专题 7.4　期末复习之解答压轴题十四大题型总结

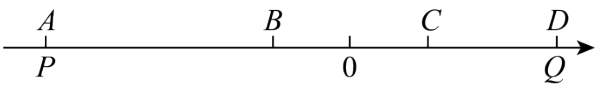
【北师大版】

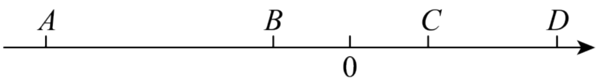
题型梳理

举一反三

【题型 1　数轴上的动点定值问题】

【例 1】（2023 上·四川成都·七年级校考期末）已知A,B,C,D四点在数轴上的位置如图所示，它们对应的数分别为a,b,c,d，且$|b|=|c|=6$，$AB=\frac{3}{2}BC=\frac{9}{5}CD$．动点$P,Q$同时分别从点$A,D$出发，相向而行，点$P$的运动速度为每秒 4 个单位长度，点$Q$的运动速度为每秒 2 个单位长度，线段$BC$所在部分为“交换区”，规则为：点$P$从点$B$进入“交换区”，其运动速度变为点$Q$原来的运动速度，点$Q$从点$C$进入“交换区”，其运动速度变为点$P$原来的运动速度，出“交换区”之后都分别以各自原来的运动速度继续前行，设运动的时间为t秒．





（备用图）

(1)分别求a，d的值；

(2)当P,Q两点相遇时，求t的值及相遇点在数轴上所对应的数；

(3)当点P在点Q的左侧且满足$BP=CQ$时，求t的值．

【答案】(1)-24，16

(2)当P,Q两点相遇时，$t=\frac{41}{6}$，相遇点在数轴上所对应的数为$-\frac{4}{3}$

(3)t的值为 4 或$\frac{19}{4}$或$\frac{11}{2}$

【分析】（1）由$|b|=|c|=6$，且如图点B，点C分别在原点两侧，可求$b=-6$，$c=6$，则$BC=12$，由$AB=\frac{3}{2}BC=\frac{9}{5}CD$，可得$AB=18$，$CD=10$，然后求$a$，$d$的值即可；

（2）由题意得，点P从A到B需$\frac{18}{4}=\frac{9}{2}$秒，点Q从D到C需要$\frac{10}{2}=5$秒，即P与Q在线段BC上相遇，依题意得，$18+2\left(t-\frac{9}{2}\right)+4(t-5)+10=40$，计算求解，然后求相遇点在数轴上所对应的数即可；

（3）分当点P在A，B间，点Q在C，D间时，即$0<t<\frac{9}{2}$时，当点P在B，C间，点Q在C，D间时，即$\frac{9}{2}<t<5$时，当点P、Q都在B，C间，且在相遇前，即$5\le t<\frac{41}{6}$时，三种情况求解即可．

【详解】（1）解：$\because|b|=|c|=6$，且如图点B，点C分别在原点两侧，

$\therefore b=-6$，$c=6$，

$\therefore BC=12$，

$\because AB=\frac{3}{2}BC=\frac{9}{5}CD$，

$\therefore AB=\frac{3}{2}\times 12=\frac{9}{5}CD$，

解得，$AB=18$，$CD=10$，

$\therefore a=-6-18=-24$，$d=6+10=16$，

$\therefore a$，d的值为-24，16；

（2）解：由题意得，点P从A到B需$\frac{18}{4}=\frac{9}{2}$秒，点Q从D到C需要$\frac{10}{2}=5$秒，

$\therefore P$与Q在线段BC上相遇，

$\because AB=18$，$CD=10$，$AD=18+12+10=40$，

依题意得，$18+2\left(t-\frac{9}{2}\right)+4(t-5)+10=40$，

解得，$t=\frac{41}{6}$，

∴相遇点在数轴上所对应的数为$-24+18+2\left(\frac{41}{6}-\frac{9}{2}\right)=-\frac{4}{3}$，

∴当P,Q两点相遇时，$t=\frac{41}{6}$，相遇点在数轴上所对应的数为$-\frac{4}{3}$；

（3）解：当点P在A，B间，点Q在C，D间时，即$0<t<\frac{9}{2}$时，点P对应的数为$-24+4t$，点Q对应的数为$16-2t$，

∴$BP=-6-(-24+4t)=18-4t$，$CQ=16-2t-6=10-2t$，

∵$BP=CQ$，

∴$18-4t=10-2t$，

解得，$t=4$；

当点P在B，C间，点Q在C，D间时，即$\frac{9}{2}<t<5$时，点P对应的数为$2t-15$，点Q对应的数为$16-2t$，

∴$BP=2t-9$，$CQ=10-2t$，

∵$BP=CQ$，

∴$2t-9=10-2t$，

解得，$t=\frac{19}{4}$；

当点P、Q都在B，C间，且在相遇前，即$5\le t<\frac{41}{6}$时，点P对应的数为$2t-15$，点Q对应的数为$-4t+26$，

∴$BP=2t-9$，$CQ=4t-20$，

∵$BP=CQ$，

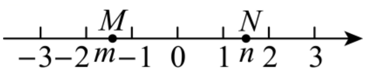
∴$2t-9=4t-20$，

解得，$t=\frac{11}{2}$；

综上所述，t的值为 4 或$\frac{19}{4}$或$\frac{11}{2}$.

【点睛】本题考查了数轴上两点之间的距离，绝对值，用数轴上的点表示有理数，一元一次方程的应用，数轴上的动点问题．熟练掌握数轴上两点之间的距离，根据题意正确的列方程是解题的关键．

【变式 1-1】（2023 上·浙江·七年级统考期末）【阅读】如图，在数轴上点M表示的数为m，点N表示的数为n，点M到点N的距离记为MN．我们规定：MN的大小可以用位于右边的点表示的数减去左边的点表示的数表示，即$MN=n-m$．



【应用】请用上面的知识解答下面的问题：

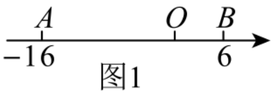


图1

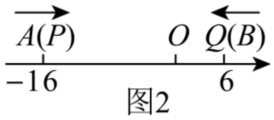


图2

如图1，A、B两点在数轴上对应的数分别为-16和6.

(1)求A、B两点之间的距离；

(2)若在数轴上存在一点P，使得$AP=\frac{1}{3}PB$，求点P表示的数；

(3)如图2，现有动点P、Q，若点P从点A出发，以每秒4个单位长度的速度沿数轴向右运动，同时点Q从点B出发，以每秒2个单位长度的速度沿数轴向左运动，当点Q到达原点O后立即以每秒3个单位长度的速度沿数轴向右运动，求：当$OP=4OQ$时的运动时间t的值.

【答案】(1)22；

(2)点P表示的数为-10.5或-27；

(3)2或$\frac{13}{4}$.

【分析】（1）根据两点间的距离公式即可求出A、B两点之间的距离；

（2）分三种情况：①点P在B点右边时，②点在线段AB上；③点在线段A的左边时，根据$AP=\frac{1}{3}PB$求解即可；

（3）根据点Q的运动方向分两种情况：①当$t\le 3$时，点Q从点B出发，以每秒2个单位长度的速度沿数轴向左运动；

②当$t>3$时，点Q从原点开始以每秒3个单位长度的速度沿数轴向右运动，根据$OP=4OQ$列出关于t的方程，解方程即可.

【详解】（1）根据题可得：$6-(-16)=22$，

（2）①当P在B点右边时，不存在，

②当P在AB之间时，$22\div 4=5.5$，$-16+5.5=-10.5$，

∴点P表示的数为-10.5，

③当P在A点左边时，$22\div 2=11$，$-16-11=-27$，

∴点P表示的数为-27，

∴点P表示的数为-10.5或-27；

（3）当$0<t\le 3$时，

$16-4t=4(6-2t)$，解得$t=2$，

当$3<t\leq4$时，

$16-4t-4\times3(-3)$，解得$t=\frac{13}{4}$ ，

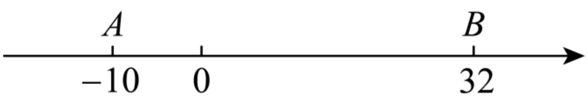
当$t>4$时，

$4t-16=4\times3(t-3)$，解得$t=2.5$（舍去），

$\therefore t$的值为：2或$\frac{13}{4}$.

【点睛】此题考查了一元一次方程的应用，数轴，结合动点考查了两点间的距离，以及路程、速度与时间关系的应用，理解题意，找到相等关系进行正确分类是解题的关键.

【变式 1-2】（2023 上·湖北武汉·七年级统考期末）如图，A、B 两点在数轴上对应的有理数分别是 a、b，且$|a+10|+|b-32|=0$.



(1)请直接写出：$a=$ ______，$b=$ ______；

(2)动点 M 从 A 点出发以 2 单位/秒的速度向左运动，动点 N 从 B 点出发以 4 单位/秒的速度向左运动，动点 T 从原点 O 出发以 a 单位/秒的速度向左运动（$a>0$），三个动点同时出发，设运动时间为t秒.

①请用含 a 或t的式子表示：

动点 M 对应的数为______，

动点 N 对应的数为______，

动点 T 对应的数为______；

②若在运动过程中，正好先后两次出现$TM=TN$的情况，且两次间隔的时间为10秒，求 a 的值；

③若在运动过程中，恰好只有一次$TM=TN$的情况，请直接写出满足条件 a 的值或 a 的取值范围是______.

【答案】(1)-10，32

(2)①$-10-2t$，$32-4t$，$-at$②2 或$\frac{82}{31}$③$a\geq4$

【分析】（1）根据绝对值的非负性即可作答；

（2）①向左运动用减法运算，向右运动用加法运算：则动点 M 对应的数为$-10-2t$，动点 N 对应的数为$32-4t$，动点 T 对应的数为$-at$；

②当 M 与 N 重合时，$-10-2t=32-4t$，$t=21$，根据两次间隔的时间为10秒，可知另一次$TM=TN$是在$t=11$或$t=31$时；可得$11a-12=-11a+32$，或$-31a+92=31a-72$，即可解得答案；

③$t=21$时，M 与 N 重合，此时$TM=TN$，根据在运动过程中，恰好只有一次$TM=TN$的情况，故当$t=21$时，T 在 M 的左侧，有$-21a<-10-2\times21$，当$t>21$时，T 不能是MN的中点，可知 N 不能追上 T，有$a\geq4$.

【详解】（1）解：$\because|a+10|+|b-32|=0$，

$\therefore a+10=0$，$b-32=0$，

解得$a=-10$，$b=32$；

（2）解：①根据题意，因为动点 M 从 A 点出发以 2 单位/秒的速度向左运动，

所以动点 M 对应的数为$-10-2t$，

因为动点 N 从 B 点出发以 4 单位/秒的速度向左运动，

所以动点 N 对应的数为$32-4t$，

因为动点 T 从原点 O 出发以 a 单位/秒的速度向左运动

动点 T 对应的数为$-at$；

②当 M 与 N 重合时，$TM=TN$，

$\therefore -10-2t=32-4t$

解得$t=21$，

$\because$两次间隔的时间为10秒，

$\therefore$另一次$TM=TN$是在$t=11$或$t=31$时；

当$t=11$时，

则$TN=32-4\times11-(-11a)=11a-12$，$TM=-11a-(-10-2\times11)=-11a+32$，

$\therefore 11a-12=-11a+32$，

解得$a=2$；

当$t=31$时，

则$TN=-31a-(32-4\times31)=-31a+92$，$TM=-10-2\times31-(-31a)=31a-72$，

$\therefore -31a+92=31a-72$，

解得$a=\frac{82}{31}$，

$\therefore a$ 的值为 2 或$\frac{82}{31}$；

③由②知，当$t=21$时，M 与 N 重合，此时$TM=TN$，

∵在运动过程中，恰好只有一次$TM=TN$的情况，

∴当$t\leq21$时，T 不能是MN的中点，即当$t=21$时，T 在 M 的左侧，

∴$-21a<-10-2\times21$，

解得$a>\frac{52}{21}$；

当$t>21$时，T 也不能是MN的中点，即 N 不能追上 T，

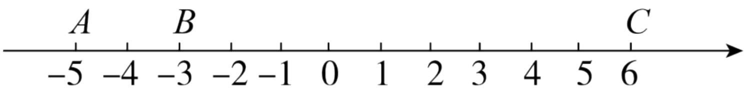
故 T 的速度要大于等于 N 的速度，

∴$a\geq4$，

综上所述，$a\geq4$.

【点睛】本题考查一元一次方程的应用，列代数式表示式，数轴上表示有理数，数轴上的动点问题，绝对值的非负性，化简绝对值，熟练运用分类讨论思想，解题的关键是读懂题意，用含 t 的代数式表示动点所表示的数.

【变式 1-3】（2023 上·江苏苏州·七年级统考期末）已知，数轴上有三个点A，B，C，它们的起始位置表示的数分别是-5，-3，6，如图所示.



(1)若将点B从起始位置开始沿数轴向右移动，使得B，C两点之间的距离与A，B两点之间的距离相等，则须将点B向右移动______单位；

(2)若点A从起始位置开始，以每秒 1 个单位长度的速度沿数轴向左匀速运动，同时，点B也从起始位置开始，以每秒 2 个单位长度的速度沿数轴向右匀速运动，点A与点B之间的距离表示为AB，点A与点C之间的距离表示为AC，点B与点C之间的距离表示为AC，设运动的时间为t（秒）.

①求$AC-BC$（用含t的代数式表示）；

②若点C也与点A，B同时从起始位置开始运动，且点C以每秒 3 个单位长度的速度沿数轴向右匀速运动，试问：是否存在一个常数k，使得$k\cdot AB-2BC$的值不随运动时间t（秒）的变化而改变？若存在，请求出常数k，并求此时$k\cdot AB-2BC$的值；若不存在，请说明理由.

【答案】(1)3.5

(2)①当$0<t\leq4.5$时，$AC-BC=3t+2$，当$t>4.5$时，$AC-BC=20-t$；②$k=\frac{2}{3}$，原式$=-\frac{50}{3}$

【分析】本题考查数轴上的动点问题，数轴上两点间距离公式，一元一次方程的应用等，用含 t 的代数式表示各动点所在位置表示的数是解题的关键.

（1）设点B向右移动了 x 个单位，根据两点间距离公式表示出AB和BC，列等式解方程即可；

（2）①分点 B 在点 C 左侧与右侧两种情况，用含 t 的代数式表示出AC和BC，作差即可；②用含 t 的代数式表示出AB和BC，进而表示出$k\cdot AB-2BC$，令 t 的系数为 0 可求出常数k的值.

【详解】（1）解：当B，C两点之间的距离与A，B两点之间的距离相等时，B在A和C之间，

设点B向右移动了 x 个单位，则移动后所在位置表示的数为$(-3+x)$，

则$(-3+x)-(-5)=6-(-3+x)$，

解得$x=3.5$，

故答案为：3.5；

（2）解：①运动的时间为t（秒）时，点A表示的数为$(-5-t)$，点B表示的数为$(-3+2t)$，

当点 B 与点 C 重合时，$-3+2t=6$，

解得$t=4.5$，

当$0<t\leq 4.5$时，点 B 在点 C 左侧，$AC=6-(-5-t)=11+t$，$BC=6-(-3+2t)=9-2t$，

$\therefore AC-BC=11+t-(9-2t)=3t+2$；

当$t>4.5$时，点 B 在点 C 右侧，$AC=6-(-5-t)=11+t$，$BC=-3+2t-6=2t-9$，

$\therefore AC-BC=11+t-(2t-9)=20-t$；

②运动的时间为t（秒）时，点C表示的数为$(6+3t)$，

$AB=(-3+2t)-(-5-t)=3t+2$，$BC=6+3t-(-3+2t)=t+9$，

$\therefore k\cdot AB-2BC=k(3t+2)-2(t+9)=(3k-2)t+2k-18$，

令$3k-2=0$，得$k=\frac{2}{3}$，

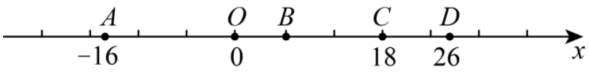
$\therefore$ 当$k=\frac{2}{3}$时，$k\cdot AB-2BC$的值不随运动时间t（秒）的变化而改变，

$\therefore \frac{2}{3}\cdot AB-2BC=2\times\frac{2}{3}-18=-\frac{50}{3}$.

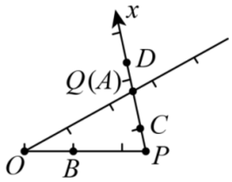
【题型 2　数轴上的折叠问题】

【例 2】（2023 上·江苏盐城·七年级景山中学校考期末）如图①，在数轴上，点 O 为坐标原点，点 A、B、C、D 表示的数分别是-16、6、18、26．动点 P、Q 同时出发，动点 P 从点 B 出发，沿数轴以每秒 4 个单位的速度向点 C 运动，当点 P 运动到点 C 后，立即按原来的速度返回．动点 Q 从点 C 出发，沿数轴以每秒 2 个单位的速度向终点 D 运动．当点 Q 到达点 D 时，点 P 也停止运动，设点 P 的运动时间为 t（$t>0$）

秒．



图①



图②

(1)点 A 与原点 O 的距离是_．

(2)点 P 从点 B 向点 C 运动过程中，点 P 与原点 O 的距离是_（用含 t 的代数式表示）．

(3)点 P 从点 B 向点 C 运动过程中，当点 P 与原点 O 的距离恰好等于点 P 与点 Q 的距离时，求 t 的值．

(4)在点 P、Q 的整个运动过程中，若将数轴在点 O 和点 P 处各折一下，使点 Q 与点 A 重合，如图②所示，当所构成的三角形OPQ中恰好有两条边相等时，求 t 的值．

【答案】(1)16

(2)$6+4t$

(3)$t=1$

(4)1，2.5，3.5

【分析】（1）由点 A 表示的数是-16，根据两点之间的距离公式即可求解；

（2）由$OB=6$，$BP=4t$，再根据$OP=OB+BP$即可求解；

（3）可求得当点 P 与点 C 重合时，$t=3$，所以当点 P 从点 B 向点 C 运动时，$0\le t\le 3$，此时点 P 表示的数是$6+4t$，点 Q 表示的数是$18+2t$，且点 Q 在点 P 右侧，再根据两点间的距离公式代入即可求解；

（4）可求得当点 Q 与点 D 重合时，$t=4$，当$3<t\le 4$时，点 P 表示的数是$30-4t$,则$OP=30-4t$，$PQ=6t-12$再分六种情况讨论，一是当$0\le t\le 3$，且$OP=OA$时，则$6+4t=16$；二是当$3<t\le 4$，且$OP=OA$时，则$30-4t=16$；三是当$0\le t\le 3$，且$OP=PQ$时，由（3）得$t=1$；四是当$3<t\le 4$，且$OP=PQ$时，则$30-4t=6t-12$；五是当$0\le t\le 3$，且$PQ=OA$时，则$12-2t=16$；六是当$3<t\le 4$，且$PQ=OA$时，则$6t-12=16$，解方程求出相应的符合题意的 t 值即可．

【详解】（1）解：∵点 A 表示的数是-16，

$\therefore OA=|-16-0|=16$，

故答案为：16．

（2）解：∵点 B 表示的数是 6，

$\therefore OB=|6-0|=6$，

$\because BP=4t$，

$\therefore OP=OB+BP=6+4t$，

故答案为：$6+4t$.

（3）解：当点 P 与点 C 重合时，则$6+4t=18$，

解得$t=3$，

$\therefore$ 当点 P 从点 B 向点 C 运动时，$0\le t\le 3$，

$\because$ 点 P 表示的数是$6+4t$，点 Q 表示的数是$18+2t$，且点 Q 在点 P 右侧，

$\therefore OP=6+4t$，$PQ=18+2t-(6+4t)=12-2t$，

由$OP=PQ$，得$6+4t=12-2t$，

解得：$t=1$.

（4）解：当点 Q 与点 D 重合时，则$18+2t=26$，

解得$t=4$，

当$3<t\le 4$时，点 P 表示的数是$18-4(t-3)$，即$30-4t$，

$\therefore OP=30-4t$，$PQ=18+2t-(30-4t)=6t-12$，

当$0\le t\le 3$，且$OP=OA$时，则$6+4t=16$，

解得：$t=2.5$；

当$3<t\le 4$，且$OP=OA$时，则$30-4t=16$，

解得：$t=3.5$；

当$0\le t\le 3$，且$OP=PQ$时，由（3）得$t=1$；

当$3<t\le 4$，且$OP=PQ$时，则$30-4t=6t-12$，

解得：$t=\frac{21}{5}$，不符合题意，舍去；

当$0\le t\le 3$，且$PQ=OA$时，由（3）得$PQ=12-2t$，

$\therefore 12-2t=16$，

解得$t=-2$，不符合题意，舍去；

当$3<t\le 4$，且$PQ=OA$时，则$6t-12=16$，

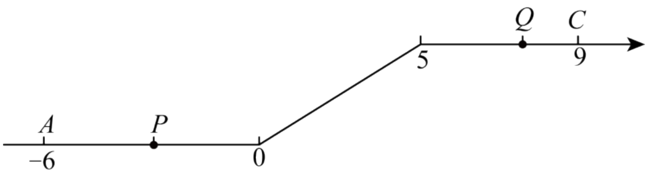
解得：$t=\frac{14}{3}$，不符合题意，舍去，

综上所述，t 的值是1，2.5，3.5.

【点睛】此题重点考查等腰三角形的性质、数轴与绝对值、一元一次方程的解法、列一元一次方程解应用

题、数形结合与分类讨论数学思想的运用等知识与方法，正确地用代数式表示点 P、点 Q 所对应的数是解题的关键．

【变式 2-1】（2023 上·湖北武汉·七年级武汉外国语学校（武汉实验外国语学校）校考期末）如图，将一条数轴在原点 O 和点 B 处各折一下，得到一条"折线数轴"，图中，点 A 表示的数为-6，点 B 表示的数为 5，点 C 表示为 9，我们称点 A 和点 C 在数轴上相距 15 个长度单位，动点 P 从点 A 出发，以 2 单位/秒的速度沿着"折线数轴"的正方向运动，从点 O 运动到点 B 期间速度变为原来的一半，之后立刻恢复原速；同时，动点 Q 从点 C 出发，以 1 单位/秒的速度沿着折线数轴的负方向运动，从点 B 运动到点 O 期间速度变为原来的两倍，之后也立刻恢复原速．设运动的时间为 t 秒，则：



(1)动点 P 从点 A 运动至点 O 需要_____秒，从点 O 运动至点 B 需要_____秒，从点 B 运动至点 C 需要_____秒．

(2)若 P，Q 两点在点 M 处相遇，则点 M 在折线数轴上所表示的数是多少？

(3)请直接写出当 t 为何值时，P、O 两点在数轴上相距的长度与 Q、B 两点在数轴上相距的长度相等．

【答案】(1)3，5，2

(2)点 M 在折线数轴上所表示的数是$\frac{7}{3}$；

(3)当$t=2$，3.5，5，9.5时秒，$OP=BQ$.

【分析】（1）利用路程除以速度求解即可得到答案；

（2）先判断相遇时间大于 5 秒，再利用相遇时两点在O，B上的路程和为 5，再列方程求解即可；

（3）分四种情况讨论：①当点 P 在AO上，点 Q 在CB上时；②当点 P 在OB上时，点 Q 在CB上时；③当点 P 在OB上时，点 Q 在OB上时；④当点 P 在BC上时，点 Q 在OA上时，再列方程求解即可．

【详解】（1）解：动点 P 从点 A 运动至点 O 需要$[0-(-6)]\div 2=3$秒，

从点 O 运动至点 B 需要$5\div 1=5$秒，

从点 B 运动至点 C 需要$(9-5)\div 2=2$秒

故答案为：3，5，2；

（2）解：由题意可得相遇时间$t>5$，

$\therefore (t-3)+2(t-4)=5$，

解得$t=\frac{16}{3}$，

$\therefore \frac{16}{3}-3=\frac{7}{3}$

∴点 M 在折线数轴上所表示的数是$\frac{7}{3}$；

（3）解：①当点 P 在AO上，点 Q 在CB上时，$OP=6-2t$，$BQ=4-t$，

$\because OP=BQ$，

$\therefore 6-2t=4-t$，

解得$t=2$；

②当点 P 在OB上时，点 Q 在CB上时，$OP=t-3$，$BQ=4-t$，

$\because OP=BQ$，

$\therefore t-3=4-t$，

解得$t=3.5$；

③当点 P 在OB上时，点 Q 在OB上时，$OP=t-3$，$BQ=2(t-4)$，

$\because OP=BQ$，

$\therefore t-3=2(t-4)$，

解得$t=5$；

④当点 P 在BC上时，点 Q 在OA上时，$OP=5+2(t-8)$，$BQ=5+(t-6.5)$，

$\because OP=BQ$，

$\therefore 5+2(t-8)=5+(t-6.5)$，

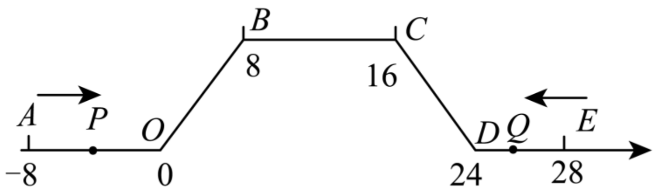
解得$t=9.5$；

综上：当$t=2$或3.5，5，9.5时秒，$OP=BQ$.

【点睛】本题考查的是数轴上的动点问题，数轴上两点之间的距离，一元一次方程的应用，清晰的分类讨论是解本题的关键.

【变式 2-2】（2023 下·广东梅州·七年级校考开学考试）如图将一条数轴在原点 O，点 B，点 C，点 D 处各折一下，得到一条“折线数轴”．图中点 A 表示-8，点 B 表示 8，点 C 表示 16，点 D 表示 24，点 E 表示 28，我们称点 A 和点 E 在数轴上相距 36 个长度单位．动点 P 从点 A 出发，以 4 单位/秒的速度沿着“折线数轴”的正方向运动，同时，动点 Q 从点 E 出发，以 2 单位/秒的速度沿着数轴的负方向运动，两点上坡时速度均变为初始速度的一半，下坡时速度均变为初始速度的两倍，平地则保持初始速度不变．当点 P 运动至点 E

时则两点停止运动，设运动的时间为 t 秒．问：



(1)动点 P 从点 A 运动至 E 点需要______秒，此时点 Q 对应的点是______；

(2)P，Q 两点在点 M 处相遇，求出相遇点 M 所对应的数是多少？

(3)求当 t 为何值时，P，B 两点在数轴上相距的长度与 Q，D 两点在数轴上相距的长度相等．

【答案】(1)10，C

(2)点 M 所对应的数为$17\frac{7}{9}$

(3)当$t=\frac{14}{3}$或$\frac{22}{3}$秒时，P，B 两点在数轴上相距的长度与 Q，D 两点在数轴上相距的长度相等

【分析】（1）依据动点 P 在各段运行的距离除以相应运行的速度算出各段运行的时间，然后相加即可算出动点 P 从点 A 运动至 E 点需要的时间共为 10 秒．然后再计算动点 Q 在 10 秒内运行到什么位置．

（2）分析相遇点所在路段在 C—D 段，当点 P 运动到 C 点时与 Q 点相距 2 个长度单位，则可算出点 P 从 C 点运动到 M 点所需的时间为$\frac{2}{9}$秒，则点 M 对应的数为$16+\frac{2}{9}\times 8=17\frac{7}{9}$.

（3）分段讨论PB与QD在数轴上的长度相等时的各种情况即可．

【详解】（1）由题意可知，动点 P 在AO、BC、DE段的速度均为 4 单位/秒，在OB段的速度为 2 单位/秒，在CD段的速度为 8 单位/秒，

$AO=OB=BC=CD=8$，$DE=4$，

∴动点 P 从点 A 运动至 E 点需要的时间为$t=8\div 4+8\div 2+8\div 4+8\div 8+4\div 4=2+4+2+1+1=10$（秒），

∵动点 Q 从点 E 出发，以 2 单位/秒的速度沿着数轴的负方向运动，在DE段的速度为 2 单位/秒，CD段的速度为 1 单位/秒，

∴动点 Q 从点 E 运动到点 D 需要$4\div 2=2$（秒），从点 D 运动到点 C 需要$8\div 1=8$（秒），

∴此时点 Q 对应的点是 C；

故答案为：10，C；

（2）由（1）可知，P，Q 两点在 M 处相遇时，点 M 在$C-D-E$段，

动点 P 由点 A 到点 C 点用时为$8\div 4+8\div 2+8\div 4=8$（秒），

动点 Q 从点 E 到点 D 用时为$4\div 2=2$（秒），

$\because (8-2)\times\frac{1}{2}\times 2=6$，

$\therefore$当动点 P 到达点 C 时，点 Q 与点 C 的距离$8-6=2$，

$\because \frac{2}{8+1}=\frac{2}{9}$（秒），

$\therefore$此时 P、Q 两点再运动$\frac{2}{9}$秒在点 M 处相遇，

$\therefore$点 M 所对应的数$16+\frac{2}{9}\times 8=17\frac{7}{9}$；

（3）①当点 P 在OA段时，点 Q 在DE段，此时PB大于 8，QD小于 4，不符合题意；

②当点 P 在OB段时，点 Q 在CD段，

若$PB=QD$，则$OB-(t-2)\times 2=PB$，$QD=(t-2)\times 1$，

$\therefore 8-2t+4=t-2$，

解得：$t=\frac{14}{3}$；

③当点 P 在BC段时，点 Q 在CD段，

$PB=(t-6)\times 4$，$QD=(t-2)\times 1$，

$\therefore 4t-24=t-2$，

解得：$t=\frac{22}{3}$；

④当点 P 在CD段或DE段时，PB大于 8，QD小于 8，不符合题意.

综上所述，当$t=\frac{14}{3}$或$\frac{22}{3}$秒时，P，B 两点在数轴上相距的长度与 Q，D 两点在数轴上相距的长度相等.

【点睛】本题考查了一元一次方程的应用，解题的关键是读懂题意，找到等量关系，列出方程.

【变式 2-3】（2023 上·江苏苏州·七年级校考期末）如图1，已知点A、B、C、D在数轴上对应的数分别是a、b、c、24，其中a、b满足$(a+12)^2+|b-8|=0$，点C到原点距离是点B到原点距离的2倍.

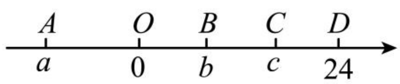


图1

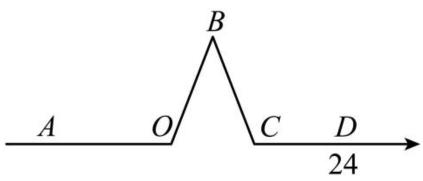


图2

(1)填空：$a=$ ______，$b=$ ______，$c=$ ______；

(2)如图1，若点A、B、C分别同时以每秒4个单位长度、1个单位长度和$m(m>4)$个单位长度的速度匀速向左运动，假设经过t秒后，点A与点D之间的距离表示为AD.

①t为何值时，$AD=3BD$？

②若$AB-\frac{3}{2}AC$的值始终保持不变，求m的值：

(3)如图2，将数轴在原点O、点B和点C处各折一下，得到一条"折线数轴"．动点P从点A出发．以每秒3个单位长度的速度沿"折线数轴"的正方向匀速运动至点D，同时，动点Q从点D出发以每秒4个单位长度沿着"折线数轴"的负方向变速运动，该点在平地保持初始速度不变，上坡时速度变为初始速度的一半，下坡时速度变为初始速度的两倍，设运动时间为t秒．若P、Q两点在点M处相遇，则点M表示的数为______．

【答案】(1)-12，8，16

(2)①$t=12$，②$m=6$

(3)$\frac{72}{11}$

【分析】（1）由$(a+12)^2+|b-8|=0$可得：$a+12=0$，$b-8=0$，从而可求出a、b，再根据点C到原点距离是点B到原点距离的2倍，可求出c；

（2）①把AD，BD用含有t的式子表达，根据$AD=3BD$列出关于t的方程即可求解；

②先把AB、AC的长度分别用含有t的式子表达，然后再用含有t的式子表达出$AB-\frac{3}{2}AC$，由$AB-\frac{3}{2}AC$的值始终保持不变，可令$t=0$，$t=1$分别得出$AB-\frac{3}{2}AC$的值，最后列出关于m的一元一次方程即可求解；

（3）先由题意分别计算Q点运动到点C、B、O三点时的t值，再分类讨论在CD、BC、OB上相遇的t值是否符合题意即可．

【详解】（1）解：∵ $(a+12)^2+|b-8|=0$，

∴ $a+12=0$，$b-8=0$，

∴解得：$a=-12$，$b=8$，

∵点C到原点距离是点B到原点距离的2倍，$OB=8$，

∴ $OC=2OB=2\times 8=16$，

∴ $c=16$，

故答案为：-12，8，16；

（2）解：①由（1）可知，$a=-12$，$b=8$，$c=16$，

∴点A向左平移对应的点的数是$(-12-4t)$，点B向左平移对应的点的数是$(8-t)$，点C向左平移对应的点的数是$(16-mt)$，

∴ $AD=24-(-12-4t)=36+4t$，$BD=24-(8-t)=16+t$，

$\because\ AD=3BD$，

$\therefore\ 36+4t=3(16+t)$，

$\therefore\ t=12$；

②已知点A以每秒4个单位长度向左运动，B以每秒1个单位长度向左运动，C以每秒$m(m>4)$个单位长度向左运动，

$\because\ AB=(8-t)-(-12-4t)=20+3t$，$AC=|(16-mt)-(-12-4t)|=|28-(m-4)t|$，

$\therefore\ AB-\frac{3}{2}AC=20+3t-\frac{3}{2}|(m-4)t-28|$，

第一种情况：当$(m-4)t\geq 28$时，$AB-\frac{3}{2}AC=20+3t-\frac{3}{2}[(m-4)t-28]=62+9t-\frac{3}{2}mt$，

令$t=0$时，$AB-\frac{3}{2}AC=62$；令$t=1$时，$AB-\frac{3}{2}AC=71-\frac{3}{2}m$；

$\because\ AB-\frac{3}{2}AC$的值始终保持不变，

$\therefore\ 71-\frac{3}{2}m=62$，

$\therefore\ m=6$；

第二种情况：当$(m-4)t<28$时，$AB-\frac{3}{2}AC=20+3t+\frac{3}{2}[(m-4)t-28]=\frac{3}{2}mt-3t-22$，

令$t=0$时，$AB-\frac{3}{2}AC=-22$；令$t=1$时，$AB-\frac{3}{2}AC=\frac{3}{2}m-25$；

$\because\ AB-\frac{3}{2}AC$的值始终保持不变，

$\therefore\frac{3}{2}m-25=-22$，

解得，$m=2$；

$\because m>4$，

$\therefore m=2$不符合题意，舍去，

$\therefore m=6$．

（3）解：点A表示的数为-12，以每秒3个单位长度的速度沿正方向运动至点D，

$\therefore$移动后的数表示为：$(-12+3t)$，当点A移动至点D时，$AD=24-(-12)=36$，

$\therefore t=16(s)$，

根据题意可知$CD=8$、$BC=8$、$OB=8$，

$\therefore$当Q点运动到点C时，$t=\frac{8}{4}=2$；运动到点B时，$t=\frac{8}{4}+\frac{8}{2}=6$，运动到点$O$时，$t=\frac{8}{4}+\frac{8}{2}+\frac{8}{8}=7$，

①P点、Q点在CD上相遇，

则$3t+4t=36$，$t=\frac{36}{5}$，

$\because\frac{36}{5}>2$，

$\therefore t=\frac{36}{5}$不符合题意；

②P点、Q点在BC上相遇，

则$3t+2(t-2)+8=36$，

$\therefore\ t=\frac{32}{5}$，

$\because\frac{32}{5}>6$，

$\therefore t=\frac{32}{5}$不符合题意；

③P点、Q点在OB上相遇，

则$3t+16+8(t-6)=36$，$t=\frac{68}{11}$，

$\because\frac{68}{11}<7$，符合题意，

$\therefore$点M表示的数为：$-12+3t=-12+3\times\frac{68}{11}=\frac{72}{11}$，

$\therefore$点M表示的数为$\frac{72}{11}$，

故答案为：$\frac{72}{11}$.

【点睛】本题考查了一元一次方程，数轴上的动点问题，如何表示线段的长度，绝对值的非负性，解题的关键是读懂题意，找到等量关系并列出方程，分类讨论，还需注意运动过程中速度的变化.

【题型3　绝对值中的最值问题】

【例3】（2023上·河南周口·七年级统考期末）（1）探索材料1（填空）：

数轴上表示数m和数n的两点之间的距离等于$|m-n|$. 例如数轴上表示数2和5的两点距离为$|2-5|=$______；数轴上表示数3和-1的两点距离为$|3-(-1)|=$_；$|x+4|$的意义可理解为数轴上表示数_和_这两点的距离；

（2）探索材料2（填空）：

①如图1，在工厂的一条流水线上有两个加工点A和B，要在流水线上设一个材料供应点P往两个加工点输送材料，材料供应点P应设在才能使P到A的距离与P到B的距离之和最小？

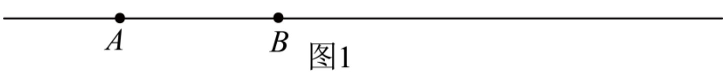


图1

②如图2，在工厂的一条流水线上有三个加工点A，B，C，要在流水线上设一个材料供应点P往三个加工

点输送材料，材料供应点 P 应设在才能使 P 到 A，B，C 三点的距离之和最小？

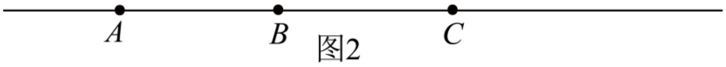


图2

③如图 3，在工厂的一条流水线上有四个加工点 A，B，C，D，要在流水线上设一个材料供应点 P 往四个加工点输送材料，材料供应点 P 应设在才能使 P 到 A，B，C，D 四点的距离之和最小？

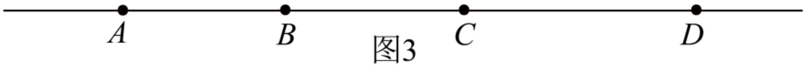


图3

（3）结论应用（填空）：

①代数式$|x+3|+|x-4|$的最小值是______，此时 x 的范围是_______；

②代数式$|x+6|+|x+3|+|x-2|$的最小值是_______，此时 x 的值为______；

③代数式$|x+7|+|x+4|+|x-2|+|x-5|$的最小值是______，此时 x 的范围是______.

【答案】（1）$3,4,x,-4$；（2）①点 A、点 B 之间；②点 B；③点 C、点 B 之间；（3）①$7$;$-3\le x\le 4$；②8，-3；③$18,-4\le x\le 2$

【分析】（1）根据材料 1 填空，直接写出答案；

（2）根据材料 2 填空，分情况讨论点P的位置，得出P到其他点的距离之和最小；

（3）根据问题（2）得出的结论填空即可.

【详解】解：（1）$|2-5|=3$，

$|3-(-1)|=4$,

$|x+4|=|x-(-4)|$, $|x+4|$的意义可理解为数轴上表示数 x 和-4这两点的距离；

故答案为：$3,4,x,-4$.

（2）①当点P在点A左边，

$PA+PB=2AP+AB$,

当点P在点A、点B之间，

$PA+PB=AB$,

当点P在点B右边，

$PA+PB=2PB+AB$.

$\therefore$当点P在点A、点B之间时才能使P到A的距离与P到B的距离之和最小.

故答案为：点A、点B之间.

②当点P在点A左边，

$PA+PB+PC=2PA+AC+BP$,

当点P在点A、点B之间时，

$PA+PB+PC=AC+BP$,

当点P在点C、点B之间时，$PA+PB+PC=AC+BP$，

当点P在点C、点B之间时，$PA+PB+PC=AC+BP$，

当点P在点C右边，$PA+PB+PC=AC+BP+2PC$，

∴点P应设在点B时才能使P到A,B,C三点的距离之和最小．

故答案为：点B．

③当点P在点A左边，$PA+PB+PC+PD=4PA+2AB+CB+AD$，

当点P在点A、点B之间时，$PA+PB+PC+PD=2PB+BC+AD$，

当点P在点C、点B之间时，$PA+PB+PC+PD=BC+AD$，

当点P在点C、点D之间时，$PA+PB+PC+PD=BC+AD+2PC$，

当点P在点D右边时，$PA+PB+PC+PD=BC+AD+2DC+4PD$，

∴当点P在点C、点B之间时，P到A,B,C,D四点的距离之和最小．

故答案为：点B、点C之间．

（3）①由探究材料 2 得，当$-3\le x\le 4$时，有最小值，最小值为 7．

$|x+3|+|x-4|=x+3+4-x=7$,

∴有最小值，最小值为 7．

故答案为：$7;-3\le x\le 4$．

②由探究材料 2 得，这是在求点x到-6、-3、2三点的最小距离，

∴当$x=-3$时，有最小值，最小值为 8，$|x+6|+|x+3|+|x-2|=|-3+6|+|-3+3|+|-3-2|=8$．

故答案为：$8;-3$．

③由探究材料 2 得，这是在求点x到-7、-4、2、5 四点的最小距离，

∴当$-4\le x\le 2$时，有最小值，最小值为 18，$|x+7|+|x+4|+|x-2|+|x-5|=x+7+x+4+2-x$ $+5-x=18$．

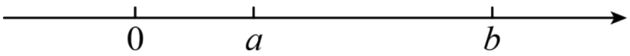
故答案为：$18,-4\le x\le 2$．

【点睛】此题考查了数轴绝对值的性质，掌握点在数轴上的位置，一定分情况讨论，（3）的解题思路是在探究（2）的基础上知识进一步的延伸是解决此题的关键．

【变式 3-1】（2023 上·湖南怀化·七年级校考期末）阅读下列材料：

我们知道$|a|$的几何意义是在数轴上表示数 a 的点与原点的距离，$|a|=|a-0|$也就是表示数 a 与数 0 的两点

之间的距离，$|a-b|$表示数轴上表示数 a 与数 b 的两点之间的距离．



例 1．已知$|x|=2$，求 x 的值．

解：在数轴上与原点距离为 2 的点对应数是为-2和 2，即 x 的值为-2和 2．

例 2．已知$|x-1|=2$，求 x 的值．

解：在数轴上与 1 的距离为 2 的点对应数为 3 和-1，即 x 的值为 3 和-1．

依照阅读材料的解法，完成下列各题：

(1)若$|x|=3$，则$x=$________，若$|x+2|=4$，则$x=$________；

(2)$|x+1|+|x-2|$的最小值是________，若$|x+1|+|x-2|=5$，则$x=$________；

(3)代数式$|x+11|+|x-3|+|x-5|$的最小值为________；

(4)求代数式$|x-1|+|x-2|+|x-3|+\cdots+|x-100|$的最小值．

【答案】(1)3 或-3；2 或-6

(2)3；-2或 3

(3)16

(4)2500

【分析】（1）仿照题意进行求解即可；

（2）设点 A 表示的数为 x，点 B 和点 C 表示的数分别为-1，2，则$|x+1|+|x-2|$的值即为线段AB的长度与线段AC的长度之和，再分当点 A 在点 B 左侧时，当点 A 在点 B 与 C 之间时，当点 A 在点 C 右侧时，三种情况求出$AB+AC$的最小值为 3，再由$|x+1|+|x-2|=5$，得到$x<-1$或$x>2$，据此去绝对值解方程即可；

（3）同⑵可得，当$-11\le x\le 5$时，$|x+11|+|x-5|$有最小值，又有当$x=3$时，$|x-3|$有最小值，则当$x=3$时，$|x+11|+|x-3|+|x-5|$有最小值，据此求解即可；

（4）同理推出当$50\le x\le 51$时，$|x-1|+|x-2|+|x-3|+\cdots+|x-100|$有最小值，据此求解即可．

【详解】（1）解：∵在数轴上与原点距离为 3 的点对应的数为 3 和-3，

∴x 的值为 3 或-3；

∵在数轴上与-2距离为 4 的点对应的数为 2 和-6，

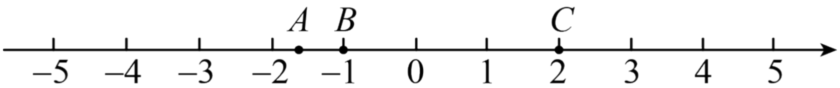
∴x 的值为 2 或-6；

故答案为：3 或-3；2 或-6；

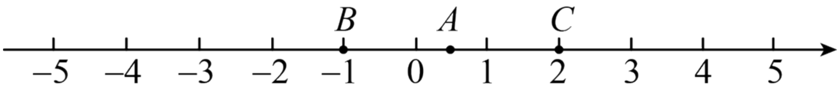
（2）解：设点 A 表示的数为 x，点 B 和点 C 表示的数分别为-1，2，

$\therefore |x+1|+|x-2|$的值即为线段AB的长度与线段AC的长度之和，

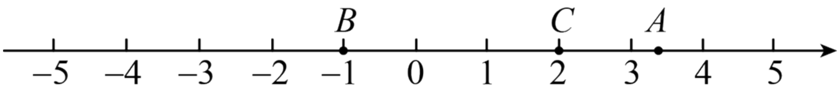
如图所示，当点 A 在点 B 左侧时，$AB+AC>BC=2-(-1)=3$



如图所示，当点 A 在点 B 与 C 之间时，$AB+AC=BC=2-(-1)=3$



如图所示，当点 A 在点 C 右侧时，$AB+AC>BC=2-(-1)=3$



$\therefore$综上所述，当点 A 在点 B 与 C 之间时，$AB+AC$有最小值 3；

$\because$当点 A 在点 B 与 C 之间时，$|x+1|+|x-2|$的最小值为 3，$|x+1|+|x-2|=5$，

$\therefore x<-1$或$x>2$，

当$x<-1$时，则$-x-1+2-x=5$，解得$x=-2$；

当$x>2$时，则$x+1+x-2=5$，解得$x=3$；

综上所述，若$|x+1|+|x-2|=5$，则$x=-2$或$x=3$；

故答案为：3；-2或 3；

（3）解：同（2）可得，当$-11\le x\le 5$时，$|x+11|+|x-5|$有最小值，

又$\because |x-3|\ge 0$，

$\therefore$当$x=3$时，$|x-3|$有最小值，

$\therefore$当$x=3$时，$|x+11|+|x-3|+|x-5|$有最小值，最小值为$|3+11|+|3-3|+|3-5|=14+0+2=16$，

故答案为：16；

（4）解：同（2）可得当$1\le x\le 100$时，$|x-1|+|x-100|$有最小值，

当$2\le x\le 99$时，$|x-2|+|x-99|$有最小值，

当$3\le x\le 98$时，$|x-3|+|x-98|$有最小值，

……

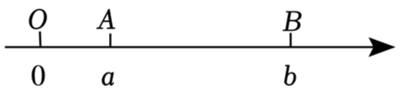
当$50\le x\le 51$时，$|x-50|+|x-51|$有最小值，

$\therefore$当$50\le x\le 51$时，$|x-1|+|x-2|+|x-3|+\cdots+|x-100|$有最小值，最小值为$|50-1|+|50-2|+\cdots+$

$|50-99|+|50-100|=2500$.

【点睛】本题主要考查了绝对值的几何意义，数轴上两点距离公式，解绝对值方程，熟练掌握绝对值的几何意义是解题的关键.

【变式 3-2】（2023 下·云南曲靖·七年级统考期末）（1）阅读：如图，点 A、B 在数轴上分别表示实数 a、b，则 A、B 两点之间的距离可以表示为 $|AB|=|a-b|$.



（2）理解：

①数轴上表示 2 和 5 的两点之间的距离是 _____，数轴上表示 1 和 -3 的两点之间的距离是 _____；

②数轴上表示 x 和 -1 的两点 A 和 B 之间的距离是 _____，如果 $|AB|=2$，那么 $x=$_____；

（3）运用：

③当代数式 $|x+1|+|x-2|$ 取最小值时，相应的 x 的取值范围是 _____；

④当代数式 $|x+1|+|x-2|+|x-4|$ 取最小值时，相应的 x 的值是 _____；

（4）提升：

⑤有 A、B、C、D、E 五位小朋友按顺时针方向围成一个小圆圈，他们分别有卡片12、6、9、3、10张．现在为使每人手中卡片数相等，各调几张卡片给相邻小朋友（可以从相邻小朋友调进或调出给相邻小朋友），要使调动的卡片总数最小，应该做怎样的调动安排？最少调动几张？

【答案】（2）①3；4②$|x+1|$；1 或 -3；（3）③$-1\le x\le 2$；④2；（4）⑤A 给 B 有 2 张，B 给 C 有 0 张，C 给 D 有 1 张，E 给 D 有 4 张，A 给 E 有 2 张，调动的卡片总数最小，最少调动 9 张.

【分析】①根据阅读材料直接可得答案；

②根据阅读材料列出方程，可解得答案；

③由 $|x+1|+|x-2|$ 表示到表示 -1 和 2 的点的距离之和，即可得答案；

④由 $|x+1|+|x-2|+|x-4|$ 表示到表示 -1，2 和 4 的点的距离之和，可得答案；

⑤设 A 给 B a 张（$a>0$ 时，即为 A 给 B a 张，$a<0$ 时，即为 B 给 A a 张，），B 给 C b 张，C 给 D c 张，D 给 E d 张，E 给 A e 张，要使每人手中的卡片数相等，每人均为 8 张，故 $\begin{cases}6+a-b=8\\9+b-c=8\\3+c-d=8\\10+d-e=8\end{cases}$，即得 $\begin{cases}a=b+2\\c=b+1\\d=b-4\\e=b-2\end{cases}$，可知 $|a|+|b|+|c|+|d|+|e|=|b+2|+|b|+|b+1|+|b-4|+|b-2|$，

由 $|b+2|+|b|+|b+1|+|b-4|+|b-2|$ 可看作数轴上到表示 -2，0，-1，4，2 的点的距离之和，即可得答案.

【详解】①$\because |5-2|=3, |1-(-3)|=4$,

∴表示 2 和 5 的两点之间的距离是 3，表示 1 和-3的两点之间的距离是 4，

故答案为：3，4；

②表示 x 和-1的两点 A 和 B 之间的距离是$|x-(-1)|=|x+1|$，

当$AB=2$时，$|x+1|=2$，

解得$x=1$或$x=-3$，

故答案为：$|x+1|$，1 或-3

③$\because|x+1|+|x-2|$表示到表示-1和 2 的点的距离之和，

$\therefore|x+1|+|x-2||$取最小值时，x 的范围是$-1\leq x\leq 2$，

故答案为：$-1\leq x\leq 2$；

④$\because|x+1|+|x-2|+|x-4||$表示到表示$-1$，2 和 4 的点的距离之和，

$\therefore x=2$时，$|x+1|+|x-2|+|x-4|$取最小值 5，

故答案为：2；

⑤设 A 给 Ba 张（$a>0$时，即为 A 给 Ba 张，$a<0$时，即为 B 给 Aa 张，），B 给 Cb 张，C 给 Dc 张，D 给 Ed 张，E 给 Ae 张，由于共有卡片数为$12+6+9+3+10=40$（张），要使每人手中的卡片数相等，每人均为 8 张，

由题意：$\begin{cases}6+a-b=8\\9+b-c=8\\3+c-d=8\\10+d-e=8\end{cases}$，

变形得：$\begin{cases}a=b+2\\c=b+1\\d=b-4\\e=b-2\end{cases}$，

$\therefore|a|+|b|+|c|+|d|+|e|=|b+2|+|b|+|b+1|+|b-4|+|b-2|$，

$\because|b+2|+|b|+|b+1|+|b-4|+|b-2|$可看作数轴上到表示$-2$，0，$-1$，4，2 的点的距离之和，

$\therefore b=0$时，$|b+2|+|b|+|b+1|+|b-4|+|b-2|$取最小值，最小值为$2+0+1+4+2=9$，

此时$a=2,c=1,d=-4,e=-2$，

∴A 给 B2 张，B 给 C0 张，C 给 D1 张，E 给 D4 张，A 给 E2 张，调动的卡片总数最小，最少调动 9 张．

【点睛】此题考查绝对值的几何含义，解题关键是数形结合，将绝对值的计算转化为到点的距离的和进行求解．

【变式 3-3】（2023 上·广东广州·七年级校考期末）在学习了数轴后，小亮决定对数轴进行变化应用：

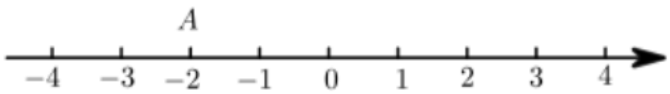
(1)应用一：已知图①，点 A 在数轴上表示为-2，数轴上任意一点 B 表示的数为 x，则AB两点的距离可以表示为$|x+2|$，应用这个知识，请写出：

①$|x-1|+|x+3|$有最小值为____________，此时 x 满足条件__________；

②$|x-1|+|2x+3|$有最小值为__________，此时 x 满足条件____________；

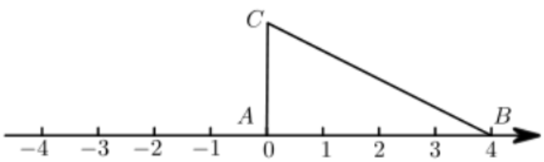
③$\left|\frac{1}{2}x-1\right|+\left|\frac{1}{2}x-3\right|+\left|x+\frac{1}{2}\right|$有最小值为___________，此时 x 满足条件____________.

(2)应用二：在图①中，将数轴沿着点 A 折叠，若数轴上点 M 在点 N 的左侧，M，N 两点之间距离为12，M，C 两点之间距离为 4，且 M，N 两点沿着 A 点折叠后重合，则点 M 表示的数是____________；点 C 表示的数是____________.



图①

(3)应用三：如图②，将一根拉直的细线看作数轴，一个三边长分别为$AB=4$，$AC=3$，$BC=5$的三角形ABC的顶点 A 与原点重合，AB边在数轴正半轴上，将数轴正半轴的线沿$A\to B\to C\to A$的顺序依次缠绕在三角形ABC的边上，负半轴的线沿$A\to C\to B\to A$的顺序依次缠绕在三角形ABC的边上.



图②

①如果正半轴的线缠绕了 n 圈，负半轴的线缠绕了 n 圈，求绕在点 C 上的所有数之和；（用 n 表示）

②如果正半轴的线不变，将负半轴的线拉长一倍，即原线上的点-2的位置对应着拉长后的数-1，并将三角形ABC向正半轴平移一个单位后再开始绕，则绕在点 B 且绝对值不超过100的所有数之和是__________.

【答案】(1)4，$-3\le x\le 1$；$\frac{5}{2}$，$-\frac{3}{2}\le x\le 1$； $\frac{9}{2}$，$-\frac{1}{2}\le x\le 6$.

(2)-8，4；-12或-4

(3)$6n$，-499.5

【分析】（1）根据数轴上两点间的距离的表示来列式即可；

（2）先判断出点 M 和点 N 到表示数-2的点的距离为 6，即可得出结论；

（3）①分别找出正半轴和负半轴在点 C 上的数字之间的规律，即可求出所有数字之和.

②找出绕在点 B 且绝对值不超过100的所有数字，求和即可.

【详解】（1）已知图①，点 A 在数轴上表示为-2，数轴上任意一点 B 表示的数为 x，

则 AB 两点的距离可以表示为$|x+2|$，

应用这个知识，①$|x-1|+|x+3|$有最小值为3−（−1）＝4，此时 x 满足条件$-3\le x\le 1$.

②$|x-1|+|2x+3|$最小值，当$x=-\frac{3}{2}$，最小值$1-x+2x+3=x+4=-\frac{3}{2}+4=\frac{5}{2}$，此时 x 满足条$-\frac{3}{2}\le x\le 1$.

③$\left|\frac{1}{2}x-1\right|+\left|\frac{1}{2}x-3\right|+\left|x+\frac{1}{2}\right|$，$\frac{1}{2}|x-2|+\frac{1}{2}|x-6|+\left|x+\frac{1}{2}\right|$，当$x=2$，最小值$\frac{9}{2}$，此时 x 满足条$-\frac{1}{2}\le x\le 6$.

故答案为： 4，$-3\le x\le 1$；$\frac{5}{2}$，$-\frac{3}{2}\le x\le 1$； $\frac{9}{2}$，$-\frac{1}{2}\le x\le 6$.

（2）∵M，N 两点沿着 A 点折叠后重合，

∴点 M 和点 N 关于表示数-2的点对称，

∵M，N 两点之间距离为12，

∴点 M 和点 N 到表示数-2的点的距离都为$\frac{1}{2}\times 12=6$，

∴点 M 表示的数为$-2-6=-8$，点 N 表示的数为$-2+6=4$，

∵M，C 两点之间距离为 4，

∴①当点 C 在点 M 左侧时，点 C 表示的数为$-8-4=-12$，

②当点 C 在点 M 右边时，点 C 表示的数为$-8+4=-4$，

∴点 C 表示的数为-12或-4.

故答案为：-8，4；-12或-4；

（3）①如果正半轴的线缠绕了 n 圈，绕在点 C 的数分别为：9，21，33，…，

点 C 的数为：$9+12(n-1)=12n-3$；

负半轴的线缠绕了 n 圈，绕在点 C 的数分别为：-3，-15，-27，…，

点 C 的数为：$-3-12(n-1)=-12n+9$；

则绕在点 C 上的所有数字之和为：$(12n-3-12n+9)n=6n$.

②如果正半轴的线不变，并将三角形ABC向正半轴平移一个单位后再开始绕，

则正半轴上绕在点 B 且绝对值不超过100的数字有：5,17,29,41,53，65，77，89；

将负半轴的线拉长一倍，并将三角形ABC向正半轴平移一个单位后再开始绕，

则正半轴上绕在点 B 且绝对值不超过100的数字有：

-3.5，-9.5，-15.5，-21.5，-27.5，-33.5，-39.5，-45.5，-51.5，-57.5， -63.5，-69.5，-75.5，-81.5，-87.5，-93.5，-99.5.

$5+17+29+41+53+65+77+89-3.5-9.5-15.5-21.5-27.5-33.5-39.5$

$-45.5-51.5-57.5-63.5-69.5-75.5-81.5-87.5-93.5-99.5$

$=-499.5$

则绕在点 B 且绝对值不超过100的数字之和为-499.5.

故答案为：-499.5.

【点睛】本题考查了列代数式，整式的加减，绝对值的应用，有理数的加减运算，数轴上两点间的距离的计算方法，综合性比较强，难度比较大．注意数形结合．

【题型 4 有理数的实际应用】

【例 4】（2023 上·河南郑州·七年级校联考期末）2020 年的"新冠肺炎"疫情的蔓延，使得医用口罩销量大幅增加，某口罩加工厂每名工人计划每天生产 300 个医用口罩，一周生产 2100 个口罩．由于种种原因，实际每天生产量与计划量相比有出入．如表是工人小王某周的生产情况（超产记为正，减产记为负）：

（1）根据记录的数据可知，小王星期五生产口罩_____个．

（2）根据表格记录的数据，求出小王本周实际生产口罩数量．

（3）若该厂实行每周计件工资制，每生产一个口罩可得 0.6 元，若超额完成周计划工作量，则超过部分每个另外奖励 0.15 元，若完不成每周的计划量．则少生产一个扣 0.2 元，求小王这一周的工资总额是多少元？

（4）若该厂实行每日计件工资制，每生产一个口罩可得 0.6 元，若超额完成每日计划工作量．则超过部分每个另外奖励 0.15 元，若完不成每天的计划量，则少生产一个扣 0.2 元，请直接写出小王这一周的工资总额是多少元．

星 期	一	二	三	四	五	六	日
增减产量/个	+5	﹣2	﹣4	+13	﹣9	+16	﹣8

【答案】（1）291；（2）2111 个；（3）1268.25 元；（4）1267.1 元．

【分析】（1）根据题意和表格中的数据，可以得到小王星期五生产口罩的数量；

（2）根据题意和表格中的数据，本周生产个数=2100+增减产量，即可求得；

（3）根据题意和表格中的数据，本周收入=本周生产个数×0.6＋增产个数×0.15（或－减产个数×0.2），即可解得；

（4）根据题意和表格中的数据，每天收入=生产个数×0.6＋增产个数×0.15（或－减产个数×0.2），然后累加即可解得．

【详解】解：（1）小王星期五生产口罩数量为：300﹣9＝291（个），

故答案为：291；

（2）+5﹣2﹣4+13﹣9+16﹣8＝11（个），

则本周实际生产的数量为：2100+11＝2111（个）

答：小王本周实际生产口罩数量为 2111 个；

（3）一周超额完成的数量为：+5﹣2﹣4+13﹣9+16﹣8＝11（个），

所以，2100×0.6+11×（0.6+0.15）

＝1260+11×0.75

＝1260+8.25

＝1268.25（元），

答：小王这一周的工资总额是 1268.25 元；

（4）第一天：300×0.6+5×（0.6+0.15）＝183.75（元）；

第二天：（300﹣2）×0.6﹣2×0.2＝178.4（元）；

第三天：（300﹣4）×0.6﹣4×0.2＝176.8（元）；

第四天：300×0.6+13×（0.6+0.15）＝189.75（元）；

第五天：（300﹣9）×0.6﹣9×0.2＝172.8（元）；

第六天：300×0.6+16×（0.6+0.15）＝192（元）；

第七天：（300﹣8）×0.6﹣8×0.2＝173.6（元）；

共 183.75+178.4+176.8+189.75+172.8+192+173.6＝1267.1（元）．

答：小王这一周的工资总额是 1267.1 元．

【点睛】此题考查有理数的混合运算和正负数的意义，本题是实际生活中常见的一个表格，它提供了多种信息，但关键是从中找出解题所需的有效信息，构造相应的数学模型来解决问题．

【变式 4-1】（2023 上·浙江·七年级期末）出租车司机李师傅从上午$8:00\sim9:15$在厦大至会展中心的环岛路上营运，共连续运载十批乘客．若规定向东为正，向西为负，李师傅营运十批乘客里程如下：（单位：千米）$+8,-6,+3,-7,+8,+4,-7,-4,+3,+4$

（1）将最后一批乘客送到目的地时，李师傅距离第一批乘客出发地的位置怎样？距离多少千米？

（2）上午$8:00\sim9:15$李师傅开车的平均速度是多少？

（3）若出租车的收费标准为：起步价 8 元（不超过 3 千米），超过 3 千米，超过部分每千米 2 元．则李师傅在上午$8:00\sim9:15$一共收入多少元？

【答案】（1）距离第一批乘客出发地的东方，距离是 6 千米；（2）43.2 千米/小时；（3）128 元

【分析】（1）将所有数据相加得出结果后，即可作出判断；

（2）将所有数据的绝对值相加，可得出路程，然后求出时间，根据速度=路程÷时间即可得出答案；

（3）分别计算起步价，及超过 3 公里的收入，然后相加即可．

【详解】解：（1）由题意得：向东为“+”，向西为“-”，

则将最后一批乘客送到目的地时，李师傅距离第一批乘客出发地的距离为：

（+8）+（-6）+（+3）+（-7）+（+8）+（+4）+（-7）+（-4）+（+3）+（+4）=6（千米），

所以，将最后一批乘客送到目的地时，李师傅在距离第一批乘客出发地的东方，距离是 6 千米；

（2）上午 8：00～9：15 李师傅开车的距离是：

|+8|+|-6|+|+3|+|-7|+|+8|+|+4|+|-7|+|-4|+|+3|+|+4|=54（千米），

上午 8：00～9：15 李师傅开车的时间是：1 小时 15 分=1.25 小时；

所以，上午 8：00～9：15 李师傅开车的平均速度是：54÷1.25=43.2（千米/小时）；

（3）一共有 10 位乘客，则起步费为：8×10=80（元）．

超过 3 千米的收费总额为：

[（8-3）+（6-3）+（3-3）+（7-3）+（8-3）+（4-3）+（7-3）+（4-3）+（3-3）+（4-3）]×2=48（元）．

则李师傅在上午 8：00～9：15 一共收入：80+48=128（元）．

【点睛】此题考查正负数在实际生活中的应用，解题关键是理解“正”和“负”的相对性，确定一对具有相反意义的量．

【变式 4-2】（2023 上·福建泉州·七年级校考阶段练习）股民铭铭上星期五买进萱萱公司的股票 1000 股，每股 27 元，下表为本周内每日该股票的涨跌情况(单位：元)(注：用正数记股价比前一日上升数，用负数记股价比前一日下降数)

星期	一	二	三	四	五
每股涨跌	+2	+0.5	－1	－0.4	+1.9

(1)星期二收盘时，每股是多少元?

(2)本周内最高价是每股多少元?最低价每股多少元?

(3)已知铭铭买进股票时付了购买金额 0.1%的手续费，卖出时需付成交额 0.15%的手续费和 0.1%的交易税，如果铭铭在星期五收盘前将全部股票卖出，他的收益(获利)情况如何?

【答案】（1）29.5 元；（2）本周内最高价为每股 30 元，最低价为每股 28.1 元；（3）2898 元.

【分析】（1）利用正数和负数的意义，将星期一和星期二的涨跌相加，可得到星期二收盘时每股的价格；

（2）分别计算出星期一到星期五每天的股价，然后比较大小即可；

（3）先计算出以星期五收盘前每股的价格卖出所得，然后再计算买进股票所需费用，然后求出它们的差即可.

【详解】（1）根据题意得：

27+2-0.5=29.5（元）

故星期二收盘时，每股 29.5 元.

（2）星期一收盘时每股价格为：27+2=29（元）；

星期二收盘时每股价格为：29+0.5=29.5（元）；

星期三收盘时每股价格为：29.5-1=28.5（元）；

星期四收盘时每股价格为：28.5-0.4=28.1（元）；

星期五收盘时每股价格为：28.1+1.9=30（元）；

所以本周内最高价是每股 30 元，最低价每股 28.1 元；

（3）星期五收盘前将全部股票卖出所得为：

$30\times1000\times\left(1-0.15\%-0.1\%\right)=29925$（元）

买进股票的费用为：

$27\times1000\times\left(1+0.1\%\right)=27027$（元）

29925-27027=2898（元）

所以他的收益为 2898 元.

【点睛】在实际应用中，有时需要根据记数的基准先把实际的量进行转化，然后用正数和负数来表示相关的数量.本题就是正负数的实际应用，同时结合利润问题进行考查，明确买入和卖出费用是解题的关键.

【变式 4-3】（2023 上·浙江金华·七年级校考期末）2022 年十一国庆期间，商场打出促销广告，如下表所示

优惠条件	一次性购物不超过 200 元	一次性购物超过 200 元，但不超过 600 元	一次性购物超过 600 元
优惠办法	没有优惠	全部按九折优惠	其中 600 元扔按九折优惠，超过 600 元部分按八折优惠

用代数式表示（所填结果需化简）：

(1)设一次性购买的物品原价为 x 元，当原价 x 超过 200 元，但不超过 600 元时，实际付款为_元；当原价 x 超过 600 元时，实际付款为_元.

(2)若乙分两次购物，第一次花费 189 元，第二次花费 580 元，则两次购物的总原价为多少元？若合并成一次购买，比分两次购买便宜多少元？

【答案】(1)$0.9x$，$(0.8x+60)$

(2)两次购物的总原价为 839 元或 860 元；当总原价为 839 元时，便宜 37.8 元；当总原价为 860 元，便宜 21 元

【分析】（1）由题意知，设一次性购买的物品原价为 x 元，当原价 x 超过 200 元，但不超过 600 元时，实际付款为$0.9x$元；当原价 x 超过 600 元时，实际付款为$600\times 0.9+(x-600)\times 0.8=0.8x+60$元；

（2）由$200\times 0.9=180$，$189>180$，可知，第一次花费分两种情况求解：①第一次花费原价为189元；②第一次花费原价为$189\div 0.9=210$元；由$600\times 0.9=540$，$540<580$，可得第二次花费原价为$600+(580-540)\div 0.8=650$ 元，分别计算两种情况下的总原价，以及合并成一次购买的总费用，然后与分两次购物的费用作差求解即可．

【详解】（1）解：由题意知，设一次性购买的物品原价为 x 元，当原价 x 超过 200 元，但不超过 600 元时，实际付款为$0.9x$元；

当原价 x 超过 600 元时，实际付款为$600\times 0.9+(x-600)\times 0.8=(0.8x+60)$元，

故答案为：$0.9x$，$(0.8x+60)$；

（2）解：$\because 200\times 0.9=180$，$189>180$，

由题意知，第一次花费分两种情况求解：

①第一次花费原价为189元；

②第一次花费原价为$189\div 0.9=210$元；

$\because 600\times 0.9=540$，$540<580$，

$\therefore$第二次花费原价为$600+(580-540)\div 0.8=650$ 元，

$\therefore$当第一次花费原价为189元；两次购物的总原价为$189+650=839$元，

若合并成一次购买，总费用为$600\times 0.9+(839-600)\times 0.8=731.2$元，

$\therefore 189+580-731.2=37.8$（元）；

当第一次花费原价为210元；两次购物的总原价为$210+650=860$元，

若合并成一次购买，总费用为$600\times 0.9+(860-600)\times 0.8=748$元，

$\therefore 189+580-748=21$（元），

$\therefore$当两次购物的总原价为 839 元时，合并成一次购买，比分两次购买便宜 37.8 元；当两次购物的总原价为

860 元，合并成一次购买，比分两次购买便宜 21 元．

【点睛】本题考查了列代数式，有理数混合运算的实际应用．解题的关键是分类讨论，列出算式．

【题型 5　利用整式加减确定方案问题】

【例 5】（2023 上·陕西汉中·七年级统考期末）某商场销售一种乒乓球拍和乒乓球，乒乓球拍每副定价80元，乒乓球每盒定价20元，“国庆节”假期期间商场决定开展促销活动，活动期间向客户提供两种优惠方案．

方案一：买一副乒乓球拍送一盒乒乓球；

方案二：乒乓球拍和乒乓球都按定价的90%付款．

某客户要到该商场购买乒乓球拍20副，乒乓球x盒（$x>20$且为整数）．

(1)用含x的代数式表示按两种方案购买各需付款多少元？

(2)若$x=30$，通过计算说明此时按哪种方案购买较合算；

(3)当$x=30$时，你能给出一种更为省钱的购买方案吗？试写出你的购买方法．

【答案】(1)方案一需付款：$(20x+1200)$元；方案二需付款：$(18x+1440)$元

(2)按方案一购买较合算

(3)能，先按照方案一购买乒乓球拍20副，送乒乓球20盒；再按照方案二购买10盒乒乓球；

【分析】（1）方案一需付款：20副乒乓球拍子的费用加上$(x-20)$盒乒乓球的费用；方案二需付费：用20副乒乓球拍的费用与x盒乒乓球的费用之和乘以90%即可

（2）当$x=30$时，按照两种优惠方案分别计算出付款额度，付款少的方案购买即可

（3）先按照方案一购买乒乓球拍20副，送乒乓球20盒，再按照方案二购买10盒乒乓球即可

【详解】（1）方案一需付费：$20\times80+(x-20)\times20=20x+1200$，即$(20x+1200)$元；

方案二需付费：$(20\times80+20x)\times0.9=18x+1440$，即$(18x+1440)$元

（2）当$x=30$时：

方案一需付费：$20\times30+1200=1800$元；

方案二需付费：$18\times30+1440=1980$元；

$\because 1800<1980$，

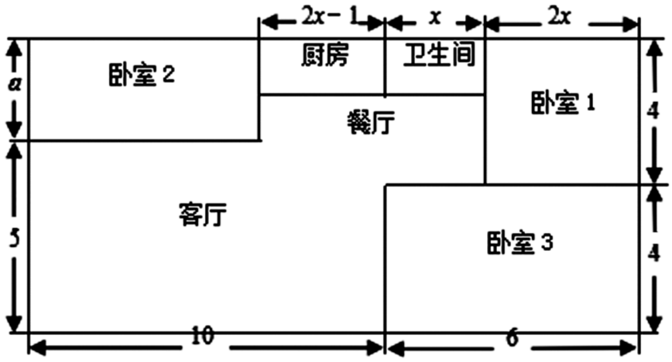
$\therefore$按方案一购买较合算

（3）先按照方案一购买乒乓球拍20副，送乒乓球20盒；再按照方案二购买10盒乒乓球；

则需付费：$20\times80+10\times20\times0.9$=1780（元）

【点睛】本题考查列代数式及代数式求值问题，读懂题意是解决问题的关键

【变式 5-1】（2023 上·湖北武汉·七年级校考阶段练习）小明家住房户型呈长方形，平面图如下（单位：米）．现准备铺设整个长方形地面，其中三间卧室铺设木地板，其它区域铺设地砖．（房间内隔墙宽度忽略不计）



（1）求 a 的值；

（2）请用含 x 的代数式分别表示铺设地面需要木地板和地砖各多少平方米；

（3）按市场价格，木地板单价为 300 元/平方米，地砖单价为 100 元/平方米．装修公司有 A，B 两种活动方案，如表：

活动方案	木地板价格	地砖价格	总安装费
A	8 折	8.5 折	2000 元
B	9 折	8.5 折	免收

已知卧室 2 的面积为 21 平方米，则小方家应选择哪种活动，使铺设地面总费用（含材料费及安装费）更低？

【答案】（1）3；（2）木地板：$75-7x$，地砖：$7x+53$；（3）B 种活动方案

【分析】（1）根据长方形的对边相等可得 a+5=4+4，即可求出 a 的值；

（2）根据三间卧室铺设木地板，其它区域铺设地砖，可知将三间卧室的面积的和为木地板的面积，用长方形的面积-三间卧室的面积，所得的差为地砖的面积；

（3）根据卧室 2 的面积为 21 平方米求出 x，再分别求出所需的费用，然后比较即可．

【详解】解：（1）根据题意，可得 $a+5=4+4$，

得 $a=3$；

（2）铺设地面需要木地板：

$4\times 2x+a[10+6-(2x-1)-x-2x]+6\times 4=8x+3(17-5x)+24=75-7x$，

铺设地面需要地砖：

$16\times 8-(75-7x)=128-75+7x=7x+53$；

（3）∵卧室 2 的面积为 21 平方米，

∴3[10+6﹣（2x﹣1）﹣x﹣2x]＝21，

∴3（17﹣5x）＝21，

∴x＝2，

∴铺设地面需要木地板：75﹣7x＝75﹣7×2＝61，

铺设地面需要地砖：7x+53＝7×2+53＝67，

A 种活动方案所需的费用：61×300×0.8+67×100×0.85+2000＝22335（元），

B 种活动方案所需的费用：61×300×0.9+67×100×0.85＝22165（元），

22335＞22165，

所以小方家应选择 *B* 种活动方案，使铺设地面总费用（含材料费及安装费）更低.

【点睛】本题考查了列代数式，长方形的面积，分别求出铺设地面需要木地板与地砖的面积，理解 A，B 两种活动方案是解题的关键.

【变式 5-2】（2023 上·吉林长春·七年级统考期末） 某服装厂生产一种西装和领带，西装每套定价 300 元，领带每条定价 50 元.厂方在开展促销活动期间，向客户提供两种优惠方案：①买一套西装送一条领带；②西装和领带都按定价的 90%付款.现某客户要到该服装厂购买西装 30 套，领带 x 条（x>30）.

（1）若该客户按方案①购买，西装需付款________元，领带需付款________元（用含 x 的代数式表示）.

若该客户按方案②购买，西装需付款________元，领带需付款_______元（用含 x 的代数式表示）.

（2）若 x=50，通过计算说明按方案①、方案②哪种方案购买较为合算？

（3）若两种优惠方案可同时使用，当 x=50 时，你能给出一种最为省钱的购买方案吗？试写出你的购买方案，并计算该方案所需付款金额.

【答案】（1）9000,50(x-30),8100,45x (2) 按方案①购买合算 (3)能,见解析

【详解】试题分析：

（1）按题中方案分别列式计算即可；

（2）把$x=50$分别代入（1）中所列式子计算，再比较大小可得结论；

（3）由题意可知：①买一套西装和一条领带按方案 1 需 300 元，按方案 2 需 315 元；②只买领带，方案 1 没有优惠，方案 2 有优惠；因此当两种方案可同时使用时，先用方案 1 买 30 套西装，再用方案 2 单独买 20 条领带，这样最省钱.

试题解析：

（1）按方案 1 购买西装需：300×30=9000元，买领带需：$50(x-30)=(50x-1500)$元；按方案 2 购买西

装需：$300\times30\times90\%$=8100元，买领带需：$50x\times90\%=45x$元.

（2）当$x=50$时，按方案 1 共需：9000+$50(50-30)=10000$（元）；按方案 2 购买共需：8100+45×50=10350（元）.

∵10000<10350，

∴按方案 1 购买更合算.

（3）能，先用方案 1 购买 30 套西装，再用方案 2 购买 20 条领带.

此方案所需付款金额为：$300\times30+50(50-30)\times90\%=9900$（元），

∴此方案所需付款金额为 9900 元.

【变式 5-3】（2023 上·浙江·七年级期末）某农户 2020 年承包荒山若干亩，投资 7800 元改造后，种果树 2000 棵．今年水果总产量为 36000 千克，此水果在市场上每千克售a元，在果园每千克售b元（$b<a$）．若该农户将水果拉到市场出售平均每天出售 1000 千克，需 8 人帮忙，每人每天付工资 100 元，农用车运费及其他各项税费平均每天 300 元．

(1)当$a=3$，$b=2$时，农户在水果市场或在果园中出售完全部水果的总收入分别是多少元？

(2)用a，b分别表示农户在水果市场或在果园中这两种方式出售完全部水果的纯收入？（纯收入$=$总收入$-$总支出）

(3)若$a=b+k(k>0)$，$|k-2|=2-k$且k是整数，若两种出售水果方式都在相同的时间内售完全部水果，试讨论当k为何值时，选择哪种出售方式较好．

【答案】(1)此水果在果园出售总收入为72000元，在水果市场出售总收入为68400元

(2)农户在果园中出售完全部水果的纯收入为$(36000b-7800)$元，农户在水果市场出售完全部水果的纯收入为$(36000a-47400)$元；

(3)当$k=1$时，选择果园出售；当$k=2$时，选择水果市场出售

【分析】（1）根据题意可知，水果直接在果园的出售收入为$36000b$元，在水果市场出售收入=水果的总收入$-$额外支出，列出代数式并代入求值即可获得答案；

（2）根据“纯收入$=$总收入$-$总支出”，计算即可；

（3）由题意知$k=1$或 2，分两种情形分别计算即可解决问题.

【详解】（1）解：根据题意，

此水果在果园出售，总收入$w_1=36000b$元，

此水果在水果市场出售，总收入$w_2=36000a-\frac{36000}{1000}\times(100\times8+300)=(36000a-39600)$元，

当$a=3$，$b=2$时，

此水果在果园出售，总收入$w_1=36000\times2=72000$元，

此水果在水果市场出售，总收入$w_2=36000\times3-39600=68400$（元）；

（2）农户在果园中出售完全部水果的纯收入为$m_1=(36000b-7800)$元，

农户在水果市场出售完全部水果的纯收入为$m_2=36000a-39600-7800=(36000a-47400)$元；

（3）$\because|k-2|=2-k$且k是整数，

$\therefore k=1$或 2，

当$k=1$时，$a=b+1$，

在果园中出售完全部水果的纯收入$m_1=(36000b-7800)$元，

在水果市场出售完全部水果的纯收入$m_2=36000\times(b+1)-47400=(36000b-11400)$元，

$\because 36000b-7800>36000b-11400$，

$\therefore$选择果园出售方式较好；

当$k=2$时，$a=b+2$，

在果园中出售完全部水果的纯收入$m_1=(36000b-7800)$元，

在水果市场出售完全部水果的纯收入$m_2=36000\times(b+2)-47400=(36000b+24600)$元，

$\because 36000b-7800<36000b+24600$，

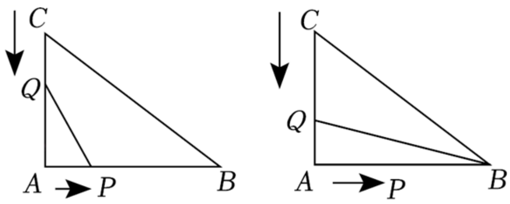
$\therefore$选择水果市场出售方式较好.

综上所述，当$k=1$时，选择果园出售；当$k=2$时，选择水果市场出售.

【点睛】本题考查了列代数式、代数式求值等知识，解题的关键是理解题意，灵活运用所学知识解决问题.

【题型 6　利用整式加减解决图形周长或面积问题】

【例 6】（2023 上·陕西西安·七年级校考期末）如图，在Rt△ABC中，$\angle A=90°$，点P从点A开始以2cm/s的速度沿$A\to B\to C$的方向移动，点Q从点C开始以1cm/s的速度沿$C\to A\to B$的方向移动．若$AB=16$cm，$AC=12$cm，$BC=20$cm，已知点P，Q同时出发，设运动时间为t秒.



图①　　　图②

(1)如图①，若点P在线段AB上运动，点Q在线段CA上运动，当t为何值时，$QA=AP$；

(2)如图②，点Q在线段CA上运动，当t为何值时，$\triangle QAB$的面积等于$\triangle ABC$面积的$\frac{1}{4}$；

(3)当点P到达点C时，P、Q两点都停止运动，当t为何值时，$AQ=BP$

【答案】(1)$t=4$

(2)$t=9$

(3)$t=4$或$t=\frac{28}{3}$

【分析】（1）当P在线段AB上运动，Q在线段CA上运动时，$CQ=t$厘米，$AP=2t$厘米，则$AQ=(12-t)$厘米，由$AQ=AP$，可得方程$12-t=2t$，解方程即可．

（2）当Q在线段CA上时，$CQ=t$厘米，则$AQ=(12-t)$厘米，根据三角形QAB的面积等于三角形ABC面积的$\frac{1}{4}$，列出方程即可解决问题．

（3）分三种情形讨论即可①当$0<t\leqslant 8$时，P在线段AB上运动，Q在线段CA上运动．②当$8<t\leqslant 12$时，Q在线段CA上运动，P在线段BC上运动．③当$t>12$时，Q在线段AB上运动，P在线段BC上运动时，分别列出方程求解即可．

【详解】（1）解：当P在线段AB上运动，Q在线段CA上运动时，$CQ=t$厘米，$AP=2t$厘米，

则$AQ=(12-t)$厘米，

$\because QA=AP$，

$\therefore 12-t=2t$，

$\therefore t=4$．

即$t=4$秒时，$QA=AP$；

（2）解：当Q在线段CA上时，$CQ=t$厘米，

则$AQ=(12-t)$厘米，

$\because$三角形QAB的面积等于三角形ABC面积的$\frac{1}{4}$，

$\therefore\ \frac{1}{2}\cdot AB\cdot AQ=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\cdot AB\cdot AC$，

$\therefore\ \frac{1}{2}\times 16\times(12-t)=\frac{1}{8}\times 16\times 12$，

解得：$t=9$．

即$t=9$秒时，三角形QAB的面积等于三角形ABC面积的$\frac{1}{4}$；

（3）解：由题意可知，Q在线段CA上运动的时间为 12 秒，P在线段AB上运动时间为 8 秒，

①当$0 < t \leqslant 8$时，P在线段AB上运动，Q在线段CA上运动，$CQ = t$厘米，$AP = 2t$厘米，

则$AQ = (12-t)$厘米，$BP = (16-2t)$厘米，

$\because AQ = BP$，

$\therefore 12-t = (16-2t)$，

解得$t = 4$；

②当$8 < t \leqslant 12$时，Q在线段CA上运动，P在线段BC上运动，$CQ = t$厘米，

则$AQ = (12-t)$厘米，$BP = (2t-16)$厘米，

$\because AQ = BP$，

$\therefore 12-t = (2t-16)$，

解得$t = \frac{28}{3}$；

③当$t > 12$时，Q在线段AB上运动，P在线段BC上运动时，

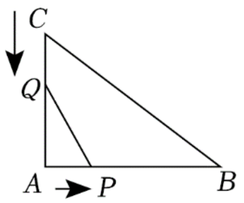
则$AQ = (t-12)$厘米，$BP = (2t-16)$厘米，

$\because AQ = BP$，

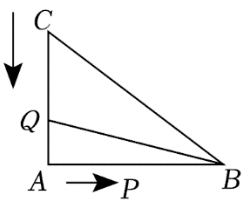
$\therefore t-12 = (2t-16)$，

解得$t = 4$，不合题意舍去

综上所述，t为 4 或$\frac{28}{3}$时，$AQ = BP$.



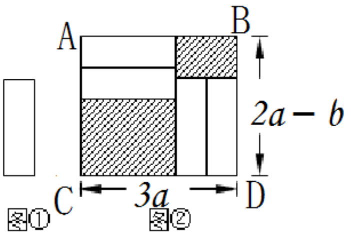
图①



图②

【点睛】本题属于三角形综合题，考查了三角形面积、一元一次方程以及分类讨论等知识，本题综合性强，解题的关键是理解题意，学会用方程的思想思考问题，属于中考常考题型.

【变式 6-1】（2023 上·广东广州·七年级广州市第二中学校考期末）把四张形状大小完全相同的小长方形卡片（如图①）不重叠地放在一个底面为长方形（长为 3a 厘米，宽为（2a－b）厘米）的盒子底部（如图②），盒子底面未被卡片覆盖的部分用阴影表示.



（1）求大长方形 ABCD 的周长；

（2）求图②中两块阴影部分周长之和．（用含 a，b 的式子表示）

【答案】(1)10a-2b;(2)8a-4b.

【分析】(1)直接运用长方形周长公式进行求解即可；（2）设小长方形的长为 m，宽为 n，然后根据分别表示两块阴影部分的周长，再求和即可.

【详解】解：（1）大长方形 ABCD 的周长为：2（3a+2a-b）=10a-2b；

（2）设小长方形的长为 m，宽为 n；

则大阴影的长宽分别为：3a-2n，2a-b-2n，周长为：2（3a-2n+2a-b-2n）=10a-2b-8n

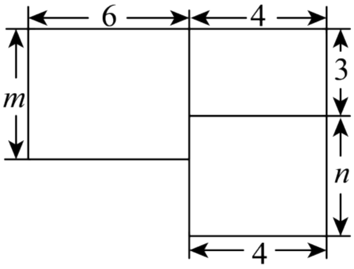
小阴影的长宽分别为：3a-m，2a-b-m，周长为：2（3a-m+2a-b-m）=10a-2b-4m

由图 2 可知：m+2n=3a

两块阴影部分周长之和 2（10a-2b）-4m-8n=2（10a-2b）-4（m+2n）=20a-4b-12a=8a-4b

【点睛】本题考查了列代数式，特别是第二问，需要设出一个量，然后列代数式，最后再根据题中的条件去除，这种设而不求的做法，值得借鉴.

【变式 6-2】（2023 上·内蒙古呼和浩特·七年级呼和浩特市第三十五中学校考期末）为了进行农业试验，某村开辟了A、B、C、D四块试验田．如图所示，A试验田可分割成 3 块长方形的小试验田（图中长度单位：米），B试验田的面积比A试验田面积的2倍还多$(m+4n-4)$平方米．



A试验田示意图

(1)用含m、n的式子表示A试验田的面积为______平方米，B试验田的面积为______平方米；

(2)已知C、D试验田的面积相等，且都比A试验田的面积少2m平方米．

①用含m、n的式子表示出A、B、C、D四块试验田的面积之和为多少平方米？

②当A、B、C、D四块试验田的面积之和为200平方米时，求B试验田的面积比C试验田的面积多多少平方米？

【答案】(1)$(6m+4n+12)$，$(13m+12n+20)$；

(2)① $(27m+24n+56)$；② 56．

【分析】（1）根据A试验田示意图可知A试验田的面积为3块长方形的面积之和列代数式；根据B试验田的面积比A试验田面积的2倍还多$(m+4n-4)$平方米列代数式即可；

（2）①先C、D试验田的面积相等，且都比A试验田的面积少$2m$平方米列出C、D试验田面积的代数式，再含m、n的式子表示出A、B、C、D四块试验田的面积之和；

②根据A、B、C、D四块试验田的面积之和为200平方米得出$9m+8n=48$，再用B试验田的面积减去C试验田的面积，整理，化简，即可求解；

本题考查了列代数式，整式的加减运算，求代数式的值，解题的关键是用含m、n的式子表示出A试验田的面积．

【详解】（1）解：由A试验田示意图可知，A试验田的面积为 $6m+4\times3+4n=(6m+4n+12)$平方米，

$\because B$试验田的面积比A试验田面积的2倍还多$(m+4n-4)$平方米，

$\therefore B$试验田的面积为：

$2(6m+4n+12)+(m+4n-4)$，

$=12m+8n+24+m+4n-4$，

$=(13m+12n+20)$平方米，

故答案为：$(6m+4n+12)$，$(13m+12n+20)$；

（2）解：①$\because C$、D试验田的面积相等，且都比A试验田的面积少$2m$平方米，

$\therefore C$、D试验田的面积为$6m+4n+12-2m=(4m+4n+12)$平方米，

$\therefore A$、B、C、D四块试验田的面积之和为：$(6m+4n+12)+(13m+12n+20)+2(4m+4n+12)$，

$=6m+4n+12+13m+12n+20+8m+8n+24$，

$=(27m+24n+56)$平方米；

②$\because 27m+24n+56=200$，

$\therefore 9m+8n=48$，

$\therefore 13m+12n+20-(4m+4n+12)$，

$=13m+12n+20-4m-4n-12$，

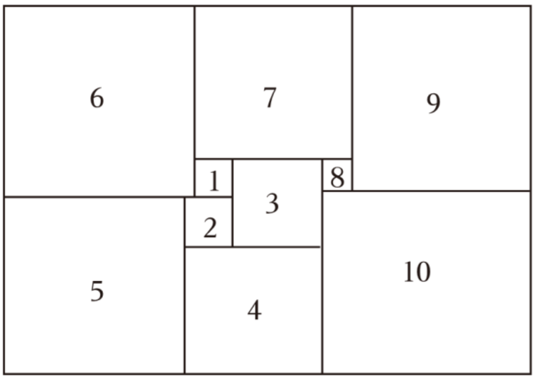
$=9m+8n+8$，

$=48+8$，

$=56$(平方米)，

∴B试验田的面积比C试验田的面积多56平方米．

【变式 6-3】（2023 上·贵州毕节·七年级统考期末）如图是 1925 年数学家莫伦发现的完美长方形，它恰能被分割成 10 个大小不同的正方形，其中正方形 1，2 的边长分别为 x，y，则正方形 3 的边长为$x+y$，正方形 4 的边长为$(x+y)+y=x+2y$．



(1)用含 x，y 的代数式继续表示正方形$5\sim9$的边长；

(2)已知在完美长方形中，$y=1.2x$，则当$x=5$时，求这个完美长方形的周长．

【答案】(1)见解析

(2)224

【分析】本题主要考查了整式的加减，列代数式，求代数式的值，正方形的边长，长方形的边长，熟练掌握正方形，长方形的性质是解题的关键．

（1）利用长方形与正方形的性质用 x，y 的代数式表示即可；

（2）利用正方形的周长的公式求得完美长方形的周长，再将当$y=1.2x$，$x=5$，代入运算即可．

【详解】（1）解：∵正方形 4 的边长为$x+2y$，

∴正方形 5 的边长为$(x+2y)+y=x+3y$；

正方形 6 的边长为$(x+3y)+(y-x)=4y$；

正方形 7 的边长为$4y-x$；

正方形 8 的边长为$(4y-x)-x-(x+y)=3y-3x$；

正方形9的边长为$(4y-x)+(3y-3x)=7y-4x$；

（2）这个完美长方形的周长为：

$2\times[(x+3y)+4y+4y+(4y-x)+(7y-4x)]$

$=2\times(22y-4x)$

$=44y-8x$.

当$y=1.2x$，$x=5$，

这个完美长方形的周长为：

$44y-8x=44\times1.2x-8x=44.8x=44.8\times5=224$

答：这个完美长方形的周长为224.

【题型7　由一元一次方程的解确定字母的值】

【例7】（2023上·广东广州·七年级统考期末）已知代数式$A=3ax^5+bx^3-2cx+4$，$B=ax^4+2bx^2-c$，$E=3ax^3+4bx^2-cx+3$，其中a，b，c为常数，当$x=1$时，$A=5$，$x=-1$时，$B=4$.

（1）求$3a+b-2c$的值；

（2）关于y的方程$2(a-c)y=(k-4b)y+20$的解为2，求k的值.

（3）当$x=-1$时，求式子$\frac{E-\frac{1}{3}A}{B}$的值.

【答案】（1）1；（2）-2；（3）3.

【分析】（1）将$x=1$时，$A=5$代入代数式A即可求得；

（2）将$y=2$，代入方程得到$2(a-c)=(k-4b)+10$①，将$x=-1$时，$B=4$代入代数式B得到：$a-c=4-2b$②，②代入①即可求得k；

（3）分别求得A,B,E的值，再代入代数式中求解即可.

【详解】（1）将$x=1$时，$A=5$代入代数式A，得：

$5=3a+b-2c+4$，

解得$3a+b-2c=1$；

（2）由题意，$y=2$时，

$2(a-c)\times2=(k-4b)\times2+20$

即$2(a-c)=(k-4b)+10$①

将$x=-1$时，$B=4$代入代数式B，得：

$4=a+2b-c$

即$a-c=4-2b$②

将②代入①得：

$2(4-2b)=(k-4b)+10$

解得$k=-2$

（3）将$x=-1$代入代数式E，得：

$E=-3a+4b+c+3$，

由（1）可知$3a+b-2c=1$①

$\therefore -3a=b-2c-1$

代入E，得：

$E=b-2c-1+4b+c+3=5b-c+2$

又由（2）可知$a-c=4-2b$

即$a-c+2b=4$

两边乘以 3，得：$3a-3c+6b=12$②

②-①得：$5b-c=11$③

将③代入代数式E，得：$E=11+2=13$

当$x=1$时，$A=5$，即$3a+b-2c=1$，

$\therefore$ $x=-1$时，$A=-3a-b+2c+4=-1+4=3$

由题意，当$x=-1$时，$B=4$

将$E=13,A=3,B=4$代入$\frac{E-\frac{1}{3}A}{B}$，得：

$$\frac{E-\frac{1}{3}A}{B}=\frac{13-\frac{1}{3}\times 3}{4}=3$$

【点睛】本题考查了整式的加减，等式的性质，一元一次方程的解，整体代入是解题的关键.

【变式 7-1】（2023 上·湖南长沙·七年级长沙市开福区青竹湖湘一外国语学校校考期末）我们把解相同的两个方程称为同解方程.例如：方程：$2x=6$与方程$4x=12$的解都为$x=3$，所以它们为同解方程.

(1)若方程$2x-3=11$与关于x的方程$4x+5=3k$是同解方程，求k的值；

(2)若关于的方程$3\left[x-2\left(x-\frac{k}{3}\right)\right]=4x$和$\frac{3x+k}{12}-\frac{1-5x}{8}=1$是同解方程，求$k$的值；

(3)若关于x的方程$2x-3a=b^2$和$4x+a+b^2=3$是同解方程，求 a 与 b 的关系.

【答案】（1）k =11；（2）$k=\frac{27}{8}$；(3) 6.

【分析】(1) 分别将两个关于 x 的方程解出来，根据同解方程的定义，列出等式，建立一个关于 m 的方程，

然后解答；

（2）分别将两个关于 x 的方程解出来，得到两个用含 a 的代数式表示的解，根据同解方程的定义，列出等式，建立一个关于 a 的方程，然后解答；

（3）分别求出两个关于 x 的方程的解，根据同解方程的定义，列出关于 a,b 的等式.

【详解】解：（1）解方程$2x-3=11$得 $x=7$，

把 $x=7$ 代入$4x+5=3k$得 $28+5=3k$，

解得$k\ =11$；

（2）解关于 x 的方程$3\left[x-2\left(x-\frac{k}{3}\right)\right]=4x$得 $x=\ \frac{2}{7}k$，

解关于 x 的方程$\frac{3x+k}{12}-\frac{1-5x}{8}=1$得 $x=\ \frac{27-2k}{21}$，

∵方程$3\left[x-2\left(x-\frac{k}{3}\right)\right]=4x$和$\frac{3x+k}{12}-\frac{1-5x}{8}=1$是同解方程，

∴$\frac{2k}{7}=\frac{27-2k}{21}$，

解得$k=\frac{27}{8}$；

(3)解关于x的方程$2x-3a=b^2$得$x=\frac{b^2+3a}{2}$，

解关于x的方程$4x+a+b^2=3$得$x=\frac{3-b^2-a}{4}$，

∵$2x-3a=b^2$和$4x+a+b^2=3$是同解方程，

∴$\frac{3-b^2-a}{4}=\frac{b^2+3a}{2}$，

∴$3b^2=3-7a$，

【点睛】本题考查了同解方程及一元一次方程的解法，正确理解同解方程的定义是解题的关键.

【变式 7-2】（2023·江西宜春·七年级江西省丰城中学校考期末）已知 m，n 是有理数，单项式 $-xny$ 的次数为 3，而且方程（m+1）$x^2+mx-tx+n+2=0$ 是关于 x 的一元一次方程.

（1）若该方程的解是 $x=3$，求 t 的值.

（2）若题目中关于 x 的一元一次方程的解是整数，请求出整数 t 的值.

【答案】（1）$t=\frac{1}{3}$；（2）当 x=1 时，t=3，当 x=4 时，t=0，当 x=-1 时，t=-5，当 x=-4 时，t=-2，当 x=2 时，t=1，当 x=-2 时，t=-3.

【分析】（1）根据单项式的定义和一元一次方程的定义可得 $n=2$，$m=-1$，然后将 $x=3$ 代入可得 t 的值；

（2）分别将第一问中的 m 和 n 的值代入，根据整数解和整数 t 的条件可得结论，

【详解】解：（1）由题意得：$n=2$，$m=-1$；

$\therefore -x-xt+4=0$，

当 $x=3$ 时，则 $-3-3t+2+2=0$，

$\therefore t=\frac{1}{3}$；

（2）$(m+1)x^2+mx-tx+n+2=0$，

$\because n=2$，$m=-1$，

$\therefore -x-xt+4=0$，

$x=\frac{4}{t+1}$

$t=\frac{4}{x}-1$

$\therefore t\neq-1$，$x\neq0$

$\because t$ 是整数，x 是整数，

$\therefore$当 $x=1$ 时，$t=3$，

当 $x=4$ 时，$t=0$，

当 $x=-1$ 时，$t=-5$，

当 $x=-4$ 时，$t=-2$，

当 $x=2$ 时，$t=1$，

当 $x=-2$ 时，$t=-3$.

【点睛】本题考查了单项式的定义和一元一次方程的定义，熟练掌握这些定义是关键，并注意方程有整数解的条件.

【变式 7-3】（2023 上·广东广州·七年级广州市第五中学校考期末）已知代数式$A=3ax^5+bx^3-2cx+4$，$B=ax^4+2bx^2-c$，$E=3ax^3+4bx^2-cx+3$，其中a，b，c为常数，当$x=1$时，$A=5$，$x=-1$时，$B=4$.

(1)求$3a+b-2c$的值；

(2)关于y的方程$(k-4b)y=2(a-c)y-20$的解为$y=2$，求k的值.

(3)当$x=-1$时，求式子$\frac{E-\frac{1}{3}A}{B}$的值.

【答案】(1)1

(2)-2

(3)3

【分析】（1）将$x=1$时，$A=5$代入代数式 A，然后再化简即可解答；

（2）将$y=2$代入方程得到：$2(k-4b)=4(a-c)-20$，再将$x=-1$时$B=4$代入代数式 B 得到：$4=a+2b-c$，然后将上面两个等式通过整理变形即可求出 k 值；

（3）先分别求出 A、B、E，再代入所求的代数式计算即可．

【详解】（1）解：将$x=1$时，$A=5$代入代数式 A，可得：$5=3a+b-2c+4$，即$3a+b-2c=1$．

（2）解：由题意可知：当$y=2$时，

$(k-4b)\times 2=2(a-c)\times 2-20$，

整理得$2(k-4b)=4(a-c)-20$①，

将$x=-1$时$B=4$代入代数式 B 得到：$4=a+2b-c$，

整理得：$a-c=4-2b$②，

将②式代入①中可得：$2(k-4b)=4(4-2b)-20$，

整理得$2k-8b=16-8b-20$，解得：$k=-2$．

（3）解：$\because 3a+b-2c=1$，$a=4-2b+c$，

$\therefore 3(4-2b+c)+b-2c=1$，整理得：$5b-c=11$，

$\because 3a+b-2c=1$，

$\therefore -3a=b-2c-1$

$\therefore$当$x=-1$时，$E=-3a+4b+c+3=b-2c-1+4b+c+3=5b-c+2=11+2=13$，

$A=3ax^5+bx^3-2cx+4=-3a-b+2c+4=-(3a+b-2c)+4=-1+4=3$，$B=4$，

$\therefore \frac{E-\frac{1}{3}A}{B}=\frac{13-\frac{1}{3}\times 3}{4}=\frac{12}{4}=3$．

【点睛】本题主要考查了整式的加减涉及到一元一次方程的解等知识点，掌握整体思想成为解答本题的关键．

【题型 8　一元一次方程的实际应用】

【例 8】（2023 上·重庆·七年级重庆市人和中学校考期末）利用一元一次方程解应用题：某学校刚完成一批结构相同的学生宿舍的修建，这些宿舍地板需要铺瓷砖，一天 4 名一级技工去铺 4 个宿舍，结果还剩$12\mathrm{m}^2$地面未铺瓷砖；同样时间内 6 名二级技工铺 4 个宿舍刚好完成，已知每名一级技工比二级技工一天多铺$2\mathrm{m}^2$瓷砖．

(1)求每个宿舍需要铺瓷砖的地板面积．

(2)现该学校有 26 个宿舍的地板和$74\mathrm{m}^2$的走廊需要铺瓷砖，该工程队一开始有 4 名一级技工来铺瓷砖，施

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/248100114104007003