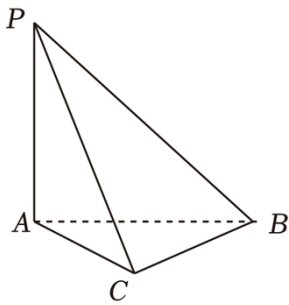


重难点突破 04 立体几何表面积与体积

一. 选择题 (共 3 小题)

1. 《九章算术》中记载, 四个面都为直角三角形的四面体称之为鳖臑. 现有一个“鳖臑”, $PA \perp$ 底面 ABC , $AC \perp BC$, 且 $PA=3$, $AC=BC=2$, 则该四面体的体积为()



- A. 1 B. 2 C. 4 D. 8

【解答】解: 依题意有, $PA \perp$ 底面 ABC , $AC \perp BC$, 且 $PA=3$, $AC=BC=2$,

$$\begin{aligned} \text{则 } V_{P-ABC} &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times AC \times BC \times PA \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times 3 \\ &= 2. \end{aligned}$$

所以该四面体体积为 2.

故选: B.

2. 已知圆柱的底面半径为 2, 母线长为 8, 过圆柱底面圆周上一点作与圆柱底面所成角为 $\frac{\pi}{4}$ 的平面, 把这个圆柱分成两个几何体, 则两几何体的体积之比为()

- A. 2:1 B. 3:1 C. 4:1 D. 5:1

【解答】解: 如图示圆柱中, 底面半径为 $BG=2$, 底面直径为 $BA=4$, 母线长为 $BE=8$.

过圆柱底面圆周上一点 A 作与圆柱底面所成角为 $\frac{\pi}{4}$ 的平面为一个椭圆面, 且 $\angle CAB = \frac{\pi}{4}$.

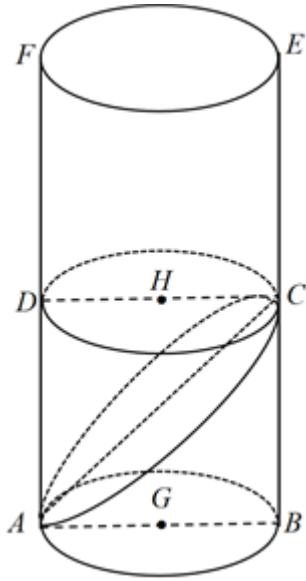
在直角三角形 ABC 中, $\angle CAB = \frac{\pi}{4}$, $BA=4$, 所以 $BC=4$.

所以 C 为母线 BE 的中点, 过 C 作与圆柱底面平行的平面则平分整个圆柱.

在下半个圆柱中, 椭圆面截两部分的体积为 1:1,

所以椭圆面截整个几何体, 所得两部分的体积之比为 3:1.

故选：B．



3. 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是平行四边形，点 E 、 F 分别为 PC 、 AD 的中点，连接 BF 交 CD 的延长线于点 G ，平面 BGE 将四棱锥 $P-ABCD$ 分成两部分的体积分别为 V_1 ， V_2

且满足 $V_1 > V_2$ ，则 $\frac{V_1}{V_2} = (\quad)$

A. $\frac{4}{3}$

B. $\frac{7}{5}$

C. $\frac{5}{3}$

D. $\frac{7}{4}$

【解答】解：如图，连接 GE 交 PD 于点 H ，连接 FH ，

则平面 BGE 将四棱锥 $P-ABCD$ 分成多面体 $P-FABEH$ 和多面体 $FDH-BCE$ 两部分，

显然 $V_1 = V_{P-FABEH}$ ， $V_2 = V_{FDH-BCE}$ ．

设平行四边形 $ABCD$ 的面积为 S ，因为点 F 为 AD 的中点，所以 $S_{\triangle GFD} = \frac{1}{4}S$ ， $S_{\triangle GBC} = S$ ，

设 P 到平面 $ABCD$ 的距离为 h ，因为点 E 为 PC 的中点，所以点 E 到平面 $ABCD$ 的距离为

$$\frac{1}{2}h，$$

取 PD 中点 M ，连接 EM ，则 $EM \parallel CD$ ，且 $EM = \frac{1}{2}CD$ ，

又点 G ， D ， C 共线且 $GD = DC$ ，所以 $EM \parallel GD$ ，且 $EM = \frac{1}{2}GD$ ，

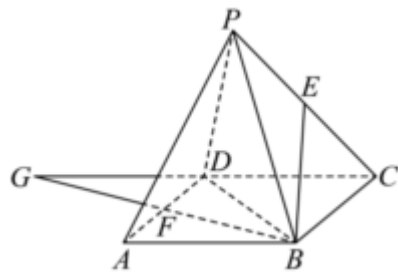
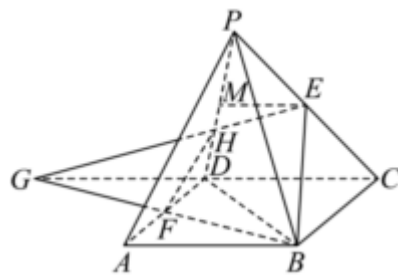
所以 $\frac{MH}{HD} = \frac{ME}{GD} = \frac{1}{2}$ ，所以 $\frac{DH}{PD} = \frac{\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{3}$ ，所以点 H 到平面 $ABCD$ 的距离为 $\frac{1}{3}h$ ，

故 $V_2 = V_{E-GBC} - V_{H-GFD} = \frac{1}{3}S \cdot \frac{1}{2}h - \frac{1}{3} \times \frac{1}{4}S \cdot \frac{1}{3}h = \frac{5}{36}Sh$ ，

$V_1 = V_{P-ABCD} - V_2 = \frac{1}{3}Sh - \frac{5}{36}Sh = \frac{7}{36}Sh$ ，

因此 $\frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{5}$.

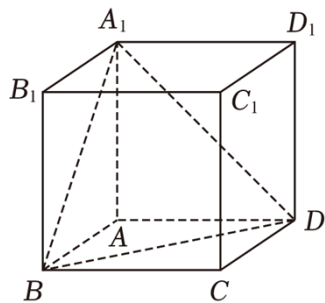
故选: B .



二. 多选题 (共 1 小题)

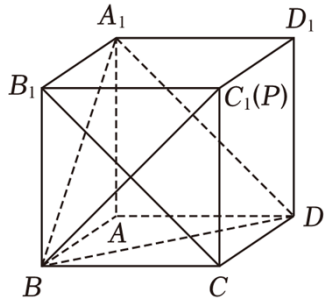
4. 如图, 在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 P 满足 $\overrightarrow{BP} = \lambda \overrightarrow{BC} + \mu \overrightarrow{BB_1}$, 其中

$\lambda \in [0, 1], \mu \in [0, 1]$, 则()



- A. 当 $\lambda = \mu = 1$ 时, $BP \perp A_1D$
- B. 当 $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$ 时, 点 P 到平面 A_1BD 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- C. 当 $\lambda + \mu = 1$ 时, $D_1P \parallel$ 平面 A_1BD
- D. 当 $\lambda + \mu = \frac{1}{2}$ 时, 三棱锥 $A_1 - PBD$ 的体积恒为 $\frac{1}{12}$

【解答】解：对于 A ，



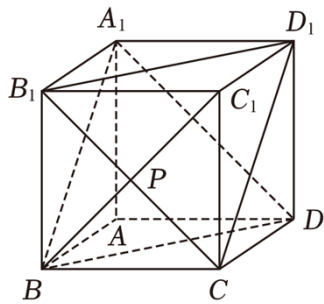
当 $\lambda = \mu = 1$ 时，此时点 P 与点 C_1 重合，由正方体性质可得 $BC_1 \perp B_1C$ ， $A_1B_1 \parallel AB \parallel CD$ ，

$$A_1B_1 = CD，$$

所以四边形 A_1B_1CD 为平行四边形，从而 $B_1C \parallel A_1D$ ，

又因为 $BC_1 \perp B_1C$ ，所以 $BC_1 \perp A_1D$ ，即 $BP \perp A_1D$ ，故 A 正确；

对于 B ，当 $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$ 时，此时点 P 为 B_1C 的中点，



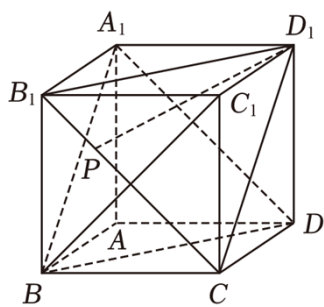
由 A 选项分析可知 $B_1C \parallel A_1D$ ， $B_1C \not\subset$ 平面 A_1BD ， $A_1D \subset$ 平面 A_1BD ，

所以 $B_1C \parallel$ 平面 A_1BD ，从而得点 P 到平面 A_1BD 的距离等于点 C 到平面 A_1BD 的距离，设为 d ，

因为三棱锥 $A_1 - BCD$ 与三棱锥 $C - A_1BD$ 是同一个三棱锥，且 $\triangle A_1BD$ 为边长为 $\sqrt{2}$ 的等边三角形，

所以 $V_{A_1 - BCD} = V_{C - A_1BD}$ ，从而得 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times 1 = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times (\sqrt{2})^2 \times d$ ，解得 $d = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，故 B 错误；

对于 C ，



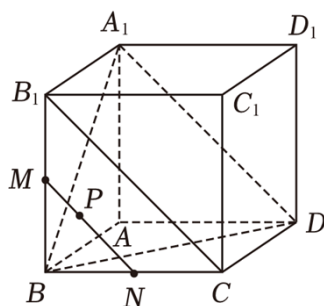
当 $\lambda + \mu = 1$ 时，此时 P, C, B_1 三点共线，

由 B 选项分析可知 $B_1C \parallel \text{平面 } A_1BD$ ，同理可证 $B_1D_1 \parallel \text{平面 } A_1BD$ ，

又因为 $B_1C, B_1D_1 \subset \text{平面 } B_1CD_1$ ， $B_1C \cap B_1D_1 = B_1$ ， $B_1C, B_1D_1 \subset \text{平面 } B_1CD_1$ ，

所以平面 $B_1CD_1 \parallel \text{平面 } A_1BD$ ，又 $D_1P \subset \text{平面 } B_1CD_1$ ，从而得 $D_1P \parallel \text{平面 } A_1BD$ ，故 C 正确；

对于 D ，



当 $\lambda + \mu = \frac{1}{2}$ 时，点 P 在 $\triangle BB_1C$ 中与 B_1C 平行的中位线 MN 上，即 $MN \parallel B_1C$ ，

由 B 选项分析可知 $B_1C \parallel \text{平面 } A_1BD$ ，且 $MN \not\subset \text{平面 } A_1BD$ ，

所以 $MN \parallel \text{平面 } A_1BD$ ，从而点 P 到平面 A_1BD 的距离为定值，

为点 C 到平面 A_1BD 的距离的一半，即 $\frac{1}{2}d = \frac{\sqrt{3}}{6}$ ，

底面为边长为 $\sqrt{2}$ 的等边三角形，所以 $S_{\triangle A_1BD} = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，

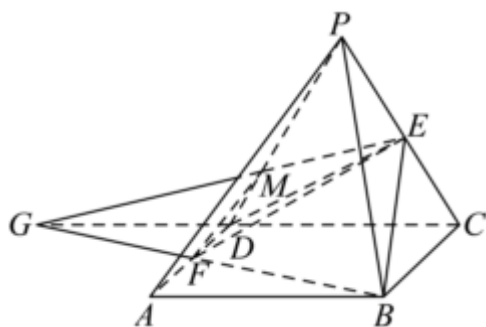
则 $P - A_1BD$ 的体积为 $V = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{1}{12}$ ，故 D 正确。

故选：ACD。

三. 填空题（共 1 小题）

5. 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是平行四边形，点 E, F 分别为 PC, AD 的中点，平面 BEF 将四棱锥 $P-ABCD$ 分成两部分的体积分别为 V_1, V_2 且满足 $V_1 > V_2$ ，则 $\frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{5}$ 。

【解答】解：如图，



延长 BF ， CD 交于点 G ，连接 GE 交 PD 于点 M ，

∵ 底面 $ABCD$ 为平行四边形， $\therefore \triangle FDG$ 与 $\triangle FAB$ 全等，

且 $\triangle BCG$ 与 $\triangle FDG$ 相似，相似比为 2，

设 $\triangle FDG$ 的面积为 S ，则四边形 $BCDF$ 的面积为 $3S$ ，

设点 P 到底面 $ABCD$ 的距离为 h ，则 $V_{\text{四棱锥}E-BCDF} = \frac{1}{3} \cdot 3S \cdot \frac{1}{2}h = \frac{1}{2}Sh$ ，

又 Q 为 PC 的中点， $\therefore V_{E-DFM} = \frac{1}{2}V_{C-DFM} = \frac{1}{2}V_{G-DFM}$ ，

$\therefore V_{E-DFG} = \frac{1}{3}S \times \frac{1}{2}h = \frac{1}{6}Sh = 3V_{E-DFM}$ ，得 $V_{E-DFM} = \frac{1}{18}Sh$ ，

$\therefore V_2 = V_{MECBFD} = V_{E-BCDF} + V_{E-DFM} = \frac{5}{9}Sh$ ，

$V_1 = V_{P-ABCD} - V_2 = \frac{1}{3} \times 4S \times h - \frac{5}{9}Sh = \frac{7}{9}Sh$ ，

则 $\frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{5}$ 。

故答案为： $\frac{7}{5}$ 。

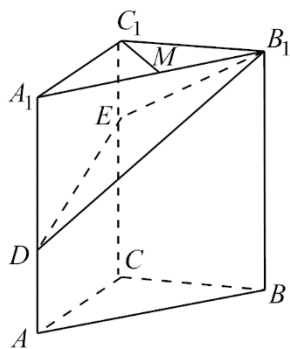
四．解答题（共 15 小题）

6. 如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， $CC_1 \perp$ 平面 ABC ， $AC \perp BC$ ， $AC = BC = 2$ ， $CC_1 = 3$ ，

点 D ， E 分别在棱 AA_1 和棱 CC_1 上，且 $AD = 1$ ， $CE = 2$ ， M 为棱 A_1B_1 的中点。

(1) 求证： $C_1M \perp B_1D$ ；

(2) 求三棱锥 $B-DB_1E$ 的体积。



【解答】解：（1）证明：在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， $CC_1 \perp$ 平面 ABC ，则 $BB_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1$ ，

由 $C_1M \subset$ 平面 $A_1B_1C_1$ ，则 $C_1M \perp BB_1$ ，

因为 $AC = BC$ ，则 $A_1C_1 = B_1C_1$ ，又 M 为 A_1B_1 的中点，所以 $C_1M \perp A_1B_1$ ，

又 $BB_1 \perp A_1B_1 = B_1$ ， $A_1B_1, BB_1 \subset$ 平面 AA_1B_1B ，所以 $C_1M \perp$ 平面 AA_1B_1B ，

由 $B_1D \subset$ 平面 AA_1B_1B ，所以 $C_1M \perp B_1D$ 。

（2）设点 E 到平面 BB_1D 的距离为 h ，则 h 等于点 C 到平面 AA_1B_1B 的距离 CM ，

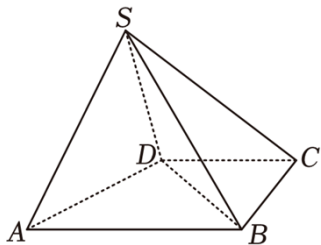
易知 $h = CM = \sqrt{2}$ ， $\triangle BB_1D$ 的面积为 $\frac{1}{2} \times 3 \times 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$ ，

所以 $V_{B-DB_1E} = V_{E-BB_1D} = \frac{1}{3} \times S_{\triangle BB_1D} \times h = \frac{1}{3} \times 3\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$ 。

7. 如图，在四棱锥 $S-ABCD$ 中， $AB \parallel DC$ ， $BC \perp AB$ ， $CD = SD$ ，平面 $SCD \perp$ 平面 SBC 。

（1）求证： $BC \perp$ 平面 SCD ；

（2）设 $BC = CD = 8$ ， $SB = 16$ ，求三棱锥 $S-BCD$ 的体积。



【解答】解：（1）取 SC 的中点 N ，连接 DN ，

因为 $CD = SD$ ， N 为 SC 中点，所以 $DN \perp SC$ ，

因为平面 $SCD \perp$ 平面 SBC ，平面 $SCD \cap$ 平面 $SBC = SC$ ， $DN \subset$ 平面 SCD ，

所以 $DN \perp$ 平面 SBC ，又 $BC \subset$ 平面 SBC ，所以 $DN \perp BC$ ，

故 B, E, G, F 四点共面:

(2) 由正四棱锥的对称性知, $V_1 = 2V_{E-PBG}$, $V_2 = 2V_{A-PBD}$,

设点 E 到平面 PBG 的距离为 d_1 , 点 A 到平面 PBD 的距离为 d_2 ,

由 E 是 PA 的中点得 $d_2 = 2d_1$,

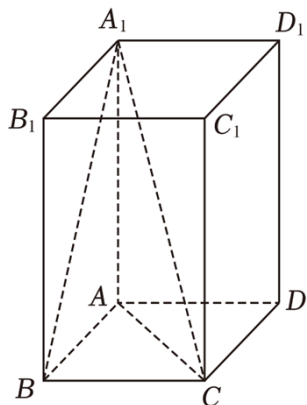
由 $\overline{DG} = 2\overline{GP}$ 得 $S_{\triangle PBD} = 3S_{\triangle PBG}$,

$$\text{所以 } \frac{V_1}{V_2} = \frac{V_{E-PBG}}{V_{A-PBD}} = \frac{\frac{1}{3}S_{\triangle PBG} \cdot d_1}{\frac{1}{3}S_{\triangle PBD} \cdot d_2} = \frac{1}{6}.$$

9. 《九章算术》作为中国古数学专著之一, 在其“商功”篇内记载: “斜解立方, 得两甍堵. 斜解甍堵, 其一为阳马, 一为鳖臑.” 鳖臑是我国古数学对四个面均为直角三角形的四面体的统称. 如图所示, $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 是长方体.

(1) 求证: 三棱锥 $A_1 - ABC$ 为鳖臑;

(2) 若 $AB = 4$, $AD = 3$, $AA_1 = 4$, 求三棱锥 $A_1 - ABC$ 的表面积.



【解答】解: (1) 证明: $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 是长方体, 则 $A_1A \perp$ 底面 $ABCD$,

则 $A_1A \perp AB$, 则面 A_1AB 是直角三角形,

同时, $A_1A \perp AC$, 则面 A_1AC 是直角三角形,

又由 $BC \perp$ 面 ABB_1A_1 , 则有 $BC \perp AB$, 面 ABC 为直角三角形,

同时, $BC \perp BA_1$, 则面 A_1BC 是直角三角形,

故棱锥 $A_1 - ABC$ 的四个面均为直角三角形, 故三棱锥 $A_1 - ABC$ 为鳖臑;

(2) 根据题意, $\triangle A_1AB$ 中, $A_1A \perp AB$, 其面积 $S_1 = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$,

$\triangle A_1AC$ 中, $A_1A \perp AC$, 且 $AC = \sqrt{16+9} = 5$, 其面积 $S_2 = \frac{1}{2} \times 5 \times 4 = 10$,

$\triangle ABC$ 中, $AC \perp AB$, 其面积 $S_3 = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$,

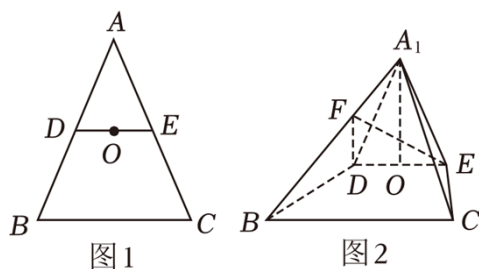
$\triangle A_1AB$ 中, $A_1B \perp BC$, 且 $A_1B = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$, 其面积 $S_4 = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times 3 = 6\sqrt{2}$,

故三棱锥 A_1-ABC 的表面积 $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 24 + 6\sqrt{2}$.

10. 如图 1, 在 $\triangle ABC$ 中, D, E 分别为 AB, AC 的中点; O 为 DE 的中点, $AB = AC = 2\sqrt{5}$, $BC = 4$, 将 $\triangle ADE$ 沿 DE 折起到 $\triangle A_1DE$ 的位置, 使得平面 $A_1DE \perp$ 平面 $BCED$, 如图 2, 点 F 是线段 A_1B 上的一点 (不包含端点).

(1) 求证: $A_1O \perp BD$;

(2) 若直线 EC 和平面 DEF 所成角的正弦值为 $\frac{4}{5}$, 求三棱锥 A_1-DEF 的体积.



【解答】解: (1) 由题意可知: $DE \parallel BC$, $AD = AE$, $\therefore A_1D = A_1E$,

又 O 为 DE 的中点, $\therefore A_1O \perp DE$.

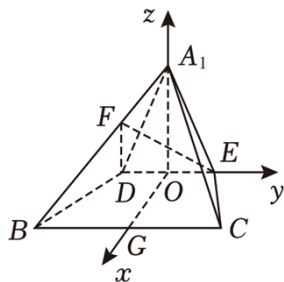
Q 平面 $A_1DE \perp$ 平面 $BCED$, 平面 $A_1DE \cap$ 平面 $BCED = DE$, $A_1O \subset$ 平面 A_1DE ,

$\therefore A_1O \perp$ 平面 $BCED$,

又 $BD \subset \text{平面 } BCED$, $\therefore A_1O \perp BD$;

(2) 取 BC 的中点 G , 连接 OG , $\therefore OE \perp OG$,

以 O 为坐标原点, OG , OE , OA_1 所在的直线分别为 x 轴, y 轴, z 轴建立空间直角坐标系,



则 $B(2, -2, 0)$, $C(2, 2, 0)$, $A_1(0, 0, 2)$, $D(0, -1, 0)$, $E(0, 1, 0)$, $\therefore$

$$\vec{BA_1} = (-2, 2, 2).$$

设 $\vec{BF} = \lambda \vec{BA_1} = \lambda(-2, 2, 2) = (-2\lambda, 2\lambda, 2\lambda) (0 < \lambda < 1)$,

则 $\vec{DF} = \vec{DB} + \vec{BF} = (2, -1, 0) + (-2\lambda, 2\lambda, 2\lambda) = (2 - 2\lambda, 2\lambda - 1, 2\lambda)$,

又 $\vec{DE} = (0, 2, 0)$, 设平面 DEF 的一个法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$,

$$\text{由 } \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{DE} = 2y = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{DF} = (2 - 2\lambda)x + (2\lambda - 1)y + 2\lambda z = 0 \end{cases}, \text{ 取 } x = \lambda, \text{ 得 } \vec{n} = (\lambda, 0, \lambda - 1),$$

又 $\vec{EC} = (2, 1, 0)$,

设直线 EC 和平面 DEF 所成角的大小为 θ ,

$$\therefore \sin \theta = |\cos \langle \vec{n}, \vec{EC} \rangle| = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{EC}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{EC}|} = \frac{|2\lambda|}{\sqrt{2^2 + 1^2} \times \sqrt{\lambda^2 + (\lambda - 1)^2}} = \frac{2\lambda}{\sqrt{5} \times \sqrt{2\lambda^2 - 2\lambda + 1}} = \frac{4}{5},$$

解得 $\lambda = \frac{2}{3}$ 或 $\lambda = 2$ (舍), $\therefore \vec{BF} = \frac{2}{3} \vec{BA_1}$.

$$\therefore V_{A_1-DEF} = V_{F-A_1DE} = \frac{1}{3} V_{B-A_1DE} = \frac{1}{3} V_{A_1-BDE} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times 2 = \frac{4}{9}.$$

即三棱锥 A_1-DEF 的体积为 $\frac{4}{9}$.

11. 如图, 在棱长为 1 的正方体 $ABCD-EFGH$ 中, 点 $P \in \text{平面 } BDE$, 且满足

$$\vec{AP} = \frac{1}{4} \vec{AB} + 2\lambda \vec{AD} + \left(\frac{1}{2} - \lambda\right) \vec{AE}.$$

(1) 利用向量基本定理求 λ 的值;

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/248053076067006130>