第 3 讲 零点 10 类

【题型一】 水平线法：参变分离

【典例分析】

已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^x-\dfrac{1}{2^x}, x>1,\\ \dfrac{1}{2^x}-2^x, x\le 1,\end{cases}$ 函数 $g(x)=f(x)-m$，则下列说法错误的是（　　）

A．若 $m\le -\dfrac{3}{2}$，则函数 $g(x)$ 无零点　　B．若 $m>-\dfrac{3}{2}$，则函数 $g(x)$ 有零点

C．若 $-\dfrac{3}{2}<m\le \dfrac{3}{2}$，则函数 $g(x)$ 有一个零点　　D．若 $m>\dfrac{3}{2}$，则函数 $g(x)$ 有两个零点

【变式演练】

1.已知函数 $f(x)=\begin{cases}x+x^{-1},\ x>0\\ 4-2^{-x},\ x\le 0\end{cases}$，若函数 $y=f(3x-2)-a$ 恰有三个不同的零点，则实数 a 的取值范围是___

2.已知函数$f(x)=\begin{cases}|\log_2 x|,0<x\le 2\\ \frac{1}{3}x^2-\frac{8}{3}x+5,x>2\end{cases}$，若函数$g(x)=f(x)-m$存在四个不同的零点，则实数$m$的取值范围是________.

3.已知函数$f(x)=\begin{cases}|\log_2 x|,x>0\\ |x+2|-1,x\le 0\end{cases}$,若函数$y=f(x)-m+1$有四个零点,零点从小到大依次为$a$,$b$,$c$,$d$,则$a+b+cd$的值为(　　)

A．2　　B．-2　　C．-3　　D．3

【题型二】 基础图像交点法

【典例分析】

设函数 $f_1(x)=\log_2 x-(\dfrac{1}{2})^x$，　$f_2(x)=\log_{\frac{1}{2}} x-(\dfrac{1}{2})^x$ 的零点分别为 x_1,x_2，则（　　）

A．$0<x_1x_2<1$　　B．$x_1x_2=1$　　C．$1<x_1x_2<2$　　D．$x_1x_2\ge 2$

【变式演练】

1.已知函数 $f(x)=x^2-2ax-2a\ln x(a\in R)$，则下列说法不正确的是（　　）

A. 当 $a<0$ 时，函数 $y=f(x)$ 有零点　　　　B. 若函数 $y=f(x)$ 有零点，则 $a<2$

C. 存在 $a>0$，函数 $y=f(x)$ 有唯一的零点　　　　D. 若函数 $y=f(x)$ 有唯一的零点，则 $a<2$

2.设$f(x)=\{\begin{matrix}4x-4(x\le 1)\\x^2-4x+3(x>1)\end{matrix}$，$g(x)=\log_2 x$，则$h(x)=f(x)-g(x)$的零点个数是__________.

3.已知函数 $f(x)=|x-4|-\frac{k}{x}$ 有三个不同的零点，则 k 的取值范围是__________.

【题型三】 分段函数含参

【典例分析】

已知 $f\left(x\right)=\begin{cases}x+1,x\le a\\x^2-3x+2,x>a\end{cases}$，若 $a=0$，方程 $f\left(x\right)=0$ 的解集是______；若方程 $f\left(x\right)=0$ 的解集中恰有 3 个元素，则 a 的取值范围是______.

【变式演练】

1.已知函数 $f(x)=\begin{cases}|x|,x\le m,\\x^2-2mx+4m,x>m,\end{cases}$ 其中 $m>0$.若存在实数 b,使得关于 x 的方程 $f(x)=b$ 有三个不同的根，则实数 m 可能的值有（　　）

A．2　　　　B．3　　　　C．4　　　　D．5

2.设 $a\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)=\begin{cases}(x-a)^2,x\le 0\\x+\frac{1}{x}+a,x>0\end{cases}$，若函数 $g(x)=f(x)-3$ 有且仅有 3 个零点，则 a 的取值范围是___________.

3.已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^3,x\le a,\\x^2,x>a.\end{cases}$ 若存在实数 b，使函数 $g(x)=f(x)-b$ 有两个零点，则 a 的取值范围是（　　）

A．$(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$　　B．$(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$　　C．$(-\infty,0)$　　D．$(0,1)$

【题型四】 研究直线斜率（临界是切线）寻找交点关系

【典例分析】

已知函数$f(x)=\begin{cases}x^2+\frac{5}{2}x-3, & x\geq -1\\ -\sqrt{1-(x+2)^2}, & -3\leq x<-1\end{cases}$,则函数$g(x)=f(x)-\frac{x}{2}$的零点个数为

A. 1　　　　B. 2　　　　C. 3　　　　D. 4

【变式演练】

1.已知函数$f\left(x\right)=\begin{cases}2, x>m\\ x^2+4x+2, x\leq m\end{cases}$，若方程$f\left(x\right)-x=0$恰有三个根，那么实数$m$的取值范围是（　　）

A. $\left[-1,2\right)$　　　　B. $\left[-1,2\right]$　　　　C. $\left[2,+\infty\right)$　　　　D. $\left(-\infty,-1\right]$

2.已知函数$f\left(x\right)=\begin{cases}\left|x^2+2x\right|, x\leq 0\\ \frac{1}{x}, x>0\end{cases}$，若关于$x$的方程$f\left(x\right)=a\left(x+3\right)$有四个不同的实数根，则实数$a$的取值范围是（　　）

A. $\left(-\infty,4-2\sqrt{3}\right)$　　　　B. $\left(4+2\sqrt{3},+\infty\right)$

C. $\left[0,4-2\sqrt{3}\right]$　　　　D. $\left(0,4-2\sqrt{3}\right)$

3.已函数$f(x)+2=\frac{2}{f(\sqrt{x+1})}$，当$x\in(0,1]$时，$f\left(x\right)=x^2$，若在区间$\left(-1,1\right]$内，$g\left(x\right)=f\left(x\right)-t\left(x+1\right)$有两个不同的零点，则实数$t$的取值范围是______.

【题型五】“放大镜”函数的交点

【典例分析】

已知函数$f\left(x\right)$为偶函数，且当$x>0$时，$f\left(x\right)=\begin{cases}1-x, 0\leq x<1\\ \frac{1}{3}f\left(x-1\right), x\geq 1\end{cases}$，则当$x\in\left(-2,2\right)$时，方程$f\left(x\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}$的根有（　　）个

A. 3　　　　B. 5　　　　C. 7　　　　D. 9

【变式演练】

1.定义在$(0,+\infty)$上的函数$f(x)$满足：①当$x\in[1,3)$时，$f(x)=\begin{cases}x-1, 1\leq x\leq 2,\\ 3-x, 2<x<3,\end{cases}$ ②$f(3x)=3f(x)$.

（i）$f(6)=$ _____；

（ii）若函数$F(x)=f(x)-a$的零点从小到大依次记为$x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$，则当$a\in(1,3)$时，$x_1+x_2+\cdots+x_{2n-1}+x_{2n}=$________.

2.已知函数$f\left(x\right)=\begin{cases}\left|\ln x\right|,0<x\le e\\ f\left(2e-x\right)，e<x<2e\end{cases}$，函数$F\left(x\right)=f\left(x\right)-ax$有 2 个零点，则实数$a$的取值范围是____________.

3.对于函数$f\left(x\right)=\begin{cases}\sin\pi x,x\in\left[0,2\right]\\ \dfrac{1}{2}f\left(x-2\right),x\in\left(2,+\infty\right)\end{cases}$，下列5个结论正确的是__________（把你认为正确的答案全部写上）.（1）任取$x_1,x_2\in\left[0,+\infty\right)$，都有$\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right|\le 2$；

（2）函数$y=f\left(x\right)$在$\left[4,5\right]$上单调递增；

（3）$f\left(x\right)=2kf\left(x+2k\right)\left(K\in N^{+}\right)$，对一切$x\in\left[0,+\infty\right)$恒成立；

（4）函数$y=f\left(x\right)-\ln\left(x-1\right)$有3个零点；

（5）若关于x的方程$f\left(x\right)=m\left(m<0\right)$有且只有两个不同的实根$x_1$，$x_2$，则$x_1+x_2=3$.

【题型六】 函数变换：

【典例分析】

已知函数$f(x)=\begin{cases}x^2-mx,x\ge 0\\ x^2-2x,x<0\end{cases}$，若关于$x$的方程$f(x)+f(-x)+2=0$有且仅有四个互不相等的实根，则实数$m$的取值范围是（　　）

A.（-∞，7]　　B.（6，+∞）　　C.（2 +∞）　　D.[8，+∞）

【变式演练】

1.设函数$f\left(x\right)=\begin{cases}x,-1<x\le 0\\ \dfrac{1}{f\left(x-1\right)}+1,0<x<1\end{cases}$，若方程$f\left(x\right)=2t$在区间$\left(-1,1\right)$内有且仅有两个根，则实数$t$的取值范围是（　　）

A. $\left(-\dfrac{1}{2},+\infty\right)$　　B. $\left(-\infty,0\right)$　　C. $\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$　　D. $\left[-\dfrac{1}{2},0\right)$

2.已知函数$f\left(x\right)=\begin{cases}3-4x,x\le 0,\\ x^2-x+2,x>0,\end{cases}$，若关于$x$的方程$2f\left(x\right)-f\left(-x\right)-k=0$有且只有 3 个实数根，则实数$k$

的取值范围是___________.

3.已知函数$y=f(x)$对于$x\in\mathbf{R}$恒有$f(2-x)+f(x)=2$，若$f(x)$与函数$g(x)=\dfrac{x}{x-1}$的图像的点交为$(x_1,y_1),(x_2,y_2)\dots(x_n,y_n)$，则$(x_1+y_1)+(x_2+y_2)+\dots+(x_n+y_n)=$____________

【题型七】 对数函数绝对值“积定法”

【典例分析】

设函数$f(x)=\begin{cases}|x+2|,x\le 0\\|\log_2x|,x>0\end{cases}$，若关于$x$的方程$f(x)=a$有四个不同的解$x_1$，$x_2$，$x_3$，$x_4$，且$x_1<x_2<x_3<x_4$，则$x_3(x_1+x_2)+\dfrac{1}{x_3^2x_4}$的取值范围是（　　）

A. $(-3,+\infty)$　　B. $(-\infty,3)$　　C. $[-3,3)$　　D. $(-3,3]$

【变式演练】

1.已知x_1，　x_2是方程$e^{-x}+2=|\ln x|$的两个解，则（　　）

A. $0<x_1x_2<\dfrac{1}{e}$　　B. $\dfrac{1}{e}<x_1x_2<1$　　C. $1<x_1x_2<e$　　D. $x_1x_2>e$

2.已知函数$f(x)=\begin{cases}|\log_2x|,x>0\\x^2+2x+2,x\le 0\end{cases}$，方程$f(x)-b=0$有四个不相等的实数根$x_1,x_2,x_3,x_4$，且满足：$x_1<x_2<x_3<x_4$，则$\frac{x_3^2(8+x_4^2)}{x_1x_3+x_2x_3}$的取值范围是（　　）

A．$(-\infty,-2)$　　B．$[-3,-2\sqrt{2}]$　　C．$(-3,-2)$　　D．$(-\infty,-2\sqrt{2}]$

3.已知函数$f(x)=\begin{cases}|\lg x|-a, & 0<x\le 3\\|\lg(6-x)|-a, & 3<x<6\end{cases}$，（其中$a\in R$），若$f(x)$的四个零点从小到大依次为$x_1$，$x_2$，$x_3$，$x_4$，则$x_1x_2+\sum_{i=1}^{4}x_i$的值是（　　）

A．16　　B．13　　C．12　　D．10

【题型八】 高斯函数型

【典例分析】

设 $\left[x\right]$ 表示不超过 x 的最大整数，如 $\left[1\right]=1,\left[0.5\right]=0$，已知函数 $f\left(x\right)=\frac{\left[x\right]}{x}-k(x>0)$，若方程 $f\left(x\right)=0$ 有且仅有3个实根，则实数k的取值范围是（　　）

A.（$\frac{1}{2},\frac{2}{3}$]　B.（$\frac{2}{3},\frac{3}{4}$]　C.（$\frac{3}{4},\frac{4}{5}$]　D.（$\frac{4}{5},\frac{5}{6}$]

【变式演练】

1.高斯是德国著名的数学家，近代数学奠基者之一，享有“数学王子”的称号，设 $x\in\mathbf{R}$，用 $\left[x\right]$ 表示不超过 x 的最大整数，$y=\left[x\right]$ 也被称为“高斯函数”，例如 $\left[2{,}1\right]=2$，$\left[3\right]=3$，$\left[-1{,}5\right]=-2$，设 x_0 为函数 $f\left(x\right)=\log_2 x-\frac{3}{x}-1$ 的零点，则 $\left[x_0\right]=$（　　）.

A．2　　B．3　　C．4　　D．5

2.高斯是德国著名的数学家，近代数学奠基者之一，享有“数学王子”的称号，为了纪念数学家高斯，人们把函数 $y=\left[x\right],x\in\mathbf{R}$ 称为高斯函数，其中 $\left[x\right]$ 表示不超过 x 的最大整数.设 $\left\{x\right\}=x-\left[x\right]$，则函数 $f\left(x\right)=2x\left\{x\right\}-x-1$ 的所有零点之和为（　　）

A．-1　　B．0　　C．1　　D．2

3.高斯函数 $f\left(x\right)=[x]$（$\left[x\right]$ 表示不超过实数 x 的最大整数），若函数 $g\left(x\right)=e^x-e^{-x}-2$ 的零点为 x_0，则 $g\left[f\left(x_0\right)\right]=$（　　）

A．$\frac{1}{e}-e-2$　　B．-2　　C．$e-\frac{1}{e}-2$　　D．$e^2-\frac{1}{e^2}-2$

【题型九】 与三角函数结合

【典例分析】

设 $a\in R$，函数 $f(x)=\begin{cases}\cos\left(2\pi x-2\pi a\right) & x<a\\ x^2-2\left(a+1\right)x+a^2+5 & x\geq a\end{cases}$，若函数 $f(x)$ 在区间（0，+∞）内恰有6个零点，则 a 的取值范围是（　　）

A．（2，$\frac{9}{4}$]∪（$\frac{5}{2}$，$\frac{11}{4}$]　　B．（$\frac{7}{4}$，2]∪（$\frac{5}{2}$，$\frac{11}{4}$]

C．（2，$\frac{9}{4}$]∪[$\frac{11}{4}$，3）　　D．（$\frac{7}{4}$，2）∪[$\frac{11}{4}$，3）

【变式演练】

1.已知定义在R上的奇函数，满足$f(2-x)+f(x)=0$，当$x\in(0,1]$时，$f(x)=-\log_2 x$，若函数$F(x)=f(x)-\sin(\pi x)$，在区间$[-1, m]$上有10个零点，则m的取值范围是（　　）

A．$[3.5, 4)$　　B．$(3.5, 4]$　　C．$(5, 5.5]$　　D．$[5, 5.5)$

2.若函数$f(x)=x^2-a|x|+\dfrac{\cos x}{x^2+1}+a$有且只有一个零点，又点$P(3a,1)$在动直线$m(x-1)+n(y-1)=0$上的投影为点$M$，若点$N(3,3)$，那么$|MN|$的最小值为__________.

3.函数$f(x)=\dfrac{1}{|x-1|}+2\sin[\pi(x-\dfrac{1}{2})]$在$x\in[-3,5]$上的所有零点之和等于______.

【题型十】 借助周期性

【典例分析】

函数$f(x)$是定义在R上的奇函数，且$f(x-1)$为偶函数，当$x\in[0,1]$时，$f(x)=x^{\frac{1}{2}}$，若函数$g(x)=f(x)-x-b$恰有一个零点，则实数b的取值集合是（　　）

A．$\left(2k-\dfrac{1}{4},2k+\dfrac{1}{4}\right)$，$k\in z$　　B．$\left(2k+\dfrac{1}{2},2k+\dfrac{5}{2}\right)$，$k\in z$

C．$\left(4k-\dfrac{1}{4},4k+\dfrac{1}{4}\right)$，$k\in z$　　D．$\left(4k+\dfrac{1}{4},4k+\dfrac{15}{4}\right)$，$k\in z$

【变式演练】

1.定义在**R**上的偶函数$f(x)$满足$f(2-x)=f(x)$，且当$x\in[1,2]$时，$f(x)=\ln x-x+1$，若函数$g(x)=f(x)+mx$有7个零点，则实数m的取值范围为.

A．$\left(\dfrac{1-\ln 2}{8},\dfrac{1-\ln 2}{6}\right)\cup\left(\dfrac{\ln 2-1}{6},\dfrac{\ln 2-1}{8}\right)$　　B．$\left(\dfrac{\ln 2-1}{6},\dfrac{\ln 2-1}{8}\right)$

C．$\left(\dfrac{1-\ln 2}{8},\dfrac{1-\ln 2}{6}\right)$　　D．$\left(\dfrac{1-\ln 2}{8},\dfrac{\ln 2-1}{6}\right)$

2.已知定义域为R的奇函数$f(x)$满足$f(x+1)=f(3-x)$，当$x\in(0,2]$时，$f(x)=-x^2+4$，则函数$y=f(x)-a(a\in R)$在区间$[-4,8]$上的零点个数最多时，所有零点之和为__________.

3.已知函数 $y=f(x)$ 的定义域是 $[0,+\infty)$，满足 $f(x)=\begin{cases}2x & 0\le x<1\\ x^2-4x+5 & 1\le x<3,\\ -2x+8 & 3\le x<4\end{cases}$ 且 $f(x+4)=f(x)+a$，若存在实数 k，使函数 $g(x)=f(x)+k$ 在区间 $[0,2021]$ 上恰好有 2021 个零点，则实数 a 的取值范围为____

【课后练习】

1.已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2+4x-2, x>1\\ \dfrac{1}{2}|x+1|, x\le 1\end{cases}$，函数 $g(x)=f(x)-kx$ 有三个零点，则 k 的取值范围是（　　）

A．$\left(-\dfrac{1}{2},0\right)\cup\left(1,4-2\sqrt{2}\right)$　　B．$\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$

C．$\left(1,4-2\sqrt{2}\right]$　　D．$\left(1,4-2\sqrt{2}\right)$

2.（多选题）已知函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}x+\dfrac{1}{x}-4, x>0\\ \left|\dfrac{x+1}{x}\right|, x<0\end{cases}$，若关于 x 的方程 $f\left(|x|-2\right)=k$ 有 6 个不同的实数根，则实数 k 的值可以是（　　）

A．0　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$\dfrac{2}{3}$　　D．1

3.（多选题）关于 x 的函数 $f\left(x\right)=\left(x^2-1\right)^2-\left|x^2-1\right|+k$，给出下列四个命题，其中是真命题的为（　　）.

A．存在实数 k，使得函数恰有 2 个零点；

B．存在实数 k，使得函数恰有 4 个零点；

C．存在实数 k，使得函数恰有 5 个零点；

D．存在实数 k，使得函数恰有 8 个零点；

4.给出定义：若 $x\in\left(m-\dfrac{1}{2},m+\dfrac{1}{2}\right]$（其中 m 为整数），则 m 叫做与实数 x“亲密的整数”记作 $\{x\}=m$，在此基础上给出下列关于函数 $f(x)=|x-\{x\}|$ 的四个说法：

①函数 $y=f(x)$ 在 $(0,1)$ 是增函数；

②函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{k}{2}(k\in Z)$ 对称；

③函数 $y=f(x)$ 在 $\left(k,k+\frac{1}{2}\right)(k\in Z)$ 上单调递增；

④当 $x\in(0,2)$ 时，函数 $g(x)=f(x)-\left|2x^2-\frac{1}{2}\right|$ 有两个零点.

其中说法正确的序号是__________.

5.已知函数 $f(x)=\frac{x+1+|x-a|}{2}, g(x)=ax+1$，其中 $a>0$，若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图像有两个交点，则 a 的取值范围是_________

6.对于实数 a 和 b，定义运算"$*$"：$a*b=\begin{cases}a^2-ab, & a\le b\\ b^2-ab, & a>b\end{cases}$，设 $f(x)=(2x-1)*(x-1)$，且关于 x 的方程为 $f(x)=m(m\in \mathrm{R})$ 恰有三个互不相等的实数根，则 m 的取值范围是___________.

7.设函数 $f(x)=\begin{cases}|x-2|+\left|x-\frac{1}{2}\right|, & x\ge 0,\\ \left|(x+2)\left(x+\frac{1}{2}\right)\right|, & x<0,\end{cases}$ 则函数 $y=f(x)-x+\frac{1}{2}$ 的零点个数为_______ ；若 $g(x)=kx-\frac{1}{2}$，且函数 $F(x)=f(x)-g(x)$ 有偶数个零点，则实数 k 的取值范围是____________.

8.已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1)=-x^2-4x+1$，函数 $g(x)=\{\begin{matrix}f(x)-4, x\le m\\ x-4, x>m\end{matrix}$ 有两个零点，则 m 的取值范围为__________.

9.设 $f(x), g(x)$ 是定义在 R 上的两个周期函数，$f(x)$ 的周期为 4，$g(x)$ 的周期为 2，且 $f(x)$ 是奇函数.当 $x\in(0,2]$ 时，$f(x)=\sqrt{1-(x-1)^2}$，$g(x)=\begin{cases}k(x+2), 0<x\le 1\\ -\frac{1}{2}, 1<x\le 2\end{cases}$，其中 k>0.若在区间(0，9]上，关于 x 的方程 $f(x)=g(x)$ 有 8 个不同的实数根，则 k 的取值范围是_____.

10.高斯是世界著名的数学家之一，他一生成就极为丰硕仅以他的名字“高斯”命名的成果就多达 110 个，为数学家中之最．对于高斯函数 $y=[x]$，其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，如 $[1.7]=1$，$[-1.2]=-2$，$\{x\}$ 表示实数 x 的非负纯小数，即 $\{x\}=x-[x]$，如 $\{1.7\}=0.7$，$\{-1.2\}=0.8$．若函数 $y=\{x\}-1+\log_a x$（$a>0$，且 $a\ne 1$

）有且仅有3 个不同的零点，则实数a的取值范围是（　　）

A．$(2,3]$　　B．$[2,3)$　　C．$(3,4]$　　D．$[3,4)$

11.（多选题）高斯是德国著名数学家，近代数学奠基者之一，享有“数学王子”称号，他和阿基米德、牛顿并列为世界三大数学家，用其名字命名的“高斯函数”为：设$x\in\mathbf{R}$，用$[x]$表示不超过x的最大整数，则$y=[x]$称为高斯函数，例如$[-2.1]=-3$，$[2.1]=2$.已知函数$f(x)=\sin|x|+|\sin x|$，函数 $g(x)=[f(x)]$，则（　　）

A．函数$g(x)$的值域是$\{0,1,2\}$　　B．函数$g(x)$是周期函数

C．函数$g(x)$的图象关于$x=\frac{\pi}{2}$对称　　D．方程$\frac{\pi}{2}\cdot g(x)=x$只有一个实数根

12.已知函数$f(x)=A\sin\left(\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{2}\right)$，$g(x)=k(x-7)$，$(k>0)$，已知$A=1$时，函数$h(x)=f(x)-g(x)$的所有零点和为21，则当$A=2$时，函数$h(x)=f(x)-g(x)$的所有零点的和为__________.

第 3 讲 零点 10 类

【题型一】 水平线法：参变分离

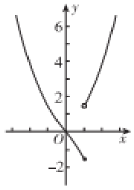
【典例分析】

已知函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}2^x-\dfrac{1}{2^x},x>1,\\ \dfrac{1}{2^x}-2^x,x\le 1,\end{cases}$ 函数 $g\left(x\right)=f\left(x\right)-m$，则下列说法错误的是（　　）

A．若 $m\le -\dfrac{3}{2}$，则函数 $g\left(x\right)$ 无零点　　**B**．若 $m>-\dfrac{3}{2}$，则函数 $g\left(x\right)$ 有零点

C．若 $-\dfrac{3}{2}<m\le \dfrac{3}{2}$，则函数 $g\left(x\right)$ 有一个零点　　**D**．若 $m>\dfrac{3}{2}$，则函数 $g\left(x\right)$ 有两个零点

【答案】A**【解析】**作出函数 $f\left(x\right)$ 的图象如图所示:



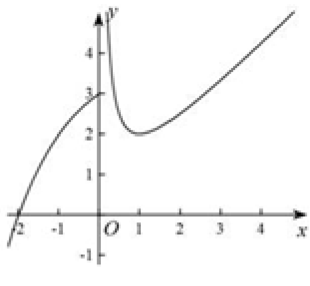
观察可知：当 $m=-\dfrac{3}{2}$ 时，函数 $g\left(x\right)$ 有一个零点，故 A 错误. 故选：A

【变式演练】

1.已知函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}x+x^{-1},\ x>0\\ 4-2^{-x},\ x\le 0\end{cases}$，若函数 $y=f\left(3x-2\right)-a$ 恰有三个不同的零点，则实数 a 的取值范围是___

【答案】$2<a\le 3$.

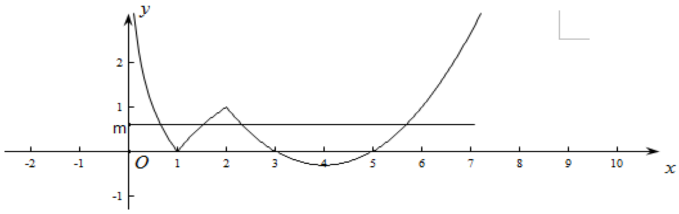
【解析】



函数 $f\left(x\right)$ 当 $x>0$ 时是对勾函数，因为 $x+x^{-1}=x+\dfrac{1}{x}\ge 2\sqrt{x\times \dfrac{1}{x}}=2$，当且仅当 $\begin{cases}x=\dfrac{1}{x}\\ x>0\end{cases}$ 即 $x=1$ 时，取最小值。所以函数最小值为 2，且在 $\left(0,1\right)$ 上为减函数，在 $\left(1,+\infty\right)$ 上为增函数。当 $x\le 0$ 时，$\because y=2^{-x}$ 是减函数，且 $2^{-x}\ge 1$，所以 $y=-2^{-x}$

为增函数，且 $-2^{-x} \leq -1$，所以函数 $f(x)=4-2^{-x}$ 为增函数，且 $f(x) \leq 3$，函数图像如图所示。令 $t=3x-2$，函数 $y=f(3x-2)-a$ 恰有三个不同的零点，可以看成函数 $y=f(t)-a$ 恰有三个不同的零点，函数 $f(t)$ 的图像与直线 $y=a$ 有三个交点。由图像可知 $2<a\leq 3$。

2.已知函数$f(x)=\begin{cases}|\log_2 x|,0<x\leq 2\\ \frac{1}{3}x^2-\frac{8}{3}x+5,x>2\end{cases}$，若函数$g(x)=f(x)-m$存在四个不同的零点，则实数$m$的取值范围是_______.



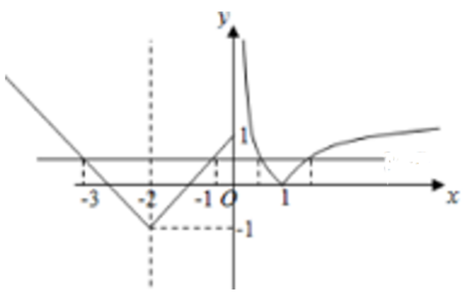
【答案】(0，1)**【解析】**

画出函数$y=f(x)$，与$y=m$的图象，函数$y=f(x)$，与$y=m$的图象的交点个数就是函数函数$g(x)=f(x)-m$的零点个数，因为函数$g(x)=f(x)-m$存在四个不同的零点，所以函数$y=f(x)$，与$y=m$的图象由四个交点，由图可知，要使函数$y=f(x)$，与$y=m$的图象由四个交点，实数m的取值范围是(0，1)，故答案为(0，1).

3.已知函数$f(x)=\begin{cases}|\log_2 x|,x>0\\ |x+2|-1,x\leq 0\end{cases}$,若函数$y=f(x)-m+1$有四个零点,零点从小到大依次为$a,b,c,d$,则$a+b+cd$的值为(　　)

A．2　　**B．** -2　　**C．** -3　　**D．** 3

【答案】C【详解】



作出函数$f(x)=\begin{cases}|\log_2 x|,x>0\\ |x+2|-1,x\leq 0\end{cases}$的图象如图,函数$y=f(x)-m+1$有四个零点，即$y=f(x)$与$y=m-1$的图象有 4 个不同交点，不妨设四个交点横坐标$a,b,c,d$满足$a<b<c<d$,

则，$f(a)=f(b)$，$|a+2|-1=|b+2|-1$,可得$-a-3=b+1$,$a+b=-4$由$f(c)=f(d)$，得$|\log_2 c|=|\log_2 d|$,

则$-\log_2 c=\log_2 d$，可得$\log_2 cd=0$，即$cd=1$，$a+b+cd=-4+1=-3$，故选 C.

【题型二】　基础图像交点法

【典例分析】

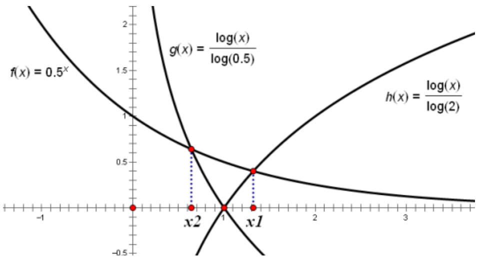
设 函 数 $f_1(x)=\log_2 x-(\frac{1}{2})^x$， $f_2(x)=\log_{\frac{1}{2}} x-(\frac{1}{2})^x$ 的 零 点 分 别 为 x_1,x_2， 则 （ ）

A. $0<x_1x_2<1$ B. $x_1x_2=1$ C. $1<x_1x_2<2$ D. $x_1x_2\geq 2$

【答案】A 因为函数 $f_1(x)=\log_2 x-(\frac{1}{2})^x$， $f_2(x)=\log_{\frac{1}{2}} x-(\frac{1}{2})^x$ 的零点分别为 x_1,x_2，故可得

$\log_2^{x_1}=(\frac{1}{2})^{x_1}$ ---① $\log_{\frac{1}{2}}^{x_2}=(\frac{1}{2})^{x_2}$ --②，如图，显然有 $0<x_2<1<x_2$，故 $x_1x_2>0$，①－②得

$\log_2^{x_1x_2}=(\frac{1}{2})^{x_1}-(\frac{1}{2})^{x_2}<0\Rightarrow x_1x_2<1$ ，选 A。



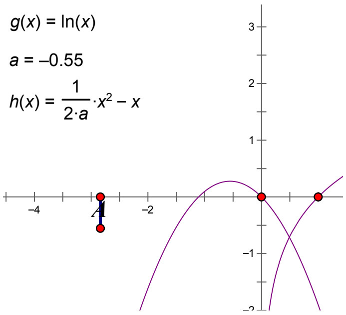
【变式演练】

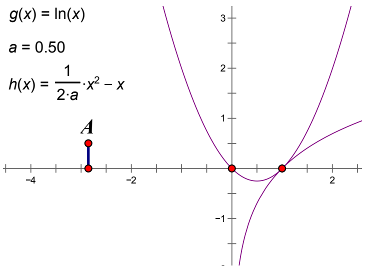
1.已知函数 $f(x)=x^2-2ax-2a\ln x(a\in R)$，则下列说法不正确的是（ ）

A.当 $a<0$ 时，函数 $y=f(x)$ 有零点 **B.若函数 $y=f(x)$ 有零点，则 $a<2$**

C.存在 $a>0$，函数 $y=f(x)$ 有唯一的零点 **D.若函数 $y=f(x)$ 有唯一的零点，则 $a<2$**

【答案】B. 试题分析：令 $f(x)=x^2-2ax-2a\ln x=0$，得 $\frac{1}{2a}x^2-x=\ln x(a\neq 0)$（$a=0$ 时，显然有零点），在同一坐标系内画函数 $g(x)=\frac{1}{2a}x^2-x$ 与 $h(x)=\ln x$ 的图像，可得当 $a<0$ 时，函数 $y=f(x)$ 有唯一零点，故 A 正确；取 $a=2$，画函数 $g(x)=\frac{1}{4}x^2-x$ 与 $h(x)=\ln x$ 的图像，可得它们有交点，故 B 错误，C 正确；当 $a=\frac{1}{2}$ 时，画函数 $g(x)=x^2-x$ 与 $h(x)=\ln x$ 的图像，可得它们有一个交点，故当 $a<0$ 或 $a=\frac{1}{2}$ 时，函数 $y=f(x)$ 有唯一零点，故 D 正确.

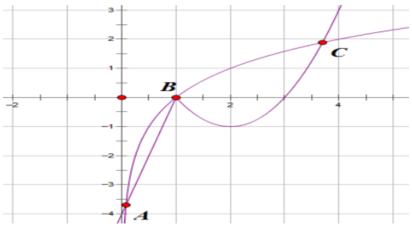




2.设$f(x)=\begin{cases}4x-4(x\le 1)\\ x^2-4x+3(x>1)\end{cases}$，$g(x)=\log_2 x$，则$h(x)=f(x)-g(x)$的零点个数是__________.

【答案】3

依题意，画出两个函数图象如下图所示，由图可知，零点个数为3.



3.已知函数$f(x)=|x-4|-\dfrac{k}{x}$有三个不同的零点，则k的取值范围是__________.

【答案】$(0,4)$

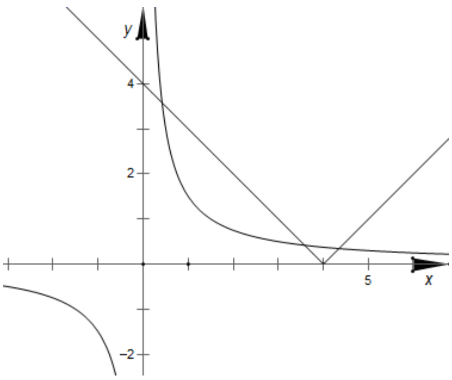
【分析】

函数$f(x)=|x-4|-\dfrac{k}{x}$有三个不同的零点，转化为$y=|x-4|$与$y=\dfrac{k}{x}$交点问题，数形结合即可求解k的取值范围.

【详解】作出$y=|x-4|$与$y=\dfrac{k}{x}$的图象，显然$k\le 0$，不可能存在 3 个交点；$\therefore k>0$，

当$y=\dfrac{k}{x}$与$y=|x-4|$相切时，即$\begin{cases}y=\dfrac{k}{x}\\ y=4-x\end{cases}$只有一个解，那么$\Delta=0$，可得$16-4k=0$，此时$k=4$，

$\therefore$函数$f(x)=|x-4|-\dfrac{k}{x}$有三个不同的零点，则$0<k<4$；故答案为：$(0,4)$.



【题型三】 分段函数含参

【典例分析】

已知 $f\left(x\right)=\begin{cases}x+1,x\le a\\x^2-3x+2,x>a\end{cases}$**，若** $a=0$**，方程** $f\left(x\right)=0$ **的解集是______；若方程** $f\left(x\right)=0$ **的解集中恰有 3 个元素，则** a **的取值范围是______.**

【答案】$\{-1,1,2\}$　　$[-1,1)$

【分析】求出 $a=0$ 时 $f\left(x\right)$ 的解析式，分情况讨论，分别求解方程 $f\left(x\right)=0$ 的根，即可得方程 $f\left(x\right)=0$ 的解集；在同一直角坐标系下作出函数 $y=x+1$ 和 $y=x^2-3x+2$ 的图象，由图象分析即可得 a 的取值范围.

【详解】当 $a=0$ 时，$f\left(x\right)=\begin{cases}x+1,x\le 0\\x^2-3x+2,x>0\end{cases}$，

当 $x\le 0$ 时，$f\left(x\right)=x+1=0$，解得 $x=-1$；

当 $x>0$ 时，$f\left(x\right)=x^2-3x+2=0$，解得 $x=1$ 和 $x=2$.故若 $a=0$，方程 $f\left(x\right)=0$ 的解集是 $\{-1,1,2\}$；

因为 $f\left(x\right)=\begin{cases}x+1,x\le a\\x^2-3x+2,x>a\end{cases}$，则在同一直角坐标系中，作出函数 $y=x+1$ 的图象，如图直线，

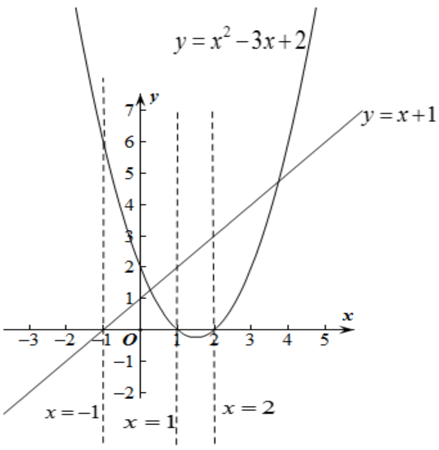
作出函数 $y=x^2-3x+2$ 的图象，如图抛物线，将直线 $x=a$ 从左向右平移，

由图象可得，当 $a<-1$ 或 $1\le a<2$ 时，方程 $f\left(x\right)=0$ 有 2 个解，不符合题意；

当 $-1\le a<1$ 时，方程 $f\left(x\right)=0$ 有 3 个解，符合题意；

当 $a\ge 2$ 时，方程 $f\left(x\right)=0$ 有 1 个解，不符合题意.

综上所述，实数 a 的取值范围为 $[-1,1)$.故答案为：$\{-1,1,2\}$；$[-1,1)$.



【变式演练】

1.已知函数 $f(x)=\begin{cases}|x|,x\le m,\\x^2-2mx+4m,x>m,\end{cases}$ **其中** $m>0$**.若存在实数** b**，使得关于** x **的方程** $f(x)=b$ **有三个不同的根，则实数** m **可能的值有（　　）**

A．2　　B．3　　C．4　　D．5

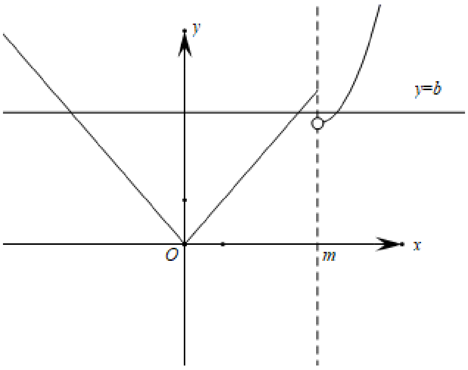
【答案】CD

【分析】

在同一坐标系中，作 $y=f(x)$与 $y=b$ 的图象，利用数形结合法求解.

【详解】

在同一坐标系中，作 $y=f(x)$与 $y=b$ 的图象.



当 $x>m$ 时，$x^2-2mx+4m=(x-m)^2+4m-m^2$，所以要使方程 $f(x)=b$ 有三个不同的根，

则有 $4m-m^2<m$，即 $m^2-3m>0$.又 $m>0$，解得 $m>3$.故选：CD

2.设 $a\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)=\begin{cases}(x-a)^2, x\le 0\\ x+\dfrac{1}{x}+a, x>0\end{cases}$，若函数 $g(x)=f(x)-3$ 有且仅有 3 个零点，则 a 的取值范围是____________.

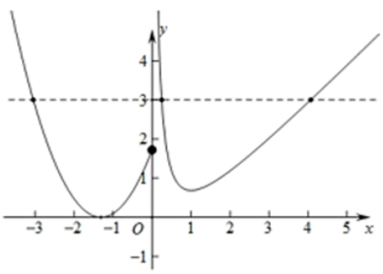
【答案】$(-\sqrt{3},1)$##

【分析】

问题转化为函数 $f(x)$ 与直线 $y=3$ 有三个不同交点，分 $a\le 0, a>0$ 作出函数图象，数形结合即可求解.

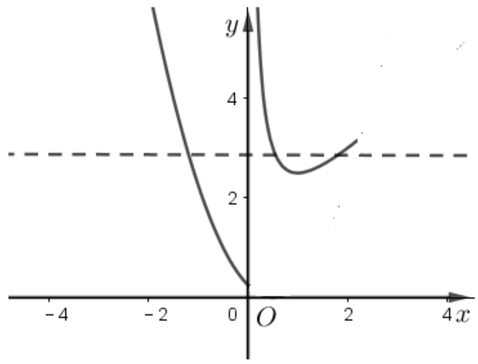
【详解】$\because f(x)=\begin{cases}(x-a)^2, x\le 0\\ x+\dfrac{1}{x}+a, x>0\end{cases}$,若函数 $g(x)=f(x)-3$ 有且仅有 3 个零点,则函数 $f(x)$ 的图象与直线 $y=3$ 有三个不同的交点，$\because y=x+\dfrac{1}{x}+a\ge 2\sqrt{x\cdot\dfrac{1}{x}}+a=2+a$，当且仅当 $x=1$ 时等号成立，

$\therefore$当 $a\le 0$ 时，如图：



$\therefore (0-a)^2<3$ 即可，解得 $-\sqrt{3}<a\le 0$，

$\therefore$当$a>0$时，如图：



$\therefore\begin{cases}2+a<3\\a^2<3\end{cases}$即可，解得$0<a<1$，综上，$-\sqrt{3}<a<1$故答案为：$(-\sqrt{3},1)$

3.已知函数$f(x)=\begin{cases}x^3,x\le a,\\x^2,x>a.\end{cases}$若存在实数$b$，使函数$g(x)=f(x)-b$有两个零点，则$a$的取值范围是（　　）

A. $(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$　　B. $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$　C. $(-\infty,0)$　D. $(0,1)$

【答案】B 由题意可知，函数$g(x)$实为函数$f(x)$向下平移b个单位得到的．所以图象只是在坐标系中位置发生变化，而其形状未发生变化，$g(x)$有两零点，说明$f(x)=b$也存在两个实数根，即存在一定区间，函数的单调性不一致，由此可对a进行分情况讨论，当$a<0$时，$x^3<0,x^2>0$，所以两根不可能异号，但是在$(a,-a)$上x^2的单调性为先减后增，使得$f(x)=b$能够成立；当$0<a<1$时，x^3,x^2均为增函数，且$x^3<x^2$恒成立，故不存在两实数根使得$f(x)=b$成立；当$a>1$时，x^3,x^2均为增函数，但是$a^3>a^2$，即x^3的最高点在x^2的最低点的上方．则必然存在两个实数根使得$f(x)=b$能够成立，综合以上分析应该选B.

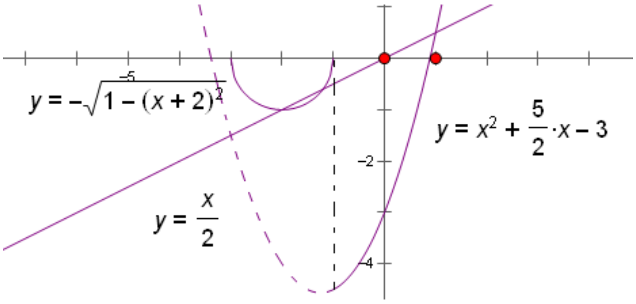
【题型四】　研究直线斜率（临界是切线）寻找交点关系

【典例分析】

已知函数$f(x)=\begin{cases}x^2+\dfrac{5}{2}x-3, & x\ge -1\\-\sqrt{1-(x+2)^2}, & -3\le x<-1\end{cases}$，则函数$g(x)=f(x)-\dfrac{x}{2}$的零点个数为

A. 1　　　　B. 2　　　　C. 3　　　　D. 4

【答案】C 试题分析：函数$g(x)=f(x)-\dfrac{x}{2}$的零点，即方程函数$g(x)=f(x)-\dfrac{x}{2}$=0的实根的个数，也是y=f(x)的图象与y=$\dfrac{x}{2}$交点个数。在同一平面直角坐标系内，画出y=f(x)，y=$\dfrac{x}{2}$的图象，观察知，交点有3个，故选C。



【变式演练】

1.已知函数 $f(x)=\begin{cases}2,x>m\\x^2+4x+2,x\le m\end{cases}$，若方程 $f(x)-x=0$ 恰有三个根，那么实数 m 的取值范围是（　　）

A. $[-1,2)$　　**B.** $[-1,2]$　　**C.** $[2,+\infty)$　　**D.** $(-\infty,-1]$

【答案】A

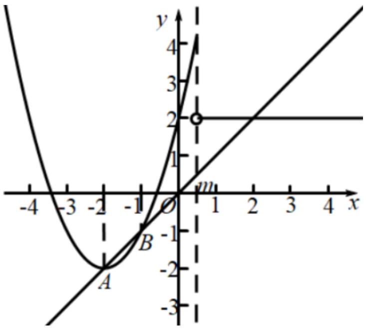
【分析】由题意得，函数 $y=f(x)$ 与函数 $y=x$ 有三个不同的交点，结合图象可得出结果.

解：由题意可得，直线 $y=x$ 与函数 $f(x)=2(x>m)$ 至多有一个交点，而直线 $y=x$ 与函数 $f(x)=x^2+4x+2(x\le m)$ 至多两个交点，函数 $y=f(x)$ 与函数 $y=x$ 有三个不同的交点，

则只需要满足直线 $y=x$ 与函数 $f(x)=2(x>m)$ 有一个交点直线 $y=x$ 与函数 $f(x)=x^2+4x+2(x\le m)$ 有两个交点即可，如图所示，$y=x$ 与函数 $f(x)=x^2+4x+2$ 的图象交点为 $A(-2,-2)$，$B(-1,-1)$，

故有 $m\ge-1$.而当 $m\ge2$ 时，直线 $y=x$ 和射线 $y=2(x>m)$ 无交点，故实数 m 的取值范围是 $[-1,2)$.

故选：A.



2.已知函数 $f(x)=\begin{cases}|x^2+2x|,x\le0\\\frac{1}{x},x>0\end{cases}$，若关于 x 的方程 $f(x)=a(x+3)$ 有四个不同的实数根，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $(-\infty,4-2\sqrt{3})$　　**B.** $(4+2\sqrt{3},+\infty)$

C. $[0,4-2\sqrt{3}]$　　**D.** $(0,4-2\sqrt{3})$

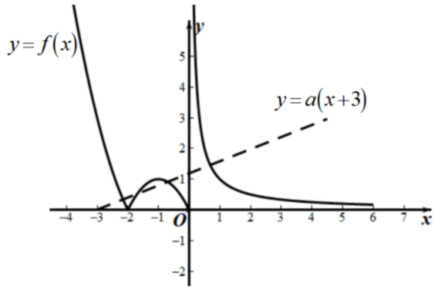
【答案】D

【分析】方程 $f(x)=a(x+3)$ 有四个不同的实数根，即直线 $y=a(x+3)$ 与曲线 $y=f(x)$

，作出函数图象，即转化为$x^2+(2+a)x+3a=0$在$\left(-2,0\right)$有两个不等实根，可得答案.

【详解】设$y=a(x+3)$，该直线恒过点$\left(-3,0\right)$，方程$f(x)=a(x+3)$有四个不同的实数根

如图作出函数$y=f\left(x\right)$的图象，



结合函数图象，则$a>0$，

所以直线$y=a(x+3)$与曲线$y=-x^2-2x,x\in\left(-2,0\right)$有两个不同的公共点，

所以$x^2+(2+a)x+3a=0$在$\left(-2,0\right)$有两个不等实根，令$g\left(x\right)=x^2+(2+a)x+3a$，

实数a满足$\begin{cases}\Delta=\left(2+a\right)^2-12a>0\\-2<-\dfrac{2+a}{2}<0\\g\left(0\right)=3a>0\\g\left(-2\right)=a>0\end{cases}$，解得$0<a<4-2\sqrt{3}$，所以实数$a$的取值范围是$\left(0,4-2\sqrt{3}\right)$.故选：D.

3.已函数$f(x)+2=\dfrac{2}{f(\sqrt{x+1})}$，当$x\in(0,1]$时，$f\left(x\right)=x^2$，若在区间$\left(-1,1\right]$内，$g\left(x\right)=f\left(x\right)-t\left(x+1\right)$有两个不同的零点，则实数$t$的取值范围是______.

【答案】$\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$

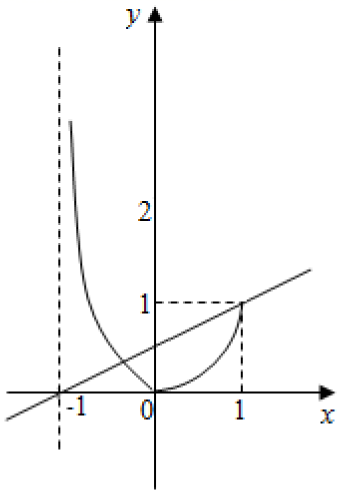
【分析】

由$g(x)=f(x)-t(x+1)=0$得$f(x)=t(x+1)$，分别求出函数$f(x)$的解析式以及两个函数的图象，利用数形结合进行求解即可.

【详解】当$x\in(0,1]$时，$f(x)=x^2$，当$-1<x\leq0$，可得$0<\sqrt{x+1}\leq1$，$f(x)+2=\dfrac{2}{x+1},f(x)=\dfrac{-2x}{x+1}$

可知函数在$x\in(-1,1]$上的解析式为$f(x)=\begin{cases}\dfrac{-2x}{x+1}, & -1<x\leq0\\x^2, & 0<x\leq1\end{cases}$，由$g(x)=f(x)-t(x+1)=0$得$f(x)=t(x+1)$，

可将函数 $f(x)$ 在 $x\in(-1,1]$ 上的大致图象呈现如图：



根据 $y=t(x+1)$ 的几何意义，

x 轴位置和图中直线位置为 $y=t(x+1)$ 表示直线的临界位置，当直线经过点 $(1,1)$，可得 $t=\dfrac{1}{2}$，

因此直线的斜率 t 的取值范围是 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$。故答案为 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$

【题型五】 “放大镜”函数的交点

【典例分析】

已知函数 $f(x)$ 为偶函数，且当 $x>0$ 时，$f(x)=\begin{cases}1-x,0\le x<1\\ \dfrac{1}{3}f(x-1),x\ge 1\end{cases}$，则当 $x\in(-2,2)$ 时，方程 $f(x)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{|x|}$ 的根有（　　）个

A． 3　　**B．** 5　　**C．** 7　　**D．** 9

【答案】 C

【分析】转化为 $y=f(x)$ 与 $g(x)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{|x|}$ 的交点个数，由于两个函数都为偶函数，只研究 $x\in[0,2)$，即得解

【详解】由题意，当 $x>0$ 时，$f(x)=\begin{cases}1-x,0\le x<1\\ \dfrac{1}{3}f(x-1),2>x\ge 1\end{cases}=\begin{cases}1-x,0\le x<1\\ \dfrac{1}{3}(2-x),2>x\ge 1\end{cases}$

方程 $f(x)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{|x|}$ 的根的个数即为 $y=f(x)$ 与 $g(x)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{|x|}$ 的交点的个数

由于 $g(-x)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{|-x|}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{|x|}=g(x)$ 也为偶函数，故只需研究 $x\in[0,2)$ 时，两个函数的交点个数即可

当 $x=0$ 时，$f(0)=g(0)=1$，故 $(0,1)$ 是一个交点；

当 $x=1$ 时，$f(1)=g(1)=\frac{1}{3}$，故 $(1,\frac{1}{3})$ 是一个交点；

当 $x\in(0,1)$ 时，$f(\frac{1}{4})=\frac{3}{4}<g(\frac{1}{4})=(\frac{1}{3})^{\frac{1}{4}}$，$f(\frac{1}{8})=\frac{7}{8}>g(\frac{1}{8})=(\frac{1}{3})^{\frac{1}{8}}$

故 $x\in(\frac{1}{8},\frac{1}{4})$ 时，两个函数有一个交点，由于两个函数都单调递减，且在 $x=0$ 相交，故 $x\in(0,1)$ 时，只有一个交点

当 $x\in(1,2)$ 时，$f(\frac{3}{2})=\frac{1}{6}<g(\frac{3}{2})=(\frac{1}{3})^{\frac{3}{2}}$，$f(\frac{11}{10})=\frac{3}{10}>g(\frac{11}{10})=(\frac{1}{3})^{\frac{11}{10}}$

故 $x\in(\frac{11}{10},\frac{3}{2})$ 时，两个函数有一个交点，由于两个函数都单调递减，且在 $x=1$ 相交，故 $x\in(1,2)$ 时，只有一个交点

综上，两个函数在 $x\in[0,2)$ 有 4 个交点，由函数的对称性 $x\in(-2,2)$ 有 7 个交点故选：C

【变式演练】

1.定义在 $(0,+\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 满足：①当 $x\in[1,3)$ 时，$f(x)=\begin{cases}x-1,1\le x\le 2,\\3-x,2<x<3,\end{cases}$ ② $f(3x)=3f(x)$.

（*i*）$f(6)=$ ______;

（*ii*）若函数 $F(x)=f(x)-a$ 的零点从小到大依次记为 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$，则当 $a\in(1,3)$ 时，$x_1+x_2+\cdots+x_{2n-1}+x_{2n}=$ ________.

【答案】3　　$6(3^n-1)$

【分析】

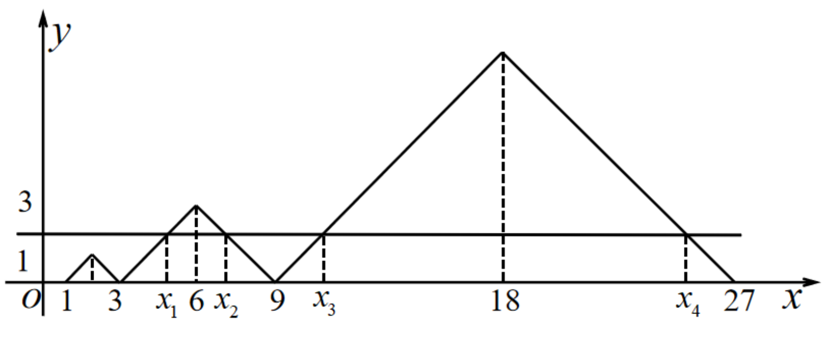
（*i*）由于 $f(3x)=3f(x)$，可得 $f(6)=3f(2)$，根据解析式求出 $f(2)$，代入可得；

（*ii*）在同一坐标系内做出 $y=f(x)$ 和 $y=a$ 的图像，根据图像得到 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$ 的对称关系，把 $x_1+x_2+\cdots+x_{2n-1}+x_{2n}$ 转化为等比数列前 n 项和即可求解.

【详解】

（*i*）因为 $f(3x)=3f(x)$，所以 $f(6)=3f(2)$，当 $x=2$ 时，$f(2)=2-1=1$，所以 $f(6)=3f(2)=3$；

（*ii*）在同一坐标系内做出 $y=f(x)$ 和 $y=a$ 的图像如图所示：



当 $a\in(1,3)$ 时，利用对称性，依次有：$x_1+x_2=2\times6=12$，

$x_3+x_4=2\times18=12$

……

$x_{2n-1}+x_{2n}=2\times2\times3^n$

所以 $x_1+x_2+\cdots+x_{2n-1}+x_{2n}=4\times\left(3+3^2+\cdots+3^n\right)=4\times\dfrac{3\left(1-3^n\right)}{1-3}=6\left(3^n-1\right)$

故答案为：3； $6(3^n-1)$

2.已知函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}\left|\ln x\right|,0<x\le e\\ f\left(2e-x\right)，e<x<2e\end{cases}$，函数 $F\left(x\right)=f\left(x\right)-ax$ 有 2 个零点，则实数 a 的取值范围是____________.

【答案】 $a>\dfrac{1}{e}$ 或 $a=0$

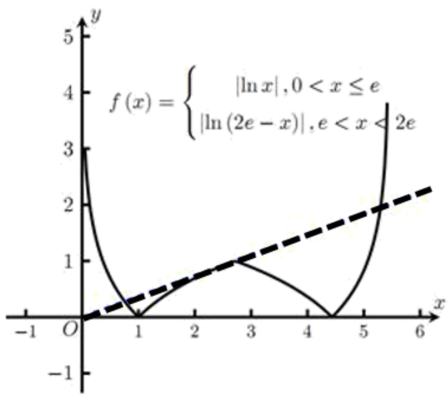
【分析】

本题考查了导数的几何意义，函数的零点与函数图象的关系，

作出 $f\left(x\right)$ 的函数图象，结合函数图象求出当直线 $y=ax$ 与 $f\left(x\right)$ 的图象有两个交点时的斜率范围即可.

【详解】

解：函数 $\begin{cases}\ln\left|x\right|,0<x\le e\\ a=\dfrac{1}{e},e<x<2e\end{cases}$，函数的图象关于 $x=e$ 对称，绘制函数图像如图所示，



函数 $F\left(x\right)=f\left(x\right)-ax$ 有 2 个零点则函数 $f\left(x\right)$ 与函数 $y=ax$ 有 2 个交点，当斜率为零，即 $a=0$ 时，由图像可得有两个交点，则 $a=0$ 成立；

当斜率不为零，即 $a\ne0$ 时，

如图所示，考查临界情况，当直线与函数相切时，设切点坐标为 $\left(x_0，ax_0\right)$，由题意可得：$\begin{cases}\dfrac{1}{x_0}=a\\ \ln x_0=ax_0\end{cases}$,解得 $\begin{cases}x_0=e\\ a=\dfrac{1}{e}\end{cases}$，

则直线与函数相切时斜率为 $\dfrac{1}{e}$，数形结合可知实数 a 的取值范围是 $\left(\dfrac{1}{e},+\infty\right)$.