

专题 12 将军饮马与勾股定理

【例题讲解】

请阅读下列材料：问题：如图 1，点 A 、 B 在直线 l 的同侧，在直线 l 上找一点 P ，使得 $AP+BP$ 的值最小。小明的思路是：如图 2，作点 A 关于直线 l 的对称点 A' ，连接 $A'B$ ，则 $A'B$ 与直线 l 的交点 P 即为所求。

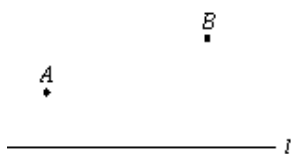


图1

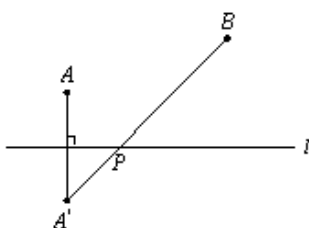


图2

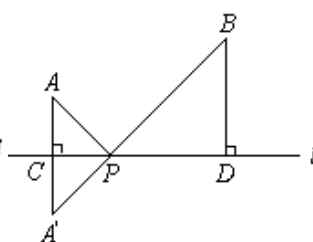


图3

请你参考小明同学的思路，探究并解决下列问题：

(1)如图 3，在图 2 的基础上，设 AA' 与直线 l 的交点为 C ，过点 B 作 $BD \perp l$ ，垂足为 D ，若 $CP=1$ ， $PD=2$ ， $AC=1$ ，写出 $AP+BP$ 的值；

(2)将 (1) 中的条件“ $AC=1$ ”去掉，换成“ $BD=4-AC$ ”，其它条件不变，写出此时 $AP+BP$ 的值；

(3)请结合图形，求出 $\sqrt{(2m-2)^2+1}+\sqrt{(8-2m)^2+4}$ 的最小值。

(1)解：如图 2，

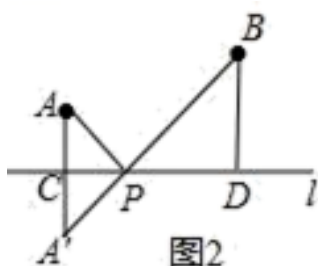


图2

$\because AA' \perp l, AC=1, PC=1,$

$\therefore \triangle APC$ 为等腰直角三角形，

$\therefore PA = \sqrt{AC^2 + CP^2} = \sqrt{2}, \angle APO = 45^\circ,$

$\therefore$ 作点 A 关于直线 l 的对称点 A' ，

$\therefore PA' = PA = \sqrt{2}, \angle A'PC = \angle APC = 45^\circ, \therefore BD \perp l,$

$\therefore \angle B = 90^\circ - \angle BPD = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ, \therefore \angle BPD = \angle B, \therefore PD = BD = 2,$

$\therefore BP = \sqrt{PD^2 + BD^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}, \therefore AP + PB = \sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2};$

(2)解：作 $A'E \parallel l$ ，交 BD 的延长线于 E ，如图 3，

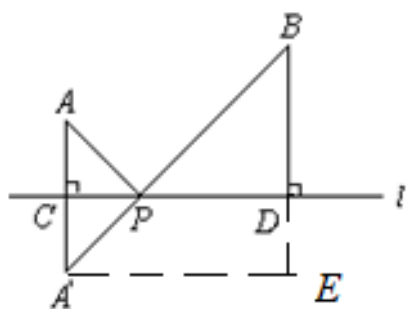


图3

$\therefore A'C \perp l, BD \perp l,$

$\therefore \angle A'CD = \angle EDC = 90^\circ,$

$\therefore A'E \parallel l, \therefore A'C \perp A'E,$

$\therefore \angle CA'E = 90^\circ,$

$\therefore \angle A'CD = \angle EDC = \angle CA'E = 90^\circ,$

∴ 四边形 $A'EDC$ 是矩形,

∴ $A'E = DC = PC + PD = 3$, $DE = A'C = AC$,

∴ $BD = 4 - AC$, ∴ $BD + AC = BD + DE = 4$, 即 $BE = 4$, 在 $RT\triangle A'BE$ 中, $A'B = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$,

∴ $AP + BP = 5$,

(3)解: 如图 3, 设 $AC = 2m - 2$, $PC = 1$, 则 $PA = \sqrt{(2m-3)^2 + 1}$; 设 $BD = 8 - 2m$, $PD = 2$, 则 $PB =$

$\sqrt{(8-2m)^2 + 4}$, ∴ $DE = A'C = AC = 2m - 2$,

∴ $BE = BD + DE = 2m - 2 + 8 - 2m = 6$, $A'E = CD = PC + PD = 3$,

∴ $PA + PB = A'B = \sqrt{A'E^2 + BE^2} = \sqrt{3^2 + 6^2} = 3\sqrt{5}$.

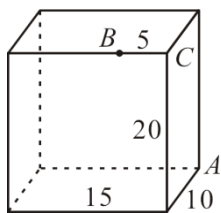
即 $\sqrt{(2m-3)^2 + 1} + \sqrt{(8-2m)^2 + 4}$ 的最小值为 $3\sqrt{5}$.

【综合解答】

1. 如图所示, 有一个长、宽各 2 米, 高为 3 米的无盖长方体纸盒放在桌面上, 一只昆虫从顶点 A 要爬到顶点 B, 那么这只昆虫爬行的最短路程为 ()

- A. 3 米 B. 4 米 C. 5 米 D. 6 米

2. 如图, 长方体的长为 15, 宽为 10, 高为 20, 点 B 在棱上且离点 C 的距离为 5, 一只蚂蚁如果要沿着长方体的表面从点 A 爬到点 B, 需要爬行的最短距离是 ()



- A. 25 B. $5\sqrt{29}$ C. $10\sqrt{5} + 5$ D. $5\sqrt{37}$

3. 如图, 点 A, B 分别为 x 轴、y 轴上的动点, $AB = 2$, 点 M 是 AB 的中点, 点 $C(0, 3)$, $D(8, 0)$, 过 C 作 $CE \parallel x$ 轴. 点 P 为直线 CE 上一动点, 则 $PD + PM$ 的最小值为 ()

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要
下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/248106104140006073>