrt{3}$ ，所以 $\frac{a+b+c}{abc} = \sqrt{3}$ 。

31. D 【解析】由相交弦定理， $AB \cdot CD = AC \cdot BD$ 。

所以 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ (当且仅当 $a=b$ 时, 等号成立).

32. C 【解析】因为 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 恒成立, 所以 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 恒成立.

①当 $a=b$ 时, $\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$ 恒成立, 即 $\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$ 恒成立.

此时 $\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$.

②当 $a \neq b$ 时, $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$ 恒成立, 即 $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$ 恒成立, 即 $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} > 0$ 恒成立.

即 $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} > 0$.

综上, $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 的取值范围为 $a, b > 0$.

33. B 【解析】可得两条直线分别过定点 $(1, 0)$ 和 $(0, 1)$ 且垂直, 可得 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$. 当点

在点 $(1, 0)$ 或点 $(0, 1)$ 时, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 取得最小值 1 , 而由

得 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 的最大值为 1 , 当且仅当 $a=b=1$ 时等号成立.

34. A 【解析】由题意知 $a+b=1$, 于是有 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab} = \frac{1}{ab}$, 所以

$$\frac{1}{ab} \geq \frac{4}{(a+b)^2} = 4$$

35. B

36. C 【解析】含三个参数 a, b, c , 消元, 利用基本不等式及配方法求最值.

所以

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

当且仅当 $a=b$, 即 $a=b=1$ 时成立, 此时 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 2$. 所以

所以当 $a=b=1$ 时, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 取到最大值 2 .

37. D 【解析】直线 $ax+by+c=0$ 与圆 $x^2+y^2=r^2$ 相切,

圆心 $(0, 0)$ 到直线的距离为 $\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$$\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = r$$

所以

$$|c| = r\sqrt{a^2+b^2}$$

设 $a=r\cos\theta, b=r\sin\theta$, 则 $c = \pm r^2$, 解得

$$a^2+b^2 = r^2$$

38. D 【解析】在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle A = 30^\circ$ ， $\angle B = 60^\circ$ ， $BC = 1$ ， $AC = \sqrt{3}$ ， $AB = 2$ ，所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，因为 $S_{\triangle ADE} + S_{\triangle BDE} = S_{\triangle ABC}$ ，所以 $S_{\triangle ADE} + S_{\triangle BDE} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，

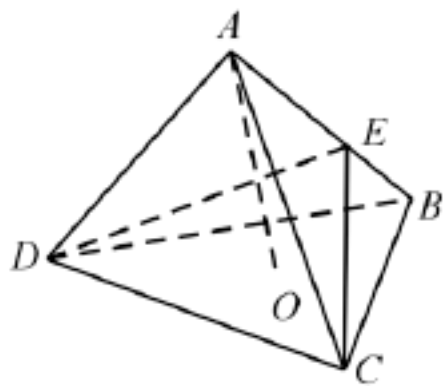
所以 $\frac{1}{2} \times DE \times h_1 + \frac{1}{2} \times DE \times h_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，当且仅当 $h_1 = h_2$ ，即 $DE \perp AB$ 时，即 D 为 AB 的中点， DE 为 AB 的中垂线， $DE = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 时取等号。

39. A 【解析】设 $\angle A = \alpha$ ， $\angle B = \beta$ ，则 $\angle C = 180^\circ - \alpha - \beta$ ，因为 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ ，根据勾股定理： $a^2 = b^2 + c^2$ ，整理得 $\cos A = 0$ ，又

当且仅当 $\alpha = 90^\circ$ 时等号成立。此时 $\angle C = 90^\circ - \beta$ ，所以 $\angle C = 90^\circ - \beta$ 。

40. C

【解析】如图，连接 AO ， BO ， CO ，设 O 为底面三角形 BCD 的中心，连接 AO ，



则正四面体的高 $AO = \sqrt{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 1$ 。

因为 $AO \perp$ 平面 BCD ，所以 $AO \perp BO$ ，所以

$$\frac{1}{2} \times DE \times h_1 + \frac{1}{2} \times DE \times h_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{1}{2} \times DE \times (h_1 + h_2) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{1}{2} \times DE \times AO = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{1}{2} \times DE \times 1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$DE = \sqrt{3}$$

当且仅当 $DE \perp AB$ ，即 D 为 AB 的中点时取等号。

第二部分

41. 或

42. -

43.

44. -

【解析】由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ 及 $\angle C = 90^\circ$ ，得

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/248021131141007001>