安徽省合肥市第一中学2024届高三最后一卷数学试题

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、单选题

1．已知向量$\vec{a}=(2,3),\vec{b}=(-1,3)$，则$\left|\vec{a}-2\vec{b}\right|=$（　　）

A．2　　B．3　　C．4　　D．5

2．已知复数z满足$\overline{z}\cdot(1+\mathrm{i})=2-\mathrm{i}$，则$z=$（　　）

A．$\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\mathrm{i}$　　B．$\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\mathrm{i}$

C．$-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\mathrm{i}$　　D．$-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\mathrm{i}$

3．已知焦点在x轴上的椭圆的离心率为$\frac{\sqrt{2}}{3}$，焦距为$2\sqrt{2}$，则该椭圆的方程为（　　）

A．$\frac{x^2}{3}+y^2=1$　　B．$\frac{x^2}{9}+y^2=1$

C．$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{7}=1$　　D．$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{28}=1$

4．已知等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$S_3=14,a_3=2$，则$a_4=$（　　）

A．1　　B．$\frac{2}{3}$或-1　　C．$-\frac{2}{3}$　　D．$-\frac{2}{3}$或1

5．已知α为三角形的内角，且$\cos\alpha=\frac{1-\sqrt{5}}{4}$，则$\sin\frac{\alpha}{2}=$（　　）

A．$\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$　　B．$\frac{1+\sqrt{5}}{4}$　　C．$\frac{3-\sqrt{5}}{8}$　　D．$\frac{3-\sqrt{5}}{4}$

6．甲乙丙丁戊5名同学坐成一排参加高考调研，若甲不在两端且甲乙不相邻的不同排列方式的个数为（　　）

A．36种　　B．48种　　C．54种　　D．64种

7．已知四棱锥$P-ABCD$的各顶点在同一球面上，若$AD=2AB=2BC=2CD=4$，$\triangle PAB$为正三角形，且面$PAB\perp$面$ABCD$，则该球的表面积为（　　）

A．$\frac{13}{3}\pi$　　B．16π　　C．$\frac{52}{3}\pi$　　D．20π

8．过$M(0,p)$且倾斜角为$\alpha\left(\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)\right)$的直线$l$与曲线$C:x^2=2py$交于$A,B$两点，分别过$A,B$作曲线$C$的两条切线$l_1,l_2$，若$l_1,l_2$交于$N$，若直线$MN$的倾斜角为$\beta$.则$\tan(\alpha-\beta)$

的最小值为（　）

A．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B．$\sqrt{2}$　　C．$2\sqrt{2}$　　D．$4\sqrt{2}$

二、多选题

9．下表是某人上班的年收入（单位：万元）与上班年份的一组数据：

年份 x	1	2	3	4	5	6	7
收入 y	2.9	3.3	3.6	4.4	4.8	5.2	5.9

则下列命题正确的有（　）

A．年收入的均值为 4.3

B．年收入的方差为 1.2

C．年收入的上四分位数为 5

D．若 y 与 x 可用回归直线方程 $\hat{y}=0.5x+\hat{a}$ 来模拟，则 $\hat{a}=2.3$

10．已知函数 $f\left(x\right)=\sqrt{3}\sin\omega x\cos\omega x-\sin^{2}\omega x\ (\omega>0)$，则下列命题正确的有（　）

A．当 $\omega=2$ 时，$x=\frac{5}{24}\pi$ 是 $y=f\left(x\right)$ 的一条对称轴

B．若 $\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right|=2$，且 $\left|x_1-x_2\right|_{\min}=\pi$，则 $\omega=\frac{1}{2}$

C．存在 $\omega\in\left(0,1\right)$，使得 $f\left(x\right)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位得到的函数为偶函数

D．若 $f\left(x\right)$ 在 $\left[0,\pi\right]$ 上恰有 5 个零点，则 ω 的范围为 $\left[2,\frac{7}{3}\right)$

11．已知函数 $f\left(x\right)=\mathrm{e}^{x},g\left(x\right)=-\ln x$，则下列命题正确的有（　）

A．若 $g\left(x\right)\geq ax$ 恒成立，则 $a\leq-\frac{1}{e}$

B．若 $y=f\left(x\right)$ 与 $y=ax-1$ 相切，则 $a=2\mathrm{e}$

C．存在实数 a 使得 $y=f\left(x\right)-ax$ 和 $y=g\left(x\right)+ax$ 有相同的最小值

D. 存在实数 a 使得方程 $f\left(x\right)-x=a$ 与 $x+g\left(x\right)=a$ 有相同的根且所有的根构成等差数列

三、填空题

12．已知集合 $A=\left\{x\in\mathbf{N} \mid x^2-x-2\leq 0\right\}$，集合 $B=\left\{x \mid x^2-(2a+1)x+a^2+a=0\right\}$，若 $B\subseteq A$，则 $a=$________.

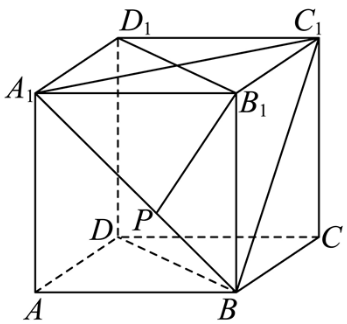
13．过 $P(1,2)$ 的直线 l 被曲线 $x^2-4x+y^2=0$ 所截得的线段长度为 $2\sqrt{3}$，则直线 l 的方程为________.

14．在 $\triangle ABC$ 中，设 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，且 $b\neq c,\tan A=\sin B+\sin C$，则以下结论正确的有________.

①$a\in\left(0,\dfrac{2}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}\right)$；②$a\in\left(\dfrac{2}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}},\sqrt{bc}\right)$；③$a\in\left(\sqrt{bc},\dfrac{b+c}{2}\right)$；④$a\in\left(\dfrac{b+c}{2},\sqrt{\dfrac{b^2+c^2}{2}}\right)$；⑤$a\in\left(\sqrt{\dfrac{b^2+c^2}{2}},+\infty\right)$.

四、解答题

15．正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 $2,P$ 是线段 A_1B 上的动点.



(1)求证：平面 $BDD_1B_1\perp$ 平面 A_1BC_1；

(2) PB_1 与平面 A_1BC_1 所成的角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，求 PB 的长.

16．甲和乙进行中国象棋比赛，每局甲赢的概率为 0.8，甲输的概率为 0.2，且每局比赛相互独立.

(1)若比赛采取三局两胜制，且乙已经赢得比赛，则比赛需要的局数 X 的数学期望 $E(X)$ 为多少？（保留小数点后一位）

(2)由于甲、乙实力悬殊，乙提出“甲赢 5 局之前乙赢 2 局，则乙胜”，求乙胜的概率.

17． $f(x)=\mathrm{e}^{x-a}(a\in\mathbf{R})$.

(1)若 $f(x)$ 的图象在点 $A(x_0, f(x_0))$ 处的切线经过原点，求 x_0；

(2)对任意的 $x\in[0,+\infty)$，有 $f(x)\ge \sin x$，求 a 的取值范围.

18．已知双曲线 $C:\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的上焦点为 $(0,\sqrt{6})$，下顶点为A，渐近线方程是 $y=\pm\sqrt{2}x$，过 $B\left(0,\frac{2}{3}\right)$ 点的直线交双曲线上支于 P,Q 两点，AP,AQ 分别交直线 $y=\frac{2}{3}$ 于 M,N 两点，O 为坐标原点.

(1)求 C 的方程；

(2)求证：M,N,O,A 四点共圆；

(3)求（2）中的圆的半径 r 的取值范围.

19．给定自然数 n 且 $n\ge 2$，设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 均为正数，$\sum_{i=1}^{n}x_i=T$ （T 为常数），$\sum_{i=1}^{n-1}\frac{x_i}{T-x_i}=\frac{x_n}{T-x_n}$.如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上恒有 $f''(x)>0$，则称函数 $f(x)$ 为凸函数.凸函数 $f(x)$ 具有性质：$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\ge f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)$.

(1)判断 $f(x)=\frac{x}{1-x}$，$x\in(0,1)$ 是否为凸函数，并证明；

(2)设 $y_i=\frac{x_i}{T}(i=1,2,\cdots,n)$，证明：$\frac{1}{y_n}-\frac{1}{1-y_n}\le 1-\frac{1}{n-1}$；

(3)求 $\frac{x_n}{T-x_n}$ 的最小值.

参考答案：

1．D

【分析】根据向量坐标进行线性运算，再由模长公式即可求解.

【详解】$\vec{a}-2\vec{b}=(2,3)-(-2,6)=(4,-3),\left|\vec{a}-2\vec{b}\right|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$，

故选：D.

2．A

【分析】根据题设求出$\overline{z}$，从而求出z的值.

【详解】由题知，$\overline{z}=\dfrac{2-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{(2-\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\dfrac{1-3\mathrm{i}}{2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}\mathrm{i}$，

所以$z=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}\mathrm{i}$.

故选：A.

3．C

【分析】根据离心率和焦距可得$\begin{cases}a=3\\c=\sqrt{2}\end{cases}$，进而可得$b^2$，即可得方程.

【详解】由题意可知：$\begin{cases}\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}\\2c=2\sqrt{2}\end{cases}$，可得$\begin{cases}a=3\\c=\sqrt{2}\end{cases}$，

则$b^2=9-2=7$，所以该椭圆的方程为$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{7}=1$.

故选：C.

4．D

【分析】根据等比数列基本量的计算即可求解公比，进而可求解.

【详解】依题意，$a_1\neq 0$，因为$S_3=14, a_3=2=a_1q^2$，

$\therefore a_1+a_2=12=a_1(1+q)$, 故$6q^2-q-1=0$，

故$q=\dfrac{1}{2}$或$q=-\dfrac{1}{3}$,

当$q=\dfrac{1}{2}$时，$a_4=a_3q=1$；

当$q=-\dfrac{1}{3}$, $a_4=a_3q=-\dfrac{2}{3}$；

$\therefore a_4=-\dfrac{2}{3}$或 1.

故选：D

5．B

【分析】利用降幂公式得到答案.

【详解】因为α为三角形的内角，$\cos\alpha=\dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$，

所以$\sin\dfrac{\alpha}{2}=\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}=\sqrt{\dfrac{1-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{4}\right)}{2}}=\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{5}}{8}}$

$=\sqrt{\dfrac{6+2\sqrt{5}}{16}}=\dfrac{\sqrt{\left(1+\sqrt{5}\right)^2}}{4}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$.

故选：B

6．A

【分析】利用间接法，先考虑甲乙不相邻的不同排列方式数，再减去甲站在一端且甲乙不相邻的排列方式数，结合排列数运算求解.

【详解】先考虑甲乙不相邻的不同排列方式数，再减去甲站在一端且甲乙不相邻的排列方式数，

所以总数为$\mathrm{A}_3^3\mathrm{A}_4^2-\mathrm{A}_2^1\mathrm{A}_3^1\mathrm{A}_3^3=36$种，

故选：A.

7．C

【分析】作辅助线，找到球心的位置，证明O到四棱锥所有顶点距离相等；根据勾股定理，求出球的半径，进而求出球的表面积.

【详解】如图，取AD的中点E，取AB的中点G，连接EG、PG，在线段PG上取一点F，使$FG=\dfrac{1}{3}PG$，

过点E作平面$ABCD$的垂线OE，使$OE=FG$，连接OF，

易知四边形$ABCD$是等腰梯形，VABE、VBCE、VCDE均为等边三角形，

所以$AE=BE=CE=DE=2$，

因为$OE\perp$平面$ABCD$，

所以$\angle OEA=\angle OEB=\angle OEC=\angle OED=90^\circ$，

所以$OA=OB=OC=OD$，

因为VPAB为正三角形，G为AB的中点，

所以$PG\perp AB$，

又因为平面$PAB\perp$平面$ABCD$，平面$PAB\cap$平面$ABCD=AB$，$PG\subset$平面PAB，

所以$PG\perp$平面$ABCD$，

因为$OE\perp$平面$ABCD$，

所以$PG//OE$，即$FG//OE$

又因为$OE=FG$，所以四边形$OEGF$为平行四边形，

所以$OF//EG$，

因为$\vee ABE$为正三角形，G为AB的中点，

所以$EG\perp AB$，

又因为平面$PAB\perp$平面$ABCD$，平面$PAB\cap$平面$ABCD=AB$，$EG\subset$平面$ABCD$，

所以$EG\perp$平面PAB，所以$OF\perp$平面PAB，

又因为F是$\vee ABP$的外心，所以$FA=FB=FP$，

所以$OA=OB=OP$，

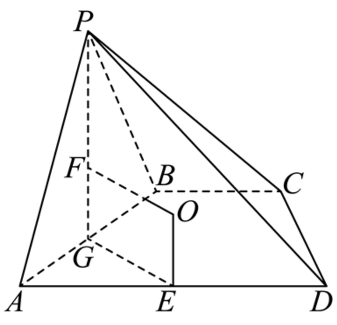
所以O即为四棱锥外接球的球心，

因为$OE=FG=\frac{1}{3}PG=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$AE=2$，

所以$R=OA=\sqrt{OE^2+AE^2}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+2^2}=\frac{\sqrt{39}}{3}$

所以$S=4\pi R^2=4\pi\cdot(\frac{\sqrt{39}}{3})^2=\frac{52}{3}\pi$，

故选：C.



8．C

【分析】首先画出平面图形，求出$\tan\alpha\cdot\tan\beta=k\cdot k'=-2$的结论，再利用两角和与差的正切公式以及前面的结论将$\tan\left(\alpha-\beta\right)$化简为$\left(-k\right)+\left(-\frac{2}{k}\right)$的形式，由基本不等式即可求得最值.

【详解】如图，设$N\left(x_0,y_0\right)$，$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，

由于曲线$C: y=\dfrac{x^2}{2p}$，则$y^{'}=\dfrac{x}{p}$，

所以在A点的切线方程为$y-y_1=\dfrac{x_1}{p}(x-x_1)$，

同理在B点的切线方程为$y-y_2=\dfrac{x_2}{p}(x-x_2)$，

由于N点是两切线的交点，所以$\begin{cases} y_0-y_1=\dfrac{x_1}{p}(x_0-x_1) \\ y_0-y_2=\dfrac{x_2}{p}(x_0-x_2) \end{cases}$，

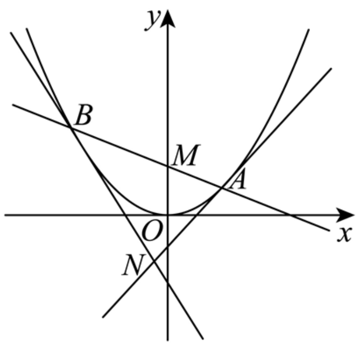
则l_{AB}为$y_0-y=\dfrac{x}{p}(x_0-x)\Rightarrow y_0-y=\dfrac{xx_0}{p}-2y\Rightarrow x_0x=p\left(y+y_0\right)$，且过$M\left(0,p\right)$，

$\therefore y_0=-p$且$k=\tan\alpha=\dfrac{x_0}{p}$，设$k'=\tan\beta=-\dfrac{2p}{x_0},\therefore k\cdot k'=-2$，

$\therefore \tan\left(\alpha-\beta\right)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{k-k'}{1+k\cdot k'}=\left(-k\right)+\left(-\dfrac{2}{k}\right)\geq 2\sqrt{2}$，

当且仅当$k=-\sqrt{2}$时“=”成立，

故选：C.



9．AD

【分析】对于A：根据平均数定义运算求解；对于B：根据方差公式分析求解；对于C：根据百分位数的定义分析求解；对于D：根据线性回归方程必过样本中心点分析求解.

【详解】对于选项A：由题意可得：年收入的均值

$\overline{y}=\dfrac{2.9+3.3+3.6+4.4+4.8+5.2+5.9}{7}=4.3$，故A正确；

对于选项B：由题意可得：

年份 x	1	2	3	4	5	6	7
收入 y	2.9	3.3	3.6	4.4	4.8	5.2	5.9

$\left(y-\overline{y}\right)^2$	1.96	1	0.49	0.01	0.25	0.81	2.56

所以年收入的方差$s^2=\dfrac{1.96+1+0.49+0.01+0.25+0.81+2.56}{7}=\dfrac{7.08}{7}\neq 1.2$，故 B 错误；

对于选项 C：因为$7\times 0.75=5.25$，

所以年收入的上四分位数为第 6 个数据，是5.2，故 C 错误；

对于选项 D：因为年份的平均数$\overline{x}=\dfrac{1+2+3+4+5+6+7}{7}=4$，即样本中心点为$\left(4,4.3\right)$，

所以$\hat{a}=\overline{y}-0.5\overline{x}=4.3-0.5\times 4=2.3$，故 D 正确；

故选：AD.

10．BD

【分析】首先对函数表达式进行化简，A 选项，将$\omega=2$，$x=\dfrac{5}{24}\pi$代入发现此处有对称中心，没有对称轴；B 选项，由题设知，π为半个周期；C 选项，对函数进行平移变换，再判断奇偶性；D 选项，求出$2\omega x+\dfrac{\pi}{6}$的范围，再确定区间右端点$2\omega\pi+\dfrac{\pi}{6}$的范围，从而求出$\omega$的范围.

【详解】$f\left(x\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\omega x-\dfrac{1-\cos 2\omega x}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\omega x+\dfrac{1}{2}\cos 2\omega x-\dfrac{1}{2}=\sin\left(2\omega x+\dfrac{\pi}{6}\right)-\dfrac{1}{2}$

对于 A，当$\omega=2$时，$f\left(x\right)=\sin\left(4x+\dfrac{\pi}{6}\right)-\dfrac{1}{2}$，

所以$f\left(\dfrac{5}{24}\pi\right)=\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}+\dfrac{\pi}{6}\right)-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{2}$，

所以$x=\dfrac{5}{24}\pi$不是$y=f\left(x\right)$的一条对称轴，故 A 错误；

对于 B，由题意知，$T=2\pi$，

所以$\dfrac{2\pi}{2\left|\omega\right|}=2\pi$，

又因为$\omega>0$，所以$\omega=\dfrac{1}{2}$，故 B 正确；

对于 C，$f\left(x\right)$向左平移$\dfrac{\pi}{6}$个单位后，

得到$g\left(x\right)=\sin\left[2\omega\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)+\dfrac{\pi}{6}\right]-\dfrac{1}{2}=\sin\left(2\omega x+\dfrac{\omega\pi}{3}+\dfrac{\pi}{6}\right)-\dfrac{1}{2}$，

假设$g\left(x\right)$为偶函数，则$\dfrac{\omega\pi}{3}+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in Z$，