

新疆乌鲁木齐市第一中学 2024 年数学高三第一学期期末综合测试试题

请考生注意：

1. 请用 2B 铅笔将选择题答案涂填在答题纸相应位置上，请用 0.5 毫米及以上黑色字迹的钢笔或签字笔将主观题的答案写在答题纸相应的答题区内。写在试题卷、草稿纸上均无效。
2. 答题前，认真阅读答题纸上的《注意事项》，按规定答题。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，且 $a_1 + a_6 + a_{11} = 2\pi$ ，则 $\sin(a_3 + a_9) =$ 的值为 ()

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$

2. 设数列 $\{a_n\} (n \in \mathbb{N}^*)$ 的各项均为正数，前 n 项和为 S_n ， $\log_2 a_{n+1} = 1 + \log_2 a_n$ ，且 $a_3 = 4$ ，则 $S_6 =$ ()

- A. 128 B. 65 C. 64 D. 63

3. 已知抛物线 $C: y^2 = 4px (p > 0)$ 的焦点为 F ，过焦点的直线与抛物线分别交于 A 、 B 两点，与 y 轴的正半轴交于点 S ，与准线 l 交于点 T ，且 $|FA| = 2|AS|$ ，则 $\frac{|FB|}{|TS|} =$ ()

- A. $\frac{2}{5}$ B. 2 C. $\frac{7}{2}$ D. 3

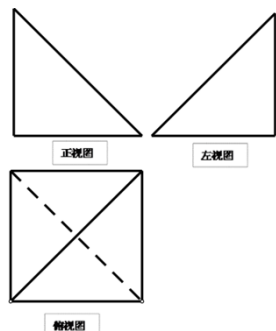
4. 已知集合 $A = \{x | 1 < x \leq 24\}$ ， $B = \left\{x \mid y = \frac{1}{\sqrt{-x^2 + 6x - 5}}\right\}$ ，则 $\partial_A B =$ ()

- A. $\{x | x \geq 5\}$ B. $\{x | 5 < x \leq 24\}$
C. $\{x | x \leq 1 \text{ 或 } x \geq 5\}$ D. $\{x | 5 \leq x \leq 24\}$

5. 已知 $a \in \mathbb{R}$ 若 $(1-ai)(3+2i)$ 为纯虚数，则 a 的值为 ()

- A. $-\frac{3}{2}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $-\frac{2}{3}$ D. $\frac{2}{3}$

6. 某几何体的三视图如图所示，三视图是腰长为 1 的等腰直角三角形和边长为 1 的正方形，则该几何体中最长的棱长为 ()。



- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. 1 D. $\sqrt{6}$

7. 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的离心率是 3, 焦点到渐近线的距离为 $\sqrt{2}$, 则双曲线 C 的焦距为 ()

- A. 3 B. $3\sqrt{2}$ C. 6 D. $6\sqrt{2}$

8. 下列说法正确的是 ()

A. “若 $a > 1$, 则 $a^2 > 1$ ”的否命题是“若 $a > 1$, 则 $a^2 \leq 1$ ”

B. “若 $am^2 < bm^2$, 则 $a < b$ ”的逆命题为真命题

C. $\exists x_0 \in (0, +\infty)$, 使 $3^{x_0} > 4^{x_0}$ 成立

D. “若 $\sin \alpha \neq \frac{1}{2}$, 则 $\alpha \neq \frac{\pi}{6}$ ”是真命题

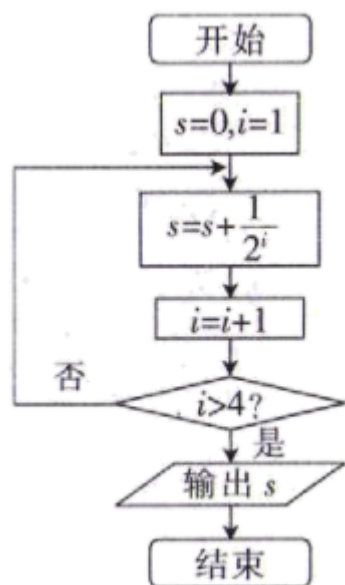
9. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $(2a - b)\cos C = c \cos B$, 则内角 $C =$ ()

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{2}$

10. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 与双曲线 C 有相同的焦点. 设 P 为抛物线与双曲线 C 的一个交点, 且 $\cos \angle PF_1F_2 = \frac{5}{7}$, 则双曲线 C 的离心率为 ()

- A. $\sqrt{2}$ 或 $\sqrt{3}$ B. $\sqrt{2}$ 或 3 C. 2 或 $\sqrt{3}$ D. 2 或 3

11. 执行如图所示的程序框图, 输出的结果为 ()



- A. $\frac{7}{8}$ B. $\frac{15}{8}$ C. $\frac{31}{16}$ D. $\frac{15}{16}$

12. 已知斜率为 k 的直线 l 与抛物线 $C: y^2 = 4x$ 交于 A, B 两点, 线段 AB 的中点为 $M(1, m)$ ($m > 0$), 则斜率 k

的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, 1)$ B. $(-\infty, 1]$ C. $(1, +\infty)$ D. $[1, +\infty)$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知“在 $\triangle ABC$ 中， $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ ”，类比以上正弦定理，“在三棱锥 $A-BCD$ 中，侧棱 AB 与平面 ACD

所成的角为 $\frac{\pi}{3}$ 、与平面 BCD 所成的角为 $\frac{5\pi}{12}$ ，则 $\frac{S_{\triangle BCD}}{S_{\triangle ACD}} =$ _____.

14. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |x+1|, & x \leq 0 \\ 4x^2, & x > 0 \end{cases}$ ，若函数 $y = f(x) - a$ 有 3 个不同的零点 $x_1, x_2, x_3 (x_1 < x_2 < x_3)$ ，则 $x_1 + x_2 + \frac{a}{x_3}$ 的取值

范围是_____.

15. (5 分) 函数 $f(x) = \ln(1-x) + \sqrt{4+3x-x^2}$ 的定义域是_____.

16. 已知椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 与双曲线 $C_2: \frac{x^2}{m^2} - \frac{y^2}{n^2} = 1 (m > 0, n > 0)$ 有相同的焦点 F_1, F_2 ，其中 F_1 为左

焦点. 点 P 为两曲线在第一象限的交点， e_1, e_2 分别为曲线 C_1, C_2 的离心率，若 $\triangle PF_1F_2$ 是以 PF_1 为底边的等腰三角

形，则 $e_2 - e_1$ 的取值范围为_____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

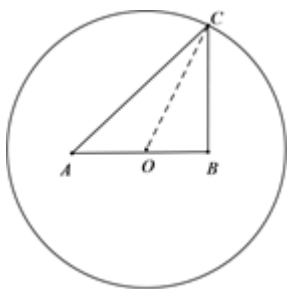
17. (12 分) 某公园准备在一圆形水池里设置两个观景喷泉，观景喷泉的示意图如图所示， A, B 两点为喷泉，圆心 O 为 AB 的中点，其中 $OA = OB = a$ 米，半径 $OC = 10$ 米，市民可位于水池边缘任意一点 C 处观赏。

(1) 若当 $\angle OBC = \frac{2\pi}{3}$ 时， $\sin \angle BCO = \frac{1}{3}$ ，求此时 a 的值；

(2) 设 $y = CA^2 + CB^2$ ，且 $CA^2 + CB^2 \leq 232$ 。

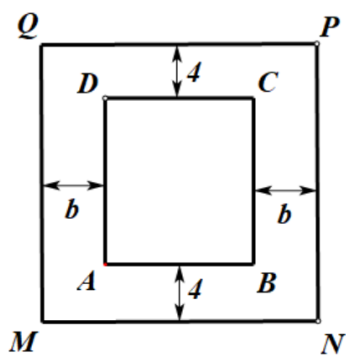
(i) 试将 y 表示为 a 的函数，并求出 a 的取值范围；

(ii) 若同时要求市民在水池边缘任意一点 C 处观赏喷泉时，观赏角度 $\angle ACB$ 的最大值不小于 $\frac{\pi}{6}$ ，试求 A, B 两处喷泉间距离的最小值。



18. (12 分) 一酒企为扩大生产规模，决定新建一个底面为长方形 $MNPQ$

的室内发酵馆，发酵馆内有一个无盖长方体发酵池，其底面为长方形 $ABCD$ (如图所示)，其中 $AD \geq AB$.结合现有的生产规模，设定修建的发酵池容积为 450 米^3 ，深 2 米 .若池底和池壁每平方米的造价分别为 200 元 和 150 元 ，发酵池造价总费用不超过 65400 元



- (1) 求发酵池 AD 边长的范围；
- (2) 在建发酵馆时，发酵池的四周要分别留出两条宽为 4 米 和 $b \text{ 米}$ 的走道（ b 为常数）.问:发酵池的边长如何设计，可使得发酵馆占地面积最小.

19.（12 分）某调查机构对某校学生做了一个是否同意生“二孩”抽样调查，该调查机构从该校随机抽查了 100 名不同性别的学生，调查统计他们是同意父母生“二孩”还是反对父母生“二孩”，现已得知 100 人中同意父母生“二孩”占 60% ，统计情况如下表：

	同意	不同意	合计
男生	a	5	
女生	40	d	
合计			100

- (1) 求 a, d 的值，根据以上数据，能否有 97.5% 的把握认为是否同意父母生“二孩”与性别有关?请说明理由；
- (2) 将上述调查所得的频率视为概率，现在从所有学生中，采用随机抽样的方法抽取 4 位学生进行长期跟踪调查，记被抽取的 4 位学生中持“同意”态度的人数为 X ，求 X 的分布列及数学期望.

附： $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

$P(k^2 \geq k_0)$	0.15	0.100	0.050	0.025	0.010
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635

20.（12 分）在正三棱柱 $ABCA_1B_1C_1$ 中，已知 $AB=1, AA_1=2, E, F, G$ 分别是棱 AA_1, AC 和 A_1C_1 的中点，以

$\{\overset{\curvearrowright}{FA}, \overset{\curvearrowright}{FB}, \overset{\curvearrowright}{FG}\}$ 为正交基底，建立如图所示的空间直角坐标系 $F\text{-}xyz$.

$$\therefore \sin(a_3 + a_9) = \sin \frac{4\pi}{3} = \sin \left(\pi + \frac{\pi}{3} \right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

故选：B.

【点睛】

本题考查等差数列的下标和公式的应用，涉及三角函数求值，属于基础题.

2、D

【解析】

根据 $\log_2 a_{n+1} = 1 + \log_2 a_n$ ，得到 $\log_2 a_{n+1} = \log_2 2a_n$ ，即 $a_{n+1} = 2a_n$ ，由等比数列的定义知数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，然后再利用前 n 项和公式求 S_6 .

【详解】

因为 $\log_2 a_{n+1} = 1 + \log_2 a_n$ ，

所以 $\log_2 a_{n+1} = \log_2 2a_n$ ，

所以 $a_{n+1} = 2a_n$ ，

所以数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，

又因为 $a_3 = 4$ ，

所以 $a_1 = \frac{a_3}{q^2} = \frac{4}{4} = 1$ ，

$$S_6 = \frac{a_1(1-q^6)}{1-q} = \frac{1 \times (1-2^6)}{1-2} = 63.$$

故选：D

【点睛】

本题主要考查等比数列的定义及等比数列的前 n 项和公式，还考查了运算求解的能力，属于中档题.

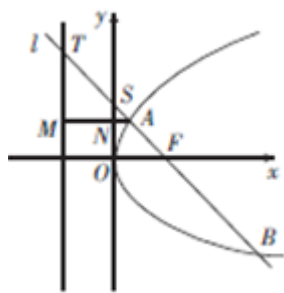
3、B

【解析】

过点 A 作准线的垂线，垂足为 M ，与 y 轴交于点 N ，由 $|FA| = 2|AS|$ 和抛物线的定义可求得 $|TS|$ ，利用抛物线的性质 $\frac{1}{|AF|} + \frac{1}{|BF|} = \frac{2}{2p}$ 可构造方程求得 $|BF|$ ，进而求得结果.

【详解】

过点 A 作准线的垂线，垂足为 M ， AM 与 y 轴交于点 N ，



由抛物线解析式知： $F(p, 0)$ ，准线方程为 $x = -p$ 。

$$\because |FA| = 2|AS|, \therefore \frac{|SA|}{|SF|} = \frac{1}{3}, \therefore |AN| = \frac{1}{3}|OF| = \frac{p}{3}, \therefore |AM| = \frac{4}{3}p,$$

由抛物线定义知： $|AF| = |AM| = \frac{4}{3}p$ ， $\therefore |AS| = \frac{1}{2}|AF| = \frac{2}{3}p$ ， $\therefore |SF| = 2p$ ，

$$\therefore |TS| = |SF| = 2p.$$

由抛物线性质 $\frac{1}{|AF|} + \frac{1}{|BF|} = \frac{2}{2p} = \frac{1}{p}$ 得： $\frac{3}{4p} + \frac{1}{|BF|} = \frac{1}{p}$ ，解得： $|BF| = 4p$ ，

$$\therefore \frac{|FB|}{|TS|} = \frac{4p}{2p} = 2.$$

故选： B。

【点睛】

本题考查抛物线定义与几何性质的应用，关键是熟练掌握抛物线的定义和焦半径所满足的等式。

4、 D

【解析】

首先求出集合 B，再根据补集的定义计算可得；

【详解】

解： $\because -x^2 + 6x - 5 > 0$ ，解得 $1 < x < 5$

$$\therefore B = \{x | 1 < x < 5\}, \therefore \complement_A B = \{x | 5 \leq x \leq 24\}.$$

故选： D

【点睛】

本题考查补集的概念及运算，一元二次不等式的解法，属于基础题。

5、 A

【解析】

根据复数的乘法运算法则化简可得 $3+2a+(2-3a)i$ ，根据纯虚数的概念可得结果。

【详解】

由题可知原式为 $3+2a+(2-3a)i$ ，该复数为纯虚数，

$$\text{所以 } \begin{cases} 3+2a=0 \\ 2-3a \neq 0 \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{3}{2}.$$

故选：A

【点睛】

本题考查复数的运算和复数的分类，属基础题.

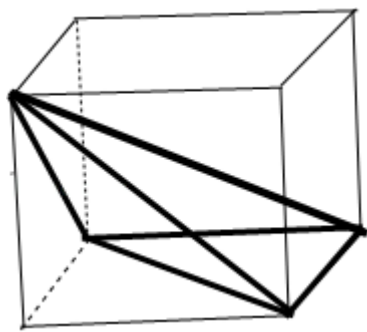
6、B

【解析】

首先由三视图还原几何体，进一步求出几何体的棱长.

【详解】

解：根据三视图还原几何体如图所示，



所以，该四棱锥体的最长的棱长为 $l = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$.

故选：B.

【点睛】

本题主要考查由三视图还原几何体，考查运算能力和推理能力，属于基础题.

7、A

【解析】

根据焦点到渐近线的距离，可得 b ，然后根据 $b^2 = c^2 - a^2$, $e = \frac{c}{a}$ ，可得结果.

【详解】

由题可知：双曲线的渐近线方程为 $bx \pm ay = 0$

取右焦点 $F(c, 0)$ ，一条渐近线 $l: bx - ay = 0$

则点 F 到 l 的距离为 $\frac{|bc|}{\sqrt{b^2 + a^2}} = \sqrt{2}$ ，由 $b^2 + a^2 = c^2$

所以 $b = \sqrt{2}$ ，则 $c^2 - a^2 = 2$

$$\text{又 } \frac{c}{a} = 3 \Rightarrow \frac{c^2}{a^2} = 9 \Rightarrow a^2 = \frac{c^2}{9}$$

$$\text{所以 } c^2 - \frac{c^2}{9} = 2 \Rightarrow c = \frac{3}{2}$$

所以焦距为： $2c = 3$

故选：A

【点睛】

本题考查双曲线渐近线方程，以及 a, b, c, e 之间的关系，识记常用的结论：焦点到渐近线的距离为 b ，属基础题.

8、D

【解析】

选项 A，否命题为“若 $a \leq 1$ ，则 $a^2 \leq 1$ ”，故 A 不正确.

选项 B，逆命题为“若 $a < b$ ，则 $am^2 < bm^2$ ”，为假命题，故 B 不正确.

选项 C，由题意知对 $\forall x \in (0, +\infty)$ ，都有 $3^x < 4^x$ ，故 C 不正确.

选项 D，命题的逆否命题“若 $\alpha = \frac{\pi}{6}$ ，则 $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ ”为真命题，故“若 $\sin \alpha \neq \frac{1}{2}$ ，则 $\alpha \neq \frac{\pi}{6}$ ”是真命题，所以 D 正确.

选 D.

9、C

【解析】

由正弦定理化边为角，由三角函数恒等变换可得.

【详解】

$$\because (2a - b) \cos C = c \cos B, \text{ 由正弦定理可得 } (2 \sin A - \sin B) \cos C = \sin C \cos B,$$

$$\therefore 2 \sin A \cos C = \sin B \cos C + \sin C \cos B = \sin(B + C) = \sin A,$$

$$\text{三角形中 } \sin A \neq 0, \therefore \cos C = \frac{1}{2}, \therefore C = \frac{\pi}{3}.$$

故选：C.

【点睛】

本题考查正弦定理，考查两角和的正弦公式和诱导公式，掌握正弦定理的边角互化是解题关键.

10、D

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/248073021007006051>