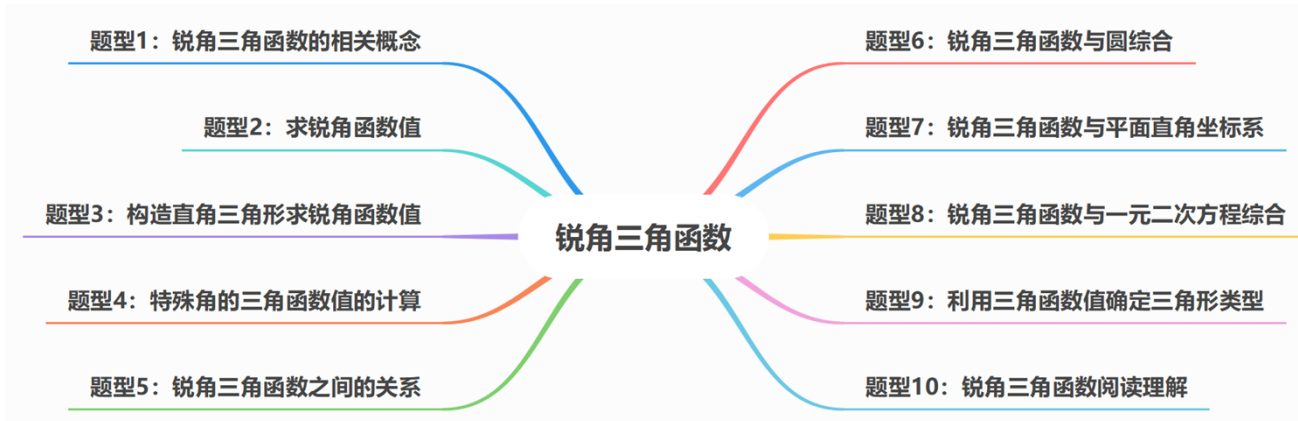


28.1 锐角三角函数



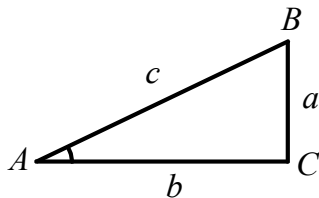
题型汇总



重要笔记

锐角三角函数的概念

如图所示, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $\angle A$ 所对的边 BC 记为 a , 叫做 $\angle A$ 的对边, 也叫做 $\angle B$ 的邻边, $\angle B$ 所对的边 AC 记为 b , 叫做 $\angle B$ 的对边, 也是 $\angle A$ 的邻边, 直角 C 所对的边 AB 记为 c , 叫做斜边.



锐角 A 的对边与斜边的比叫做 $\angle A$ 的正弦, 记作 $\sin A$, 即 $\sin A = \frac{\angle A \text{ 的对边}}{\text{斜边}} = \frac{a}{c}$;

锐角 A 的邻边与斜边的比叫做 $\angle A$ 的余弦, 记作 $\cos A$, 即 $\cos A = \frac{\angle A \text{ 的邻边}}{\text{斜边}} = \frac{b}{c}$;

锐角 A 的对边与邻边的比叫做 $\angle A$ 的正切, 记作 $\tan A$, 即 $\tan A = \frac{\angle A \text{ 的对边}}{\angle A \text{ 的邻边}} = \frac{a}{b}$.

同理 $\sin B = \frac{\angle B \text{ 的对边}}{\text{斜边}} = \frac{b}{c}$; $\cos B = \frac{\angle B \text{ 的邻边}}{\text{斜边}} = \frac{a}{c}$; $\tan B = \frac{\angle B \text{ 的对边}}{\angle B \text{ 的邻边}} = \frac{b}{a}$.

注意:

(1) 正弦、余弦、正切函数是在直角三角形中定义的, 反映了直角三角形边与角的关系, 是两条线段的比值. 角的度数确定时, 其比值不变, 角的度数变化时, 比值也随之变化.

(2) $\sin A$, $\cos A$, $\tan A$ 分别是一个完整的数学符号, 是一个整体, 不能写成 $\sin \cdot A$, $\cos \cdot A$,

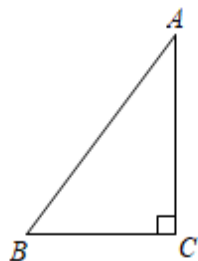
$\tan \cdot A$ ，不能理解成 $\sin$ 与 $\angle A$ ， $\cos$ 与 $\angle A$ ， $\tan$ 与 $\angle A$ 的乘积。书写时习惯上省略 $\angle A$ 的角的记号“ $\angle$ ”，但对三个大写字母表示成的角(如 $\angle AEF$)，其正切应写成“ $\tan \angle AEF$ ”，不能写成“ $\tan AEF$ ”；另外， $(\sin A)^2$ 、 $(\cos A)^2$ 、 $(\tan A)^2$ 常写成 $\sin^2 A$ 、 $\cos^2 A$ 、 $\tan^2 A$ 。

(3) 任何一个锐角都有相应的锐角三角函数值，不因这个角不在某个三角形中而不存在。

(4) 由锐角三角函数的定义知：当角度在 $0^\circ < \angle A < 90^\circ$ 间变化时， $0 < \sin A < 1$ ， $0 < \cos A < 1$ ， $\tan A > 0$ 。

题型 1：锐角三角函数的相关概念

例题 1. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AB = 5$ ， $AC = 4$ ，下列三角函数表示正确的是（ ）



A. $\sin A = \frac{4}{5}$

B. $\cos A = \frac{4}{5}$

C. $\tan A = \frac{4}{3}$

D. $\tan B = \frac{4}{5}$

【答案】B

【解析】【解答】 $\because \angle C = 90^\circ$ ， $AB = 5$ ， $AC = 4$

$$\therefore BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$$

$$\therefore \sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{5}, \quad \text{A 不符合题意；}$$

$$\therefore \cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{4}{5}, \quad \text{B 符合题意；}$$

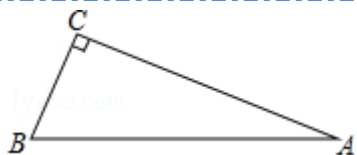
$$\therefore \tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{4}, \quad \text{C 不符合题意；}$$

$$\therefore \tan B = \frac{AC}{BC} = \frac{4}{3}, \quad \text{D 不符合题意；}$$

故答案为：B。

【分析】 利用正弦、余弦和正切的定义逐项判断即可。

【变式 1-1】 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AB = 13$ ， $AC = 12$ ，则 $\angle A$ 的正弦值为（ ）



A. $\frac{5}{12}$

B. $\frac{12}{13}$

C. $\frac{12}{5}$

D. $\frac{5}{13}$

【答案】D

【解析】【解答】在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $AB=13$ ， $AC=12$ ，

$$\therefore BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = 5,$$

$$\therefore \sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{5}{13},$$

故答案为：D.

【分析】在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，利用勾股定理求出 $BC=5$ ，根据锐角三角函数的定义可得 $\sin A = \frac{BC}{AB}$ ，由此计算即可.

【变式 1-2】在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ，如果 $AC=4$ ， $BC=3$ ，那么 $\angle A$ 的正切值为（ ）

A. $\frac{3}{4}$

B. $\frac{4}{3}$

C. $\frac{3}{5}$

D. $\frac{4}{5}$

【答案】A

【解析】【解答】解：在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $AC=4$ ， $BC=3$ ， $\therefore \tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{4}$.

故答案为：A.

【分析】根据正切函数的定义 $\tan A = \frac{\angle A \text{ 的对边}}{\angle A \text{ 的邻边}}$ 即可直接得出答案.

题型 2：求锐角函数值

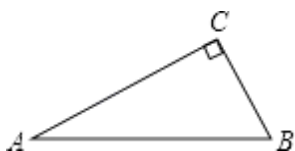
例题 2. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $AB=13$ ， $BC=5$ ，求 $\sin A$ ， $\cos A$ ， $\tan A$.

【答案】解：由勾股定理得， $AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ ，

$$\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{5}{13},$$

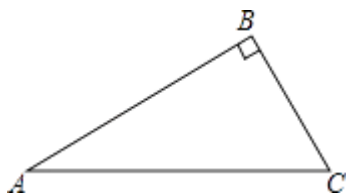
$$\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{12}{13},$$

$$\tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{5}{12}.$$



【解析】【分析】利用勾股定理列式求出 AC ，然后根据锐角的三角函数列式即可．

【变式 2-1】已知，如图 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $AB=8$ ， $BC=6$ ，求 $\sin\angle A$ 和 $\tan\angle A$ ．



【答案】解：在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，由勾股定理，得

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 10,$$

$$\sin\angle A = \frac{BC}{AC} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5};$$

$$\tan\angle A = \frac{AC}{AB} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

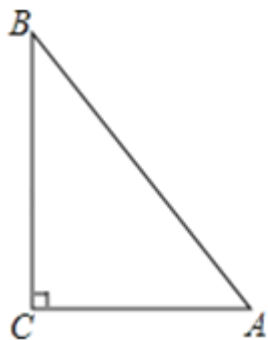
【解析】【分析】根据勾股定理，可得 AC 的长，根据在直角三角形中，锐角的正弦为对边比斜边，正切为对边比邻边，可得答案．

【变式 2-2】在直角三角形 ABC 中，已知 $\angle C=90^\circ$ ， $AB=15$ ， $AC=9$ ，分别求出 $\sin A$ 和 $\tan B$ 的值．

【答案】解：如图， $\because \angle C=90^\circ$ ， $AB=15$ ， $AC=9$ ，

$$\therefore BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = 12,$$

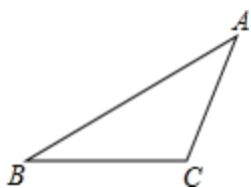
$$\therefore \sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{5}, \quad \tan B = \frac{AC}{BC} = \frac{4}{3}.$$



【解析】【分析】利用勾股定理得出 BC 的长，再利用锐角三角函数关系得出答案．

题型 3：构造直角三角形求锐角函数值

例题3.如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB=8$ ， $BC=6$ ， $S_{\triangle ABC}=12$ ．试求 $\tan\angle B$ 的值．



【分析】过点A作 $AD\perp BC$ 的延长线于D，利用三角形的面积求出AD，再利用勾股定理列式求出BD，然后根据锐角的正切值等于对边比邻边列式计算即可得解．

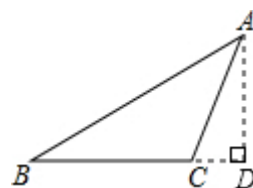
【解答】解：如图，过点A作 $AD\perp BC$ 的延长线于D，

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AD = \frac{1}{2} \times 6 \cdot AD = 12,$$

解得 $AD=4$ ，

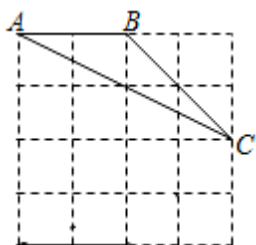
$$\text{在} Rt\triangle ABD \text{中}, BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{8^2 - 4^2} = 4\sqrt{3},$$

$$\tan\angle B = \frac{AD}{BD} = \frac{4}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$



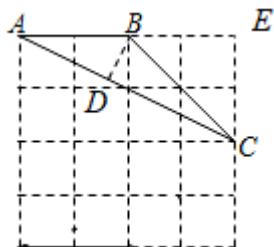
【点评】本题考查了锐角三角函数的定义，勾股定理，作出辅助线构造直角三角形是解题的关键．

【变式3-1】如图，在 4×4 的正方形网格中， $\triangle ABC$ 的顶点都在边长为1的小正方形的顶点上，则 $\tan\angle ACB$ 的值为_____．



【答案】 $\frac{1}{3}$

【解析】【解答】解：过点B作 $BD\perp AC$ 于点D，如图，



由勾股定理得， $AC = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$

根据等积关系得， $\frac{1}{2} \times AB \times CE = \frac{1}{2} \times AC \times BD$

$$\therefore BD = \frac{AB \cdot CE}{AC} = \frac{2 \times 2}{2\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

由勾股定理得， $AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{2^2 - (\frac{2\sqrt{5}}{5})^2} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$

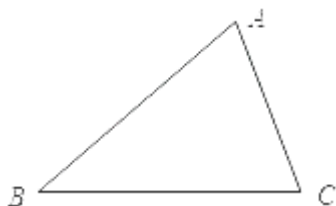
$$\therefore CD = AC - AD = 2\sqrt{5} - \frac{4\sqrt{5}}{5} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

$$\therefore \tan \angle ACB = \frac{BD}{CD} = \frac{\frac{2\sqrt{5}}{5}}{\frac{6\sqrt{5}}{5}} = \frac{1}{3}$$

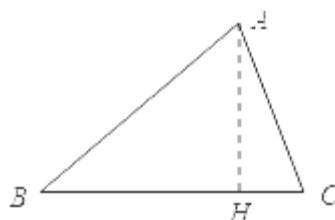
故答案为： $\frac{1}{3}$.

【分析】过点 B 作 $BD \perp AC$ 于点 D，如图，根据勾股定理求出 $AC=2\sqrt{5}$ ，利用 $\triangle ABC$ 的面积求出 BD 的长，再利用勾股定理求出 AD，从而求出 $CD=AC-AD$ 的长，根据 $\tan \angle ACB = \frac{BD}{CD}$ 即可求解.

【变式 3-2】如图，锐角 $\triangle ABC$ 中， $AB=10\text{cm}$ ， $BC=9\text{cm}$ ， $\triangle ABC$ 的面积为 27cm^2 . 求 $\tan B$ 的值.



【答案】解：过点 A 作 $AH \perp BC$ 于 H，



$$\because S_{\triangle ABC} = 27, \therefore \frac{1}{2}$$

$$\times 9 \times AH = 27, \therefore AH = 6, \because AB = 10, \therefore BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8, \therefore \tan B = \frac{AH}{BH} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}.$$

【解析】【分析】过点 A 作 $AH \perp BC$ 于 H，根据 $\triangle ABC$ 的面积为 27 可求出 AH 的长，在直角三角形 ABH 中用勾股定理求出 BH 的长，则 $\tan B$ 的值可求。

特殊角的三角函数值

利用三角函数的定义，可求出 30° 、 45° 、 60° 角的各三角函数值，归纳如下：

锐角 α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$
-------------	---------------	---------------	---------------

30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

注意：

(1)通过该表可以方便地知道 30° 、 45° 、 60° 角的各三角函数值，它的另一个应用就是：如果知道了一个锐角的三角函数值，就可以求出这个锐角的度数，例如：若 $\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，则锐角 $\theta = 45^\circ$ 。

(2)仔细研究表中数值的规律会发现：

$\sin 30^\circ$ 、 $\sin 45^\circ$ 、 $\sin 60^\circ$ 的值依次为 $\frac{\sqrt{1}}{2}$ 、 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 、 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，而 $\cos 30^\circ$ 、 $\cos 45^\circ$ 、 $\cos 60^\circ$ 的值的顺序正好相反， $\tan 30^\circ$ 、 $\tan 45^\circ$ 、 $\tan 60^\circ$ 的值依次增大，其变化规律可以总结为：

- ①正弦、正切值随锐角度数的增大(或减小)而增大(或减小)；
- ②余弦值随锐角度数的增大(或减小)而减小(或增大)。

题型 4：特殊角的三角函数值的计算

例题 4.计算：

- (1) $\sin 45^\circ \cos 45^\circ + 4 \tan 30^\circ \sin 60^\circ$ ；
- (2) $\cos 60^\circ - 2 \sin^2 45^\circ + \frac{2}{3} \tan 60^\circ - \sin 30^\circ$ 。
- (3) $\frac{\sin 60^\circ + 3 \tan 30^\circ \cdot \cos 60^\circ}{(1 - 2 \cot 45^\circ) \cdot \cot 30^\circ}$ 。

【答案】 (1) 解： $\sin 45^\circ \cos 45^\circ + 4 \tan 30^\circ \sin 60^\circ$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 4 \times \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{1}{2} + 2$$

$$= \frac{5}{2}.$$

(2) 解: $\cos 60^\circ - 2\sin^2 45^\circ + \frac{2}{3}\tan^2 60^\circ - \sin 30^\circ$.

$$= \frac{1}{2} - 2 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{2}{3} \times (\sqrt{3})^2 - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} - 1 + 2 - \frac{1}{2}$$

$$= 1.$$

(3) $\frac{\sin 60^\circ + 3\tan 30^\circ \cdot \cos 60^\circ}{(1 - 2\cot 45^\circ) \cdot \cot 30^\circ}$.

【答案】原式 = $\frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + 3 \times \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{1}{2}}{(1 - 2 \times 1) \times \sqrt{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}}{-\sqrt{3}} = -1$

【解析】【分析】求出各特殊角的三角函数值后，进行二次根式化简.

【变式 4-1】计算: $|- \sqrt{8}| + \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} - 4\sin 45^\circ - (\sqrt{2016} - \sqrt{2015})^0$.

【答案】解: $|- \sqrt{8}| + \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} - 4\sin 45^\circ - (\sqrt{2016} - \sqrt{2015})^0$,

$$= 2\sqrt{2} + 3 - 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$$

$$= 2\sqrt{2} + 3 - 2\sqrt{2} - 1$$

$$= 2,$$

故答案为: 2.

【解析】【分析】根据实数的运算顺序，首先计算乘方，开方和乘法，然后从左向右依次计算，求出算式的值即可.

$$2\sin 60^\circ + |\sqrt{3} - 2| + (-1)^{-3} - \sqrt[3]{-8}$$

【答案】解: $2\sin 60^\circ + |\sqrt{3} - 2| + (-1)^{-3} - \sqrt[3]{-8}$

$$2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 - \sqrt{3} - 1 + 2$$

$$= \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} - 1 + 2$$

$$= 3.$$

【解析】【分析】根据特殊角的三角函数值、立方根、负指数幂及绝对值的性质进行化简，然后进行加减运算即可.

11. 计算: $4\cos 45^\circ + (\pi + 2013)^0 - \sqrt{8} + (\frac{1}{6})^{-1}$.

【答案】解: 原式 $= 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 - 2\sqrt{2} + 6$

$= 2\sqrt{2} + 1 - 2\sqrt{2} + 6$

$= 7$.

【解析】【分析】根据 0 指数幂的意义可得 $(\pi + 2013)^0 = 1$, 负整数指数幂的意义可得 $(\frac{1}{6})^{-1} = 6$, $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, 然后合并同类二次根式即可求解.

$\sqrt{3} \cdot \sin 60^\circ - \sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ + \sqrt[3]{8} - (\frac{1}{2})^{-1}$.

【答案】解: 原式 $= \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 - 2 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$

【解析】【分析】考查特殊角的三角函数值.

【变式 4-2】先化简, 再求值: $\frac{a-b}{a+2b} \div \frac{a^2-b^2}{a^2+4ab+4b^2} - 1$, 其中 $a = 2\sin 60^\circ - \tan 45^\circ$, $b = 1$.

【答案】解: 原式 $= \frac{a-b}{a+2b} \times \frac{(a+2b)^2}{(a+b)(a-b)} - 1$

$= \frac{a+2b}{a+b} - 1$

$= \frac{a+2b}{a+b} - \frac{a+b}{a+b}$

$= \frac{b}{a+b}$,

当 $a = 2\sin 60^\circ - \tan 45^\circ = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = \sqrt{3} - 1$, $b = 1$ 时,

原式 $= \frac{1}{\sqrt{3}-1+1} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

【解析】【分析】对待求式的分子、分母进行因式分解, 并将除法化为乘法可得 $\frac{a-b}{a+2b} \times$

$\frac{(a+2b)^2}{(a+b)(a-b)} - 1$, 通过约分即可得到化简结果; 先利用特殊角的三角函数值求出 a 的值, 再将 a 、 b 的值代入化简结果中计算即可解答本题.

锐角三角函数之间的关系

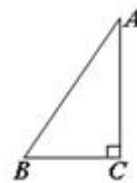
如图所示, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$.

(1) 互余关系: $\sin A = \cos(90^\circ - \angle A) = \cos B$, $\cos A = \sin(90^\circ - \angle A) = \sin B$;

(2)平方关系: $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$;

(3)倒数关系: $\tan A \cdot \tan(90^\circ - \angle A) = 1$ 或 $\tan A = \frac{1}{\tan B}$;

(4)商数关系: $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$.



注意:

锐角三角函数之间的关系式可由锐角三角函数的意义推导得出, 常应用在三角函数的计算中, 计算时巧用这些关系式可使运算简便.

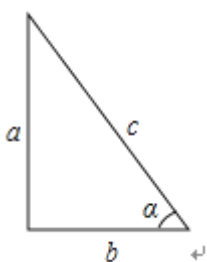
题型 5: 锐角三角函数之间的关系

例题 5. 已知 α 为一锐角, $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, 求 $\cos \alpha$, $\tan \alpha$.

【答案】解: 由 $\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{4}{5}$, 设 $a=4x$, $c=5x$,

则 $b = \sqrt{c^2 - a^2} = 3x$,

故 $\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{3}{5}$, $\tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{4}{3}$.



【解析】【分析】 根据 $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, 设出关于两边的代数表达式, 再根据勾股定理求出第三边长的表达式即可推出 $\cos \alpha$ 的值, 同理可得 $\tan \alpha$ 的值.

【变式 5-1】 已知 $\tan \alpha = \frac{2}{5}$, α 是锐角, 求 $\tan(90^\circ - \alpha)$, $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ 的值.

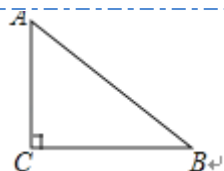
【答案】解: $\because$ 如图所示: $\tan B = \tan \alpha = \frac{2}{5}$,

$\therefore$ 设 $AC=2x$, $BC=5x$, 则 $AB=\sqrt{29}x$,

$\therefore \tan(90^\circ - \alpha) = \frac{5x}{2x} = \frac{5}{2}$,

$\sin \alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{2x}{\sqrt{29}x} = \frac{2\sqrt{29}}{29}$,

$\cos \alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{5x}{\sqrt{29}x} = \frac{5\sqrt{29}}{29}$.



【解析】【分析】根据题意表示出 AC，BC，AB 的长，再利用锐角三角函数定义得出即可．

【变式 5-2】在 Rt△ABC 中， $\angle C=90^\circ$ ， $\sin B=\frac{3}{5}$ ，求 $\cos A$ 的值．

【答案】解：在△ABC 中， $\because \angle C=90^\circ$ ，

$$\therefore \angle A + \angle B = 90^\circ,$$

$$\therefore \cos A = \sin B = \frac{3}{5}.$$

故答案为 $\frac{3}{5}$

【解析】【分析】先根据三角形内角和定理得出 $\angle A + \angle B = 90^\circ$ ，再根据互余两角的三角函数的关系求解．

【变式 5-3】已知 $\alpha + \beta = 90^\circ$ ，且 $\sin \alpha + \cos \beta = \sqrt{3}$ ，求锐角 α ．

【答案】解：由 $\alpha + \beta = 90^\circ$ ，得 $\sin \alpha = \cos \beta$ ．

$$\sin \alpha + \cos \beta = 2\sin \alpha = \sqrt{3},$$

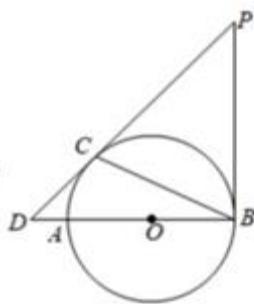
$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\alpha = 60^\circ.$$

【解析】【分析】根据一个角的余弦等于它余角的正弦，可得 $\sin \alpha = \cos \beta$ ，根据特殊角三角函数值，可得答案．

题型 6：锐角三角函数与圆综合

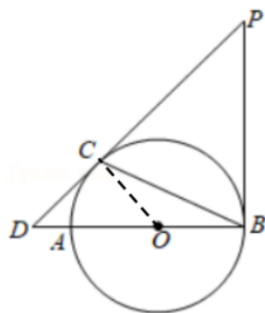
例题 6.如图，AB 是圆 O 的直径，PB，PC 是圆 O 的两条切线，切点分别为 B，C．延长 BA，PC 相交于点 D．



(1) 求证: $\angle CPB=2\angle ABC$.

(2) 设圆 O 的半径为 2, $\sin \angle PDB=\frac{2}{3}$, 求 PC 的长.

【答案】(1) 证明: 如图, 连接 OC



$\because PB, PC$ 是圆 O 的两条切线 $\therefore PC=PB, \angle PCO=\angle PBO=90^\circ, \therefore \angle CPB+\angle BOC=180^\circ$

$\because \angle DOC+\angle BOC=180^\circ \therefore \angle CPB=\angle COD \because OC=OB, \therefore \angle OCB=\angle OBC \therefore \angle COD=2\angle ABC$

$\therefore \angle CPB=2\angle ABC$.

(2) 解: $\because PC$ 是圆 O 的切线,

$\therefore OC \perp CD,$

$\therefore \angle OCD=90^\circ,$

$\because$ 圆 O 的半径为 2, $\sin \angle PDB=\frac{2}{3},$

$\therefore \sin \angle CDO=\frac{OC}{OD}=\frac{2}{3},$

$\therefore OD=3,$

$\therefore DC=\sqrt{DO^2-OC^2}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$

设 $PC=x,$

$\therefore BD^2+PB^2=PD^2$

$\therefore (x+\sqrt{5})^2=x^2+5^2,$

解得 $x=2\sqrt{5},$

$\therefore PC=2\sqrt{5}.$

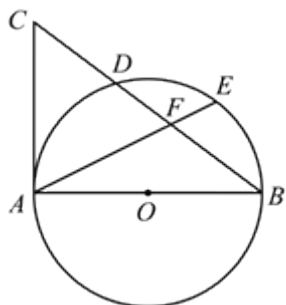
【解析】【分析】(1) 根据切线性质可得 $PC=PB, \angle PCO=\angle PBO=90^\circ$, 再结合

$\angle DOC+\angle BOC=180^\circ$, 从而得到 $\angle CPB=\angle COD$, 再通过 $\angle COD=2\angle ABC$ 等量代换即可求证

$\angle CPB=2\angle ABC$ 成立;

(2) 由切线性质及 $\sin \angle PDB=\frac{2}{3}$, 可得出 $\sin \angle CDO=\frac{OC}{OD}$, 求出 $OD=3$, 设 $PC=x$, 利用勾股定理列出关于 x 的一元二次方程, 解得 x 即可求出 PC .

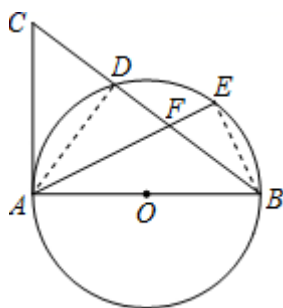
【变式 6-1】如图，AB 是 $\odot O$ 的直径，AC 切 $\odot O$ 于点 A，连接 BC 交 $\odot O$ 于点 D，点 E 是 $\widehat{BD}$ 的中点，连接 AE 交 BC 于点 F.



(1) 求证：AC=CF；

(2) 若 AB=4，AC=3，求 $\angle BAE$ 的正切值.

【答案】(1) 证明：连接 AD, BE,



$\because$ CA 是 $\odot O$ 的切线，

$\therefore \angle CAB=90^\circ$ ，

$\because$ AB 是直径，

$\therefore \angle AEB=90^\circ$ ，

$\because$ E 是弧 BD 的中点，

$\therefore \angle BAE=\angle DAE$.

$\because$ AB 是 $\odot O$ 的直径，

$\therefore \angle ADB=90^\circ$.

$\because \angle CAD+\angle DAB=\angle DAB+\angle B=90^\circ$ ，

$\therefore \angle CAD=\angle B$.

$\because \angle CAD+\angle DAE=\angle B+\angle BAE$ ，

$\therefore \angle CAF=\angle CFA$.

$$\therefore AC=CF.$$

$$(2) \text{ 解: } \because AB=4, AC=3,$$

$$\therefore BC=5.$$

$$\because AC=CF=3,$$

$$\therefore BF=2.$$

$$\because \cos B = \frac{BD}{AB} = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{5},$$

$$\therefore BD = \frac{16}{5}.$$

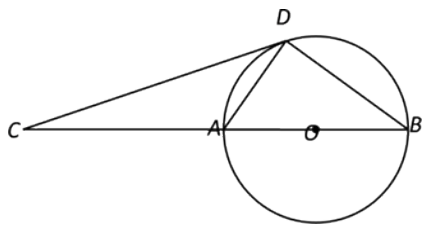
$$\therefore AD = \frac{12}{5}, DF = \frac{6}{5}.$$

$$\therefore \tan \angle BAE = \tan \angle DAE = \frac{1}{2}.$$

【解析】【分析】(1) 连接 AD, BE, 若要证明 $AC=CF$, 则只要证明 $\angle CAE = \angle EFB = \angle AFC$ 即可;

(2) 易证得 $BF=2$, 根据 $\cos \angle ABC = \frac{BD}{AB} = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{5}$, 可求出 BD 的长, 进而得到 AD 和 DF 的长, 然后根据 $\tan \angle BAE = \tan \angle DAE$ 求得即可.

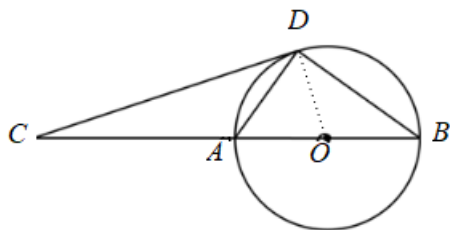
【变式 6-2】如图, AB 为 $\odot O$ 的直径, C 为 BA 延长线上一点, CD 与 $\odot O$ 相切于点 D .



(1) 求证: $\triangle CAD \sim \triangle CDB$;

(2) 若 $\sin C = \frac{1}{3}$, $BD=6$, 求 $\odot O$ 的半径.

【答案】(1) 证明: 连接 OD ,



$\because CD$ 与 $\odot O$ 相切于点 D ,

$$\therefore OD \perp CD,$$

$$\therefore \angle CDO = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ADO + \angle CDA = 90^\circ,$$

$\because AB$ 为 $\odot O$ 的直径,

$$\therefore \angle ADB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ADO + \angle BDO = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CDA = \angle BDO,$$

$$\because OB = OD,$$

$$\therefore \angle B = \angle BDO,$$

$$\therefore \angle B = \angle CDA,$$

$$\because \angle C = \angle C,$$

$$\therefore \triangle CAD \sim \triangle CDB.$$

(2) 解: 设圆的半径为 r ,

$$\because \sin C = \frac{OD}{CO},$$

$$\text{即 } \frac{r}{CO} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore CO = 3r,$$

$$\therefore AC = CO - AO = 3r - r = 2r,$$

$$CB = CO + BO = 3r + r = 4r,$$

$$\because \triangle CAD \sim \triangle CDB,$$

$$\therefore \frac{AD}{BD} = \frac{CD}{BC} = \frac{AC}{CD},$$

$$\therefore CD^2 = AC \cdot BC = 2r \cdot 4r = 8r^2,$$

$$\therefore CD = \sqrt{8r^2} = 2\sqrt{2}r,$$

$$\therefore \frac{AD}{6} = \frac{2\sqrt{2}r}{4r},$$

$$\therefore AD = 3\sqrt{2},$$

$$\therefore AB = \sqrt{AD^2 + BD^2} = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 + 6^2} = 3\sqrt{6},$$

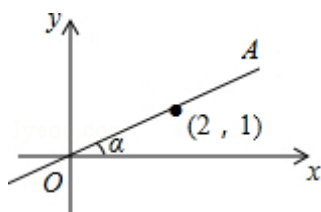
$$\therefore r = \frac{1}{2}AB = \frac{3\sqrt{6}}{2}.$$

【解析】【分析】（1）连接 OD，根据切线的性质可得 $\angle CDO=90^\circ$ ，根据圆周角定理可得 $\angle ADB=90^\circ$ ，由同角的余角相等可得 $\angle CDA=\angle BDO$ ，由等腰三角形的性质可得 $\angle B=\angle BDO$ ，则 $\angle B=\angle CDA$ ，然后根据有两组角对应相等的两个三角形相似进行证明；

（2）设圆的半径为 r ，根据三角函数的概念可得 $CO=3r$ ，则 $AC=CO-AO=2r$ ， $CB=CO+BO=4r$ ，根据相似三角形的性质可得 CD 、 AD ，利用勾股定理可得 AB ，据此求解。

题型 7：锐角三角函数与平面直角坐标系

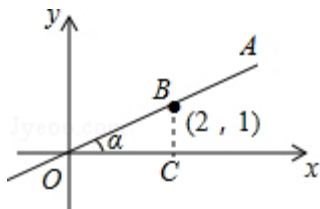
例题 7. 如图，在平面直角坐标系中，直线 OA 过点 $(2, 1)$ ，则 $\tan\alpha$ 的值是（ ）



- A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ B. $\sqrt{5}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 2

【答案】C

【解析】【解答】解：设 $(2, 1)$ 点是 B，作 $BC \perp x$ 轴于点 C。



则 $OC=2$ ， $BC=1$ ，

则 $\tan\alpha = \frac{BC}{OC} = \frac{1}{2}$ 。

故答案为：C。

【分析】根据勾股定理求出 OB，再由 $\tan\alpha = \frac{BC}{OC}$ 代入求解。

【变式 7-1】 点 P 关于 y 轴对称的点的坐标是 $(-\sin 60^\circ, \cos 60^\circ)$ ，则点 P 关于 x 轴的对称点的坐标为（ ）

- A. $(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$ B. $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$
- C. $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$ D. $(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$

【答案】A

【解析】 【分析】利用关于 y 轴对称点的性质，关于 y 轴对称点的坐标特点：横坐标互为相反数，纵坐标不变．即点 P (x, y)关于 y 轴的对称点 P'的坐标是 (-x, y)，得出 P 点坐标，进而得出 P 关于 x 轴的对称点的坐标即可．

【解答】 ∵ 点 P 关于 y 轴对称的点的坐标是 $(-\sin 60^\circ, \cos 60^\circ)$ ，

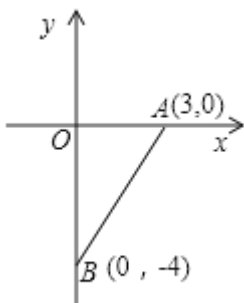
∴ P 点坐标为： $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ ，

则点 P 关于 x 轴的对称点的坐标为 $(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$ ，

故选：A．

【点评】此题主要考查了关于坐标轴对称点的性质，正确把握横纵坐标关系是解题关键．

【变式 7-2】如图，在平面直角坐标系中，已知点 A (3, 0)，点 B (0, -4)，则 $\tan \angle OAB$ 的值为 ()



A. $-\frac{4}{3}$

B. $\frac{3}{4}$

C. $\frac{4}{3}$

D. $-\frac{3}{4}$

【答案】C

【解析】 【解答】由点 A (3, 0)，点 B (0, -4)，

$$\therefore \tan \angle OAB = \frac{OB}{OA} = \frac{4}{3}.$$

故选 C．

【分析】根据点 A, B 的坐标，利用锐角三角函数的定义求解即可得出答案．本题考查了锐角三角函数的定义及坐标与图形的性质，属于基础题，关键是掌握正切值的求法．

【变式 7-3】如图，已知 A 点坐标为 (5, 0)，直线 $y=x+b$ ($b>0$) 与 y 轴交于点 B，连接 AB， $\angle \alpha = 75^\circ$ ，则 b 的值为 ()

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/248063075034006077>