1.4 复变函数

一、复变函数定义

1.复变函数定义:

设G是一个复数$z=x+iy$的集合.如果有一个确定的法则存在,按这个法则,对于集合G中的每一个复数z,就有一个或几个复数$w=u+iv$与之对应,那末称复变数w是复变数z的函数(简称复变函数),记作 $w=f(z)$.

2.单(多)值函数定义:

如果z的一个值对应着一个w的值,那末我们称函数$f(z)$是单值的

如果z的一个值对应着两个或两个以上w的值,那末我们称函数$f(z)$是多值的

3.定义集合和函数值集合:

集合G称为$f(z)$的定义集合(定义域);

对应于G中所有z的一切w值所成的集合G^*,称为函数值集合

4. 复变函数与实变量之间关系:

复变函数w与自变量z之间的关系$w=f(z)$

相当于两个关系式

$$u=u(x,y),\quad v=v(x,y),$$

它们确定了自变量为x和y的两个二元实变函数

比如，函数$w=z^2$，令$z=x+iy$，$w=u+iv$，

则 $u+iv=(x+iy)^2=x^2-y^2+2xyi$，

于是函数$w=z^2$对应于两个二元实变函数:

$$u=x^2-y^2,\quad v=2xy.$$

二、映射概念

1. 引入:

对于复变函数由于它反映了两对变量u, v和x, y之间的对应关系,因而无法用同一平面内的几何图形表示出来,必须看成是两个复平面上的点集之间的对应关系.

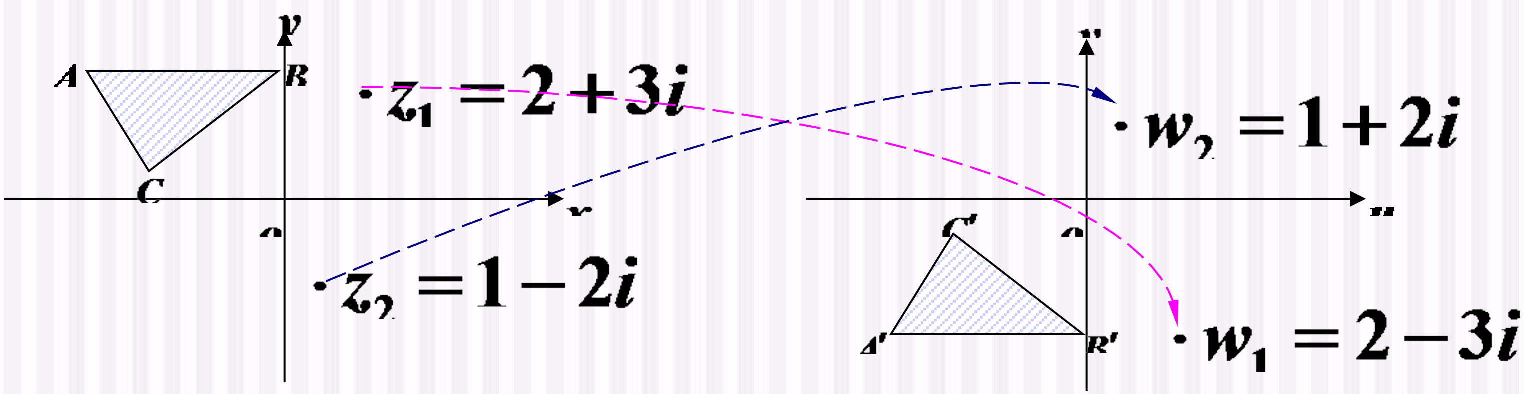
这个映射通常简称为由函数$w = f(z)$所构成的映射

如果G中的点z被映射$w = f(z)$映射成G^*中的点w,那末w称为z的象(映象),而z称为w的原象

3. 两个特殊映射:

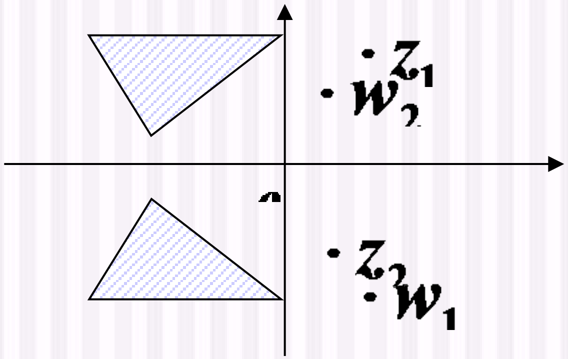
(1) 函数$w=\bar{z}$构成的映射

将z平面上的点$z=a+ib$映射成w平面上的点$w=a-ib$.

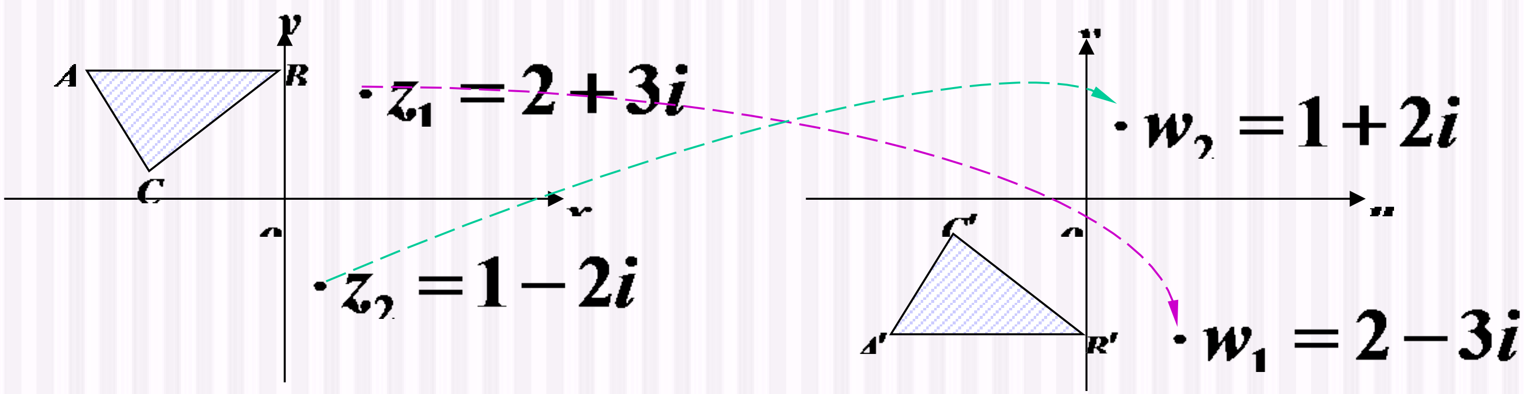


$z_1\to w_1,\quad z_2\to w_2,\qquad \Delta ABC\to\Delta A'B'C'$

如果把z平面和w平面重叠在一起不难看出$w=\bar{z}$是关于实轴的一个对称映射.



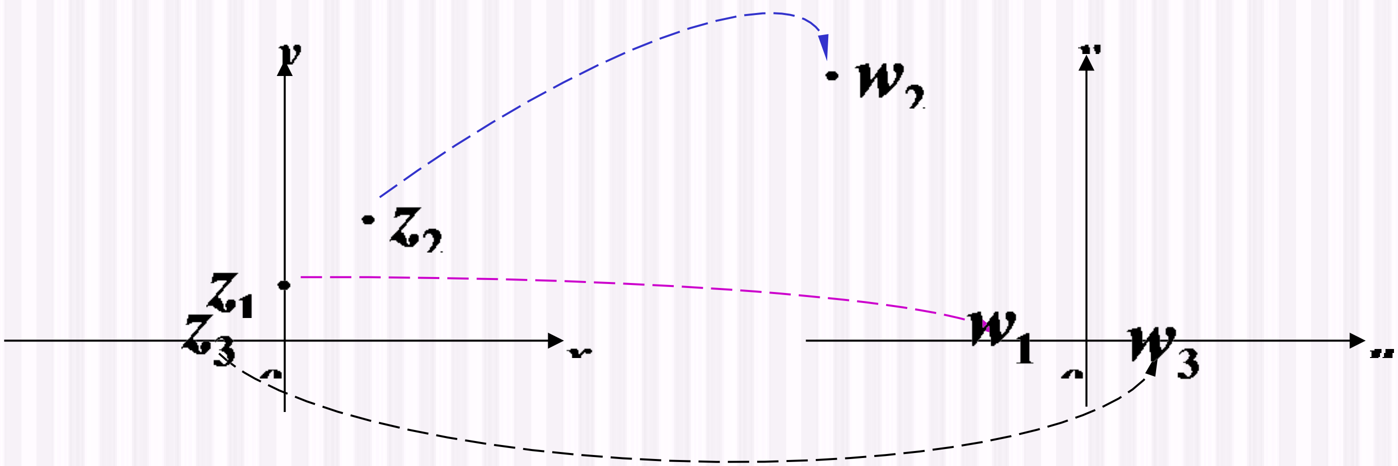
且是全同图形.



$z_1 \to w_1,\quad z_2 \to w_2,\qquad \Delta ABC \to \Delta A'B'C'$

(2) 函数 $w = z^2$ 构成的映射

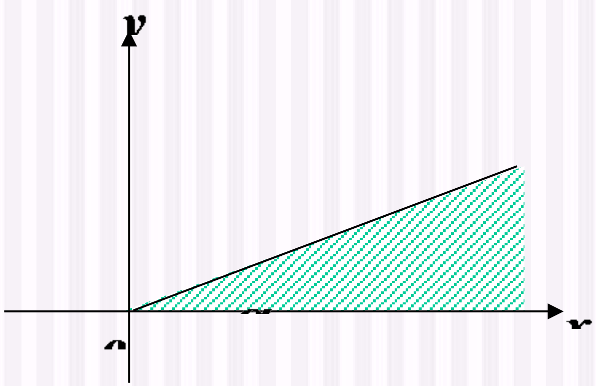
显然将 z 平面上的点 $z_1 = i, z_2 = 1 + 2i, z_3 = -1$ 映射成 w 平面上的点 $w_1 = -1, w_2 = -3 + 4i, w_3 = 1.$

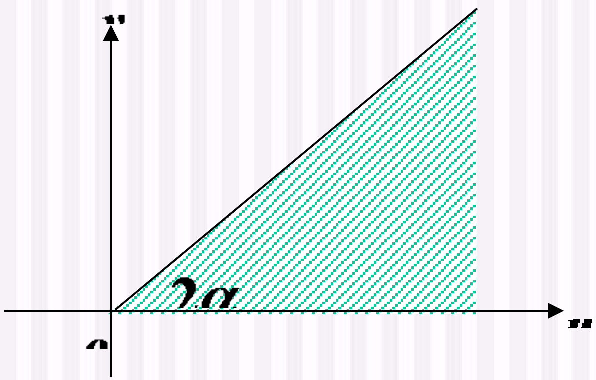


(2) 函数 $w=z^2$ 构成的映射

依据复数乘法公式可知,

映射 $w=z^2$ 将 z 的辐角增大一倍





将 z 平面上与实轴交角为 α 的角形域映射成 w 平面上与实轴交角为 2α 的角形域

(2) 函数$w=z^2$构成的映射

函数$w=z^2$对应于两个二元实变函数:

$$u=x^2-y^2, \quad v=2xy.$$

它把z平面上的两族分别以直线$y=\pm x$和坐标轴为渐近线的等轴双曲线

$$x^2-y^2=c_1, \quad 2xy=c_2,$$

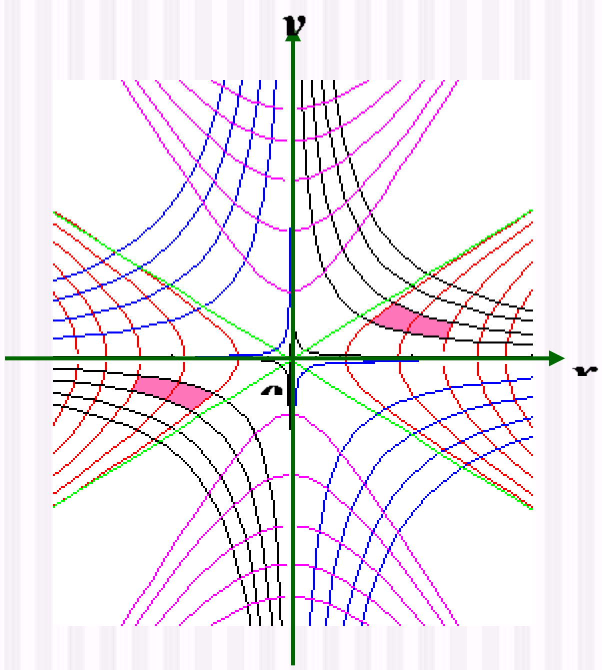
分别映射成w平面上的两族平行直线

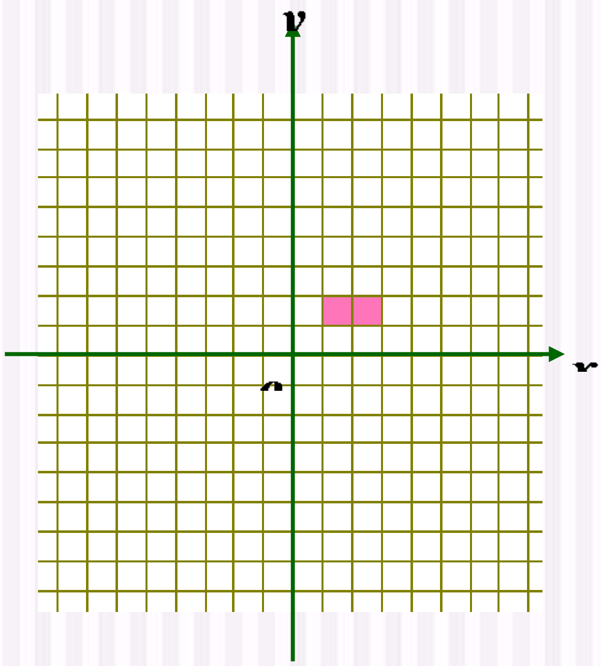
$$u=c_1, \quad v=c_2.$$

(以下页图)

(2) 函数 $w = z^2$ 构成的映射

将第一图中两块阴影部分映射成第二图中同一个长方形.





(2) 函数 $w=z^2$ 构成的映射

直线 $x=\lambda$ 的象的参数方程为

$u=\lambda^2-y^2,\quad v=2\lambda y.\quad$ (y 为参数)

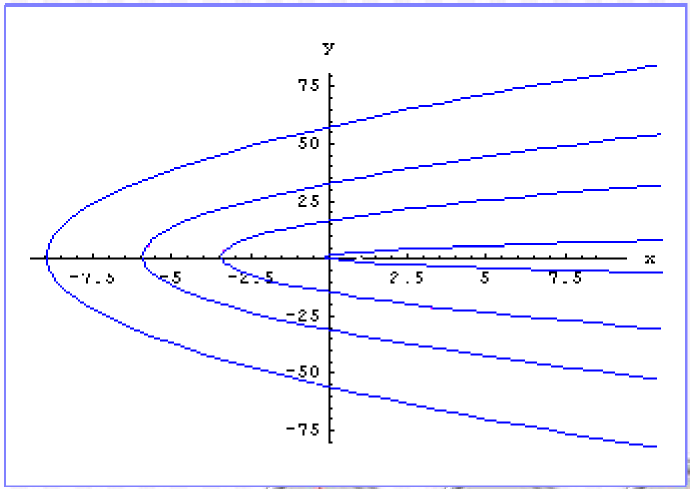
消去参数 y 得: $v^2=4\lambda^2(\lambda^2-u),$

以原点为焦点,开口相左抛物线.(图中红色曲线)

同理直线 $y=\mu$ 的象为:

$v^2=4\mu^2(\mu^2+u),$

以原点为焦点,开口相右抛物线.(图中蓝色曲线)



4. 反函数定义:

设 $w=f(z)$ 的定义集合为 z 平面上的集合 G, 函数值集合为 w 平面上的集合 G^*, 那末 G^* 中的每一个点 w 必将对应着 G 中的一个(或几个)点. 于是在 G^* 上就确定了一个单值(或多值)函数 $z=\varphi(w)$, 它称为函数 $w=f(z)$ 的反函数, 也称为映射 $w=f(z)$ 的逆映射.

依据反函数定义,

$$\forall w \in G^*,\quad w = f[\varphi(w)],$$

当反函数为单值函数时, $z = \varphi[f(z)],\ z \in G.$

如果函数(映射) $w = f(z)$ 与它的反函数(逆映射) $z = \varphi(w)$ 都是单值的那末称函数(映射) $w = f(z)$ 是一一对应的也可称集合 G 与集合 G^* 是一一对应的

今后不再区分函数与映射.

5. 复合函数定义:

设函数 $w=f(h)$ 定义域为 D_1，函数 $h=\varphi(z)$ 定义域为 D_2，值域 $G\subset D_1$. 若对任一 $z\in D_2$，经过 $h=\varphi(z)$ 有确定 $h\in G\subset D_1$

与之对应，从而经过 $w=f(h)$ 有确定值 w 与 z 对应，按照函数定义，在 D_2 中确定了 w 是 z 函数，记作 $w=f[\varphi(z)]$. 称其为 $w=f(h)$ 与 $h=\varphi(z)$ 复合函数.

三、经典例题

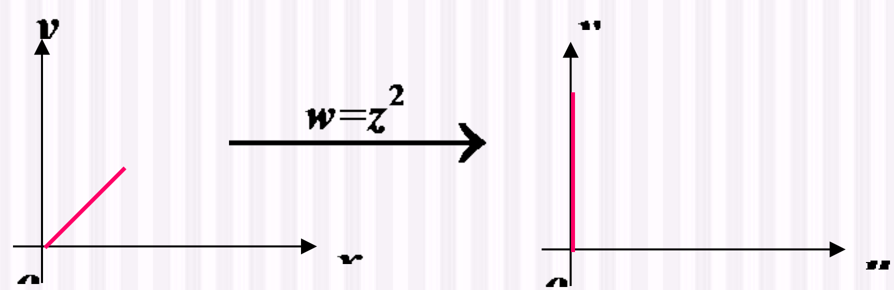
例1　在映射$w=z^2$下求下列平面点集在w平面上的象:

(1) 线段$0<r<2,\ \theta=\dfrac{\pi}{4}$;

解　设$z=re^{i\theta}$,

$$w=\rho e^{i\varphi},$$

则 $\rho=r^2,\quad \varphi=2\theta,$



还是线段.

故线段$0<r<2,\ \theta=\dfrac{\pi}{4}$映射为$0<\rho<4,\ \varphi=\dfrac{\pi}{2}$,

例1　在映射$w=z^2$下求下列平面点集在w平面上的象:

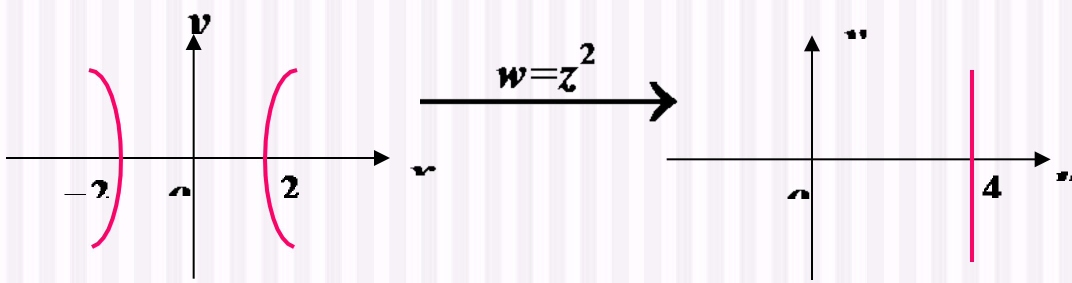
(2) 双曲线$x^2-y^2=4$;

解　令$z=x+iy$, $w=u+iv$,

则$u+iv=x^2-y^2+2xyi$,　　$u=x^2-y^2$,

$x^2-y^2=4$

$\Rightarrow u=4$,



平行于v轴的直线

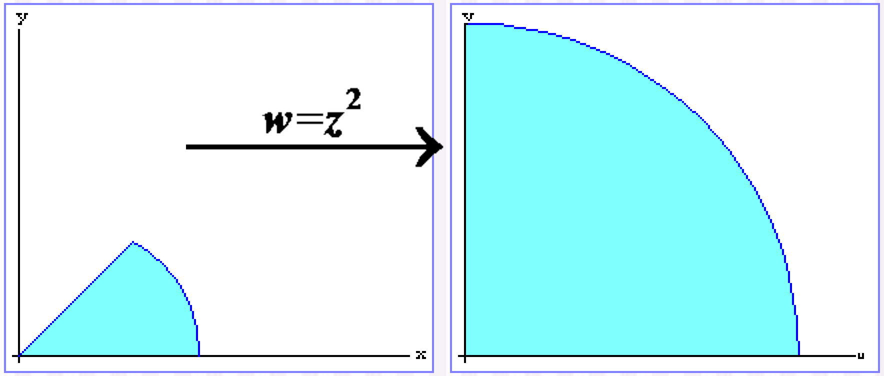
例1 在映射 $w=z^2$ 下求下列平面点集在 w 平面上的象:

(3) 扇形域 $0<\theta<\dfrac{\pi}{4},\ 0<r<2.$

解 设 $z=re^{i\theta}$, $w=\rho e^{i\varphi}$, 则 $\rho=r^2$, $\varphi=2\theta$,

故扇形域 $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$,

$0<r<2$ 映射为



$0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}, 0<\rho<4$, 仍是扇形域.

例2 对于映射$w=z+\dfrac{1}{z}$，求圆周$|z|=2$的象

解 令$z=x+iy$，$w=u+iv$，

映射$w=z+\dfrac{1}{z}\Rightarrow u+iv=x+iy+\dfrac{x-iy}{x^2+y^2}$，

于是 $u=x+\dfrac{x}{x^2+y^2}$，$v=y-\dfrac{y}{x^2+y^2}$，

圆周$|z|=2$的参数方程为

$$\begin{cases} x=2\cos\theta \\ y=2\sin\theta, \end{cases} \quad 0\le\theta\le 2\pi$$

所以象参数方程为 $\begin{cases} u = \dfrac{5}{2}\cos\theta \\ v = \dfrac{3}{2}\sin\theta, \end{cases}$ $0 \le \theta \le 2\pi$

表示w平面上的椭圆 $\dfrac{u^2}{\left(\dfrac{5}{2}\right)^2} + \dfrac{v^2}{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2} = 1.$

四、小结与思索

复变函数以及映射概念是本章一个重点.

注意：复变函数与一元实变函数定义完全一样,只要将后者定义中“实数”换为“复数”就行了.

思索题

“函数”、“映射”、“变换”等名词有没有区分？

思索题答案

在复变函数中, 对“函数”、“映射”、“变换”等名词使用, **没有本质上区分**. 只是函数普通是就数对应而言, 而映射与变换普通是就点对应而言.

1.5 初等函数

一、指数函数

1.指数函数定义:

$$w=f(z)=e^{z}=e^{x+yi}=e^{x}(\cos y+i\sin y)$$

2.指数函数性质:

(1) 回归性质：当$z=x$时，$f(z)=e^{z}=e^{x}$，

就是实数函数的指数函数.

(2) 模与幅角性质:

指数函数定义等价于关系式:

$$\left.\begin{aligned} &|e^z| = e^x, \\ &\operatorname{Arg}(e^z) = y + 2k\pi, \end{aligned}\right\} \text{(其中}k\text{为任何整数)}$$

指数函数e^z 可以用$\exp z$ 来表示

$$\exp z = e^x(\cos y + i\sin y)$$

注意e^z 没有幂的意义,只是代替$\exp z$ 的符号.

(3) 运算性质: $\exp z_1 \cdot \exp z_2 = \exp(z_1 + z_2)$

证 设 $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$,

左端 $= \exp z_1 \cdot \exp z_2$

$$= e^{x_1}(\cos y_1 + i\sin y_1) \cdot e^{x_2}(\cos y_2 + i\sin y_2)$$

$$= e^{x_1+x_2}[(\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2)]$$

$$+ i[(\sin y_1 \cos y_2 + \cos y_1 \sin y_2)]$$

$$= e^{x_1+x_2}[\cos(y_1 + y_2) + i\sin(y_1 + y_2)]$$

$= \exp(z_1 + z_2) =$ 右端

(4) $\exp z$ 的周期性质：

$\exp z$ 的周期是 $2k\pi i$,

即 $e^{z+2k\pi i}=e^{z}\cdot e^{2k\pi i}=e^{z}$. (其中 k 为任何整数)

该性质是实变指数函数 e^{x} 所没有的.

例1 设 $z=x+iy$, 求 (1) $\left|e^{i-2z}\right|$; (2) $\left|e^{z^{2}}\right|$; (3) $\operatorname{Re}(e^{\frac{1}{z}})$;

解 因为 $e^{z}=e^{x+iy}=e^{x}(\cos y+i\sin y)$

所以其模 $\left|e^{z}\right|=e^{x}$, 实部 $\operatorname{Re}(e^{z})=e^{x}\cos y$.

(1) $e^{i-2z}=e^{i-2(x+iy)}=e^{-2x+i(1-2y)}$,

$$\left|e^{i-2z}\right|=e^{-2x};$$

(2) $e^{z^2}=e^{(x+iy)^2}=e^{x^2-y^2+2xyi}$,

$$\left|e^{z^2}\right|=e^{x^2-y^2};$$

(3) $e^{\frac{1}{z}}=e^{\frac{1}{x+yi}}=e^{\frac{x}{x^2+y^2}+i\frac{-y}{x^2+y^2}}$,

$$\mathrm{Re}(e^{\frac{1}{z}})=e^{\frac{x}{x^2+y^2}}\cos\frac{y}{x^2+y^2}.$$

例2 求出以下复数辐角主值:

(1)e^{2+i}; (2)e^{2-3i}; (3)e^{3+4i}; (4)e^{-3-4i}; (5)$e^{i\alpha}-e^{i\beta}$

$(0\le\beta<\alpha\le2\pi)$.

解 因为$e^{z}=e^{x+iy}=e^{x}(\cos y+i\sin y)$的辐角

$$\mathrm{Arg}\,e^{z}=y+2k\pi \quad (k\text{为整数})$$

其辐角主值$\arg e^{z}$为区间$[-\pi,\pi]$内的一个辐角

(1) $\mathrm{Arg}\,e^{2+i}=1+2k\pi,\qquad \arg e^{2+i}=1;$

(2) $\mathrm{Arg}\,e^{2-3i}=-3+2k\pi,\quad \arg e^{2-3i}=-3;$

$(3)e^{3+4i}$;

$$\mathrm{Arg}\,e^{3+4i} = 4 + 2k\pi, \quad \arg e^{3+4i} = 4 - 2\pi;$$

$(4)e^{-3-4i}$;

$$\mathrm{Arg}\,e^{-3-4i} = -4 + 2k\pi, \quad \arg e^{-3-4i} = -4 + 2\pi;$$

$$(5)e^{i\alpha} - e^{i\beta} = \cos\alpha + i\sin\alpha - (\cos\beta + i\sin\beta)$$

$$= (\cos\alpha - \cos\beta) + i(\sin\alpha - \sin\beta)$$

$$= -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} + 2i\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$= 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\left(-\sin\frac{\alpha+\beta}{2} + i\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$= 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\left(\cos\frac{\pi+\alpha+\beta}{2} + i\sin\frac{\pi+\alpha+\beta}{2}\right)$$

因为 $0 \le \beta < \alpha \le 2\pi$, $\sin\frac{\alpha-\beta}{2} > 0$,

上式就是复数 $e^{i\alpha} - e^{i\beta}$ 的三角表示式

所以 $\mathrm{Arg}(e^{i\alpha} - e^{i\beta}) = \frac{\pi+\alpha+\beta}{2} + 2k\pi$,

当 $\alpha+\beta \le \pi$ 时, $\arg(e^{i\alpha} - e^{i\beta}) = \frac{\pi+\alpha+\beta}{2}$,

当 $\alpha+\beta > \pi$ 时, $\arg(e^{i\alpha} - e^{i\beta}) = \frac{\pi+\alpha+\beta}{2} - 2\pi$.

例3 求函数 $f(z)=e^{\frac{z}{5}}$ 的周期

解 e^{z} 的周期是 $2k\pi i$,

$$f(z)=e^{\frac{z}{5}}=e^{\frac{z}{5}+2k\pi i}=e^{\frac{z+10k\pi i}{5}}$$

$$=f(z+10k\pi i),$$

故函数 $f(z)=e^{\frac{z}{5}}$ 的周期是 $10k\pi i$.