

第9章 压杆稳定

- ▶ §9-1 压杆稳定性的概念
- ▶ §9-2 细长中心受压直杆临界力的欧拉公式
- ▶ §9-3 不同杆端约束下细长压杆临界力的欧拉公式·压杆的长度因数
- ▶ §9-4 欧拉公式的应用范围·临界应力总图
- ▶ §9-5 实际压杆的稳定因数
- ▶ §9-6 压杆的稳定计算·压杆的合理截面



§9-1 压杆稳定性的概念

实际的受压杆件

实际的受压杆件因为:

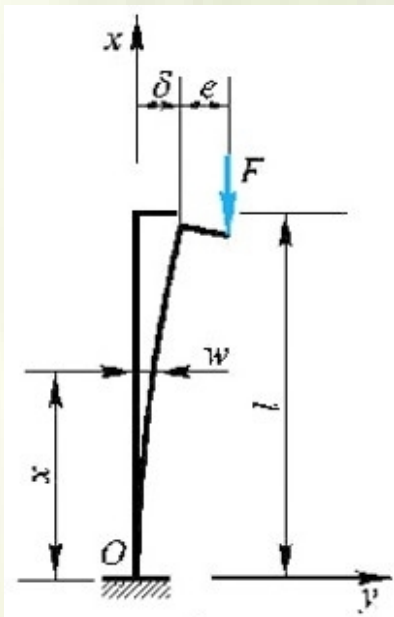
1. 其轴线并非理想的直线而存在初弯曲,
2. 作用于杆上的轴向压力有“偶尔”偏心,
3. 材料性质并非绝对均匀,

所以在轴向压力作用下会发生弯曲变形, 且由此引起的侧向位移随轴向压力的增大而更快地增大。



对于细长的压杆(大柔度压杆), 最终会因为弹性的侧向位移过大而丧失承载能力;

对于中档细长的压杆(中档柔度压杆)则当侧向位移增大到一定程度时会在弯—压组合变形下发生强度破坏(压溃)。



对于实际细长压杆的上述力学行为, 假如把初弯曲和材质不均匀的影响都归入偶尔偏心的影响, 则可利用大柔度弹性直杆受偏心压力作用这一力学模型来研究。



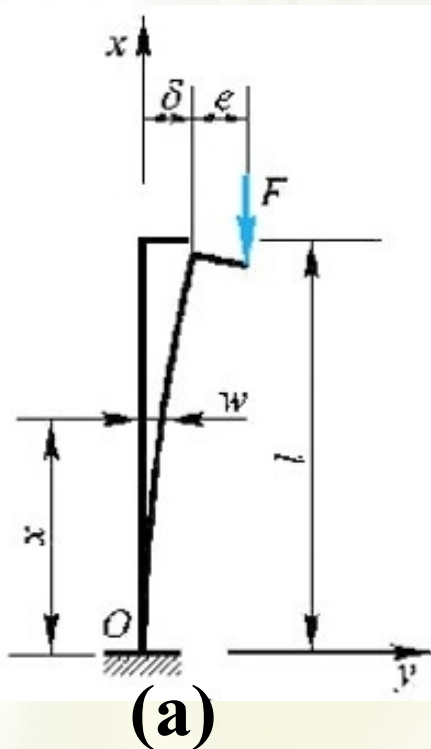
图(a)为下端固定，上端自由的实际压杆的力学模型；为列出用来谋求 $F-\delta$ 关系所需挠曲线近似微分方程而计算横截面上的弯矩时，需把侧向位移考虑在内，即

$$M(x) = F(e + \delta - w),$$

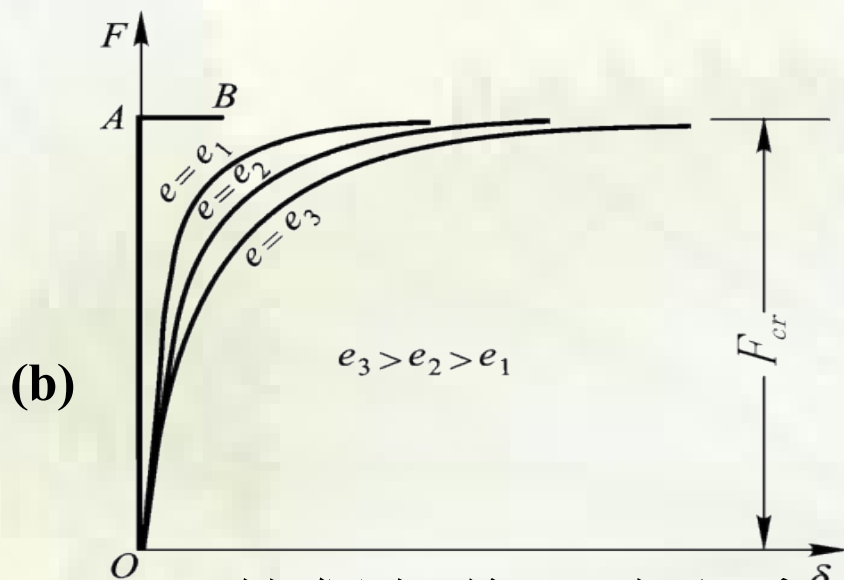
这么得到的挠曲线近似微分方程

$$EI_z w'' = F(e + \delta - w)$$

和积分后得到的挠曲线方程便反应了大柔度杆偏心受压时侧向位移的影响。



按照这一思绪求得的细长压杆在不同偏心距 e 时偏心压力 F 与最大侧向位移 d 的关系曲线,如图b所示。

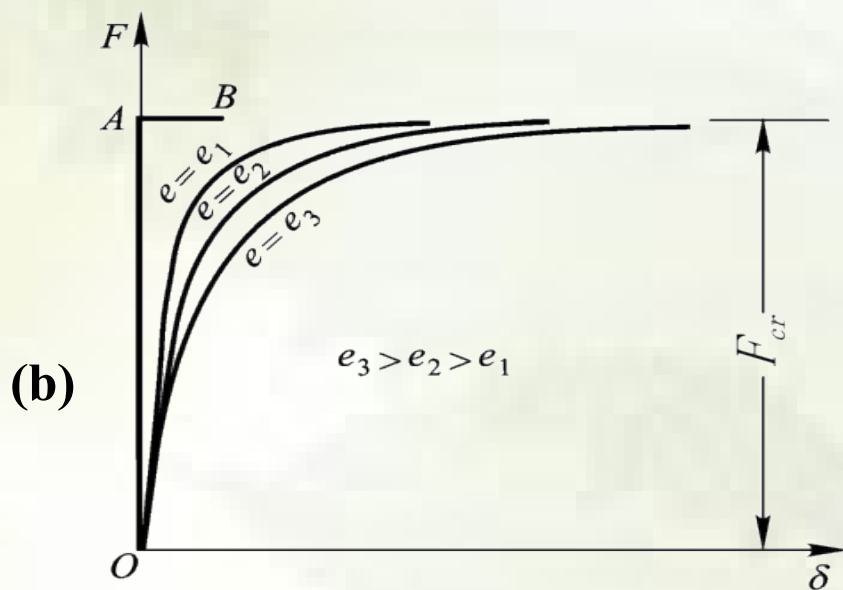


由图可见虽然偶尔偏心的程度不同 ($e_3 > e_2 > e_1$), 但该细长压杆丧失承载能力时偏心压力 F_{cr} 却相同。其他杆端约束情况下细长压杆的 F - δ 关系曲线其特点与图b相同。



抽象的细长中心受压直杆

由图b可知，当偶尔偏心的偏心距 $e \rightarrow 0$ 时，细长压杆的 $F-\delta$ 关系曲线就逼近折线 OAB ，而假如把细长压杆抽象为无初弯曲，轴向压力无偏心，材料绝对均匀的理想中心压杆，则它的 $F-\delta$ 关系曲线将是折线 OAB 。

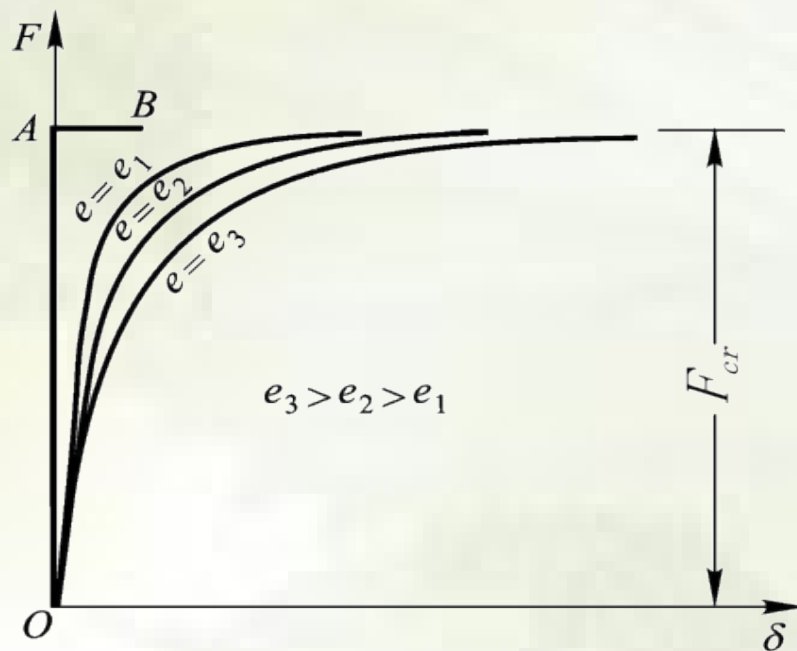


由此引出了有关压杆失稳 (buckling) 这一抽象的概念：当细长中心压杆上的轴向压力 F 不大于 F_{cr} 时，杆的直线状态的平衡是稳定的；当 $F = F_{cr}$ 时杆既可在直线状态下保持平衡 ($\delta = 0$)，也能够能够在微弯状态下保持平衡，也就是说 $F = F_{cr}$ 时理想中心压杆的直线平衡状态是不稳定的，压杆在轴向压力 F_{cr} 作用下会丧失原有的直线平衡状态，即发生失稳。 F_{cr} 则是压杆直线状态的平衡由稳定变为不稳定的临界力 (critical force)。

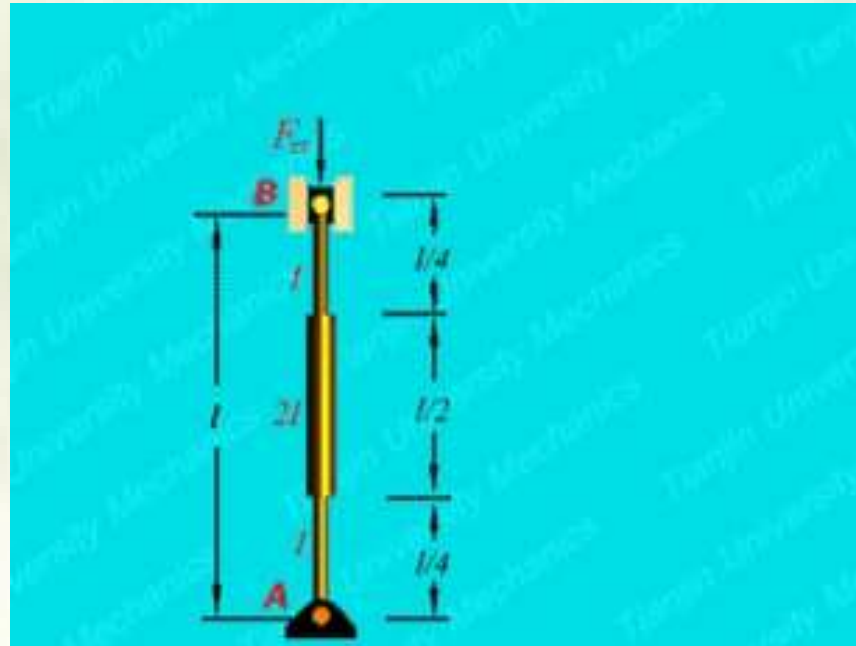


从另一种角度来看，此处中心受压杆的临界力又可了解为：杆能保持微弯状态时的轴向压力。

显然，理想中心压杆是有偶尔偏心等原因的实际压杆的一种抽象。



细长中心受压直杆失稳现象

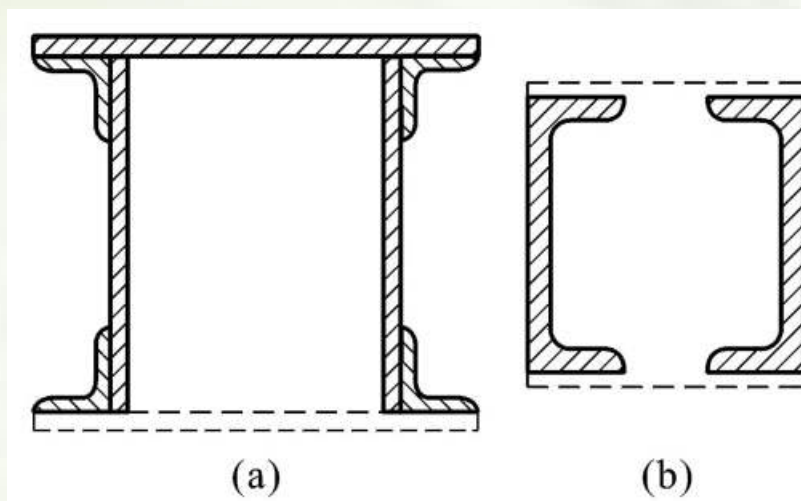


压杆的截面形式及支端约束

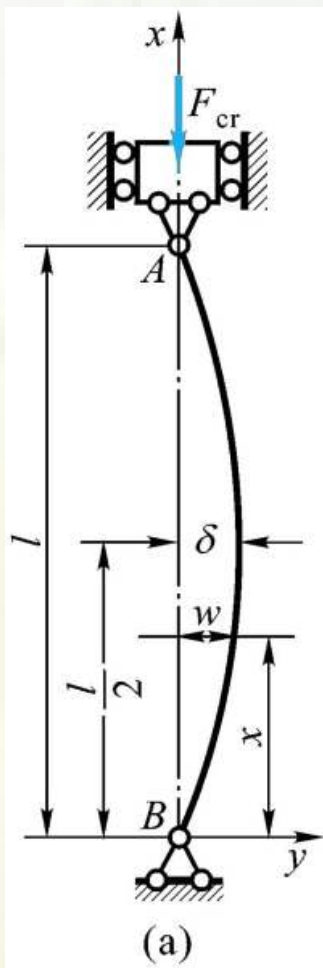
压杆的临界力既然与弯曲变形有关，所以压杆横截面的弯曲刚度应尽量大；

图a为钢桁架桥上弦杆(压杆)的横截面，

图b为厂房建筑中钢柱的横截面。在可能条件下还要尽量改善压杆的杆端约束条件，例如限制甚至阻止杆端转动。

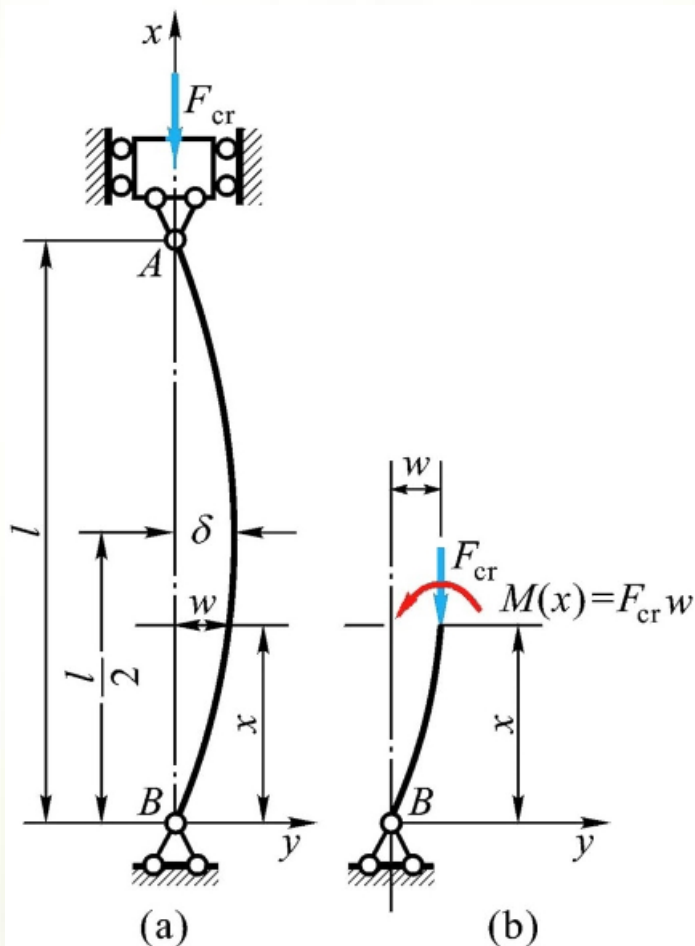


§9-2 细长中心受压直杆临界力的欧拉公式



本节以两端球形铰支(简称两端铰支)的细长中心受压杆件(图a)为例,按照对于理想中心压杆来说临界力就是杆能保持微弯状态时的轴向压力这一概念,来导出求临界力的欧拉(L.Euler)公式。





在图a所示微弯状态下，两端铰支压杆任意 x 截面的挠度(侧向位移)为 w ，该截面上的弯矩为 $M(x)=F_{cr}w$ (图b)。杆的挠曲线近似微分方程为

$$EIw'' = -M(x) = -F_{cr}w \quad (\text{a})$$

上式中负号是因为在图示坐标中，相应于正值的挠度 w ，挠曲线切线斜率的变化率

为负的缘故。 $w'' = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right)$



令 $k^2 = F_{cr} / EI$ ，将挠曲线近似微分方程(a)改写成

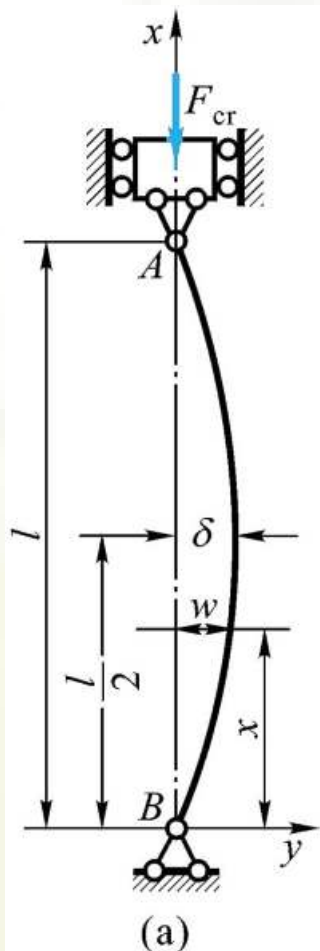
$$w'' + k^2 w = 0 \quad (b)$$

该二阶常系数线性微分方程(b)的通解为

$$w = A \sin ky + B \cos ky \quad (c)$$

此式中有未知量 A 和 B 以及隐具有 F_{cr} 的 k ，但目前能够利用的边界条件只有两个，即 $x=0$ ， $w=0$ 和 $x=l$ ， $w=0$ ，显然这不可能求出全部三个未知量。这种不拟定性是由 $F = F_{cr}$ 时杆可在任意微弯状态下 (d 可为任意微小值) 保持平衡这个抽象概念所决定的。实际上，对于所研究的问题来说只要能从(c)式求出与临界力有关的未知常数 k 就能够了。





$$w = A \sin ky + B \cos ky \quad (c)$$

将边界条件 $x=0, w=0$ 代入式(c)得 $B=0$ 。于是根据(c)式并利用边界条件 $x=l, w=0$ 得到

$$A \sin kl = 0$$

注意到已经有 $B=0$, 故上式中的 A 不可能等于零, 不然(c)式将成为 $w=0$ 而压杆不能保持微弯状态, 也就是杆并未到达临界状态。由此可知, 欲使(c)成立, 则必须 $\sin kl=0$



满足此条件的 kl 为

$$kl = 0, \pi, 2\pi, \dots$$

或即
$$\sqrt{\frac{F_{cr}}{EI}} l = 0, \pi, 2\pi, \dots$$

因为 $\sqrt{\frac{F_{cr}}{EI}} l = 0$ 意味着临界力 $F_{cr} = 0$ ，也就是杆根本未受轴向压力，所以这不是真实情况。在 $kl \neq 0$ 的解中，最小解 $kl = \pi$ 相应于最小的临界力，这是工程上最关心的**临界力**。

由 $kl = \pi$ 有

$$\sqrt{\frac{F_{cr}}{EI}} l = \pi \quad \text{亦即} \quad \frac{F_{cr}}{EI} l^2 = \pi^2$$



从而得到求两端铰支细长中心压杆临界力的欧拉公式:

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

此时杆的挠曲线方程可如下导出。前已求得 $B=0$ ，且取 $kl=\pi$ ，以此代入式(c)得

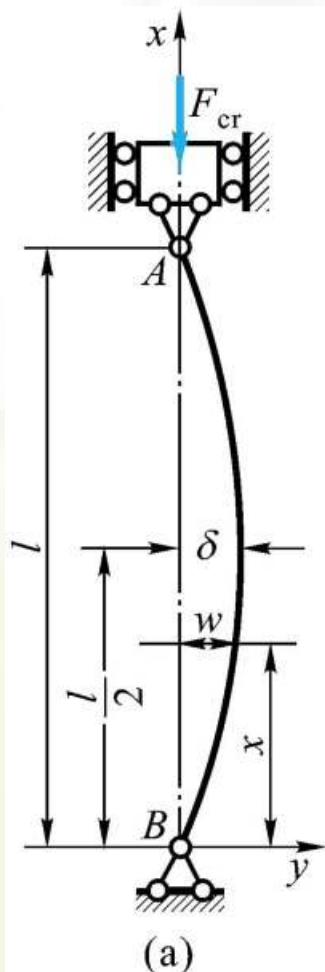
$$w = A \sin\left(\frac{\pi}{l}x\right)$$

注意到当 $x=l/2$ 时 $w=\delta$ ，故有 $A=\delta$ 。从而知，相应于 $kl=\pi$ ，亦即相应于 $F_{cr}=\pi^2 EI/l^2$ ，挠曲线方程为

$$w = \delta \sin \frac{\pi x}{l}$$

可见此时的挠曲线为半波正弦曲线。





需要指出的是，尽管上面得到了 $A=\delta$ ，但因为杆在任意微弯状态下保持平衡时 δ 为不拟定的值，故不能说未知量 A 已拟定。

实际上，在推导任何杆端约束情况的细长中心压杆欧拉临界力时，挠曲线近似微分方程的通解中，凡与杆的弯曲程度有关的未知量总是不拟定的。



思索： 在上述推导中若取 $kl=2\pi$ ，试问相应的临界力是取 $kl=\pi$ 时的多少倍？该临界力所相应的挠曲线方程和挠曲线形状又是怎样的？

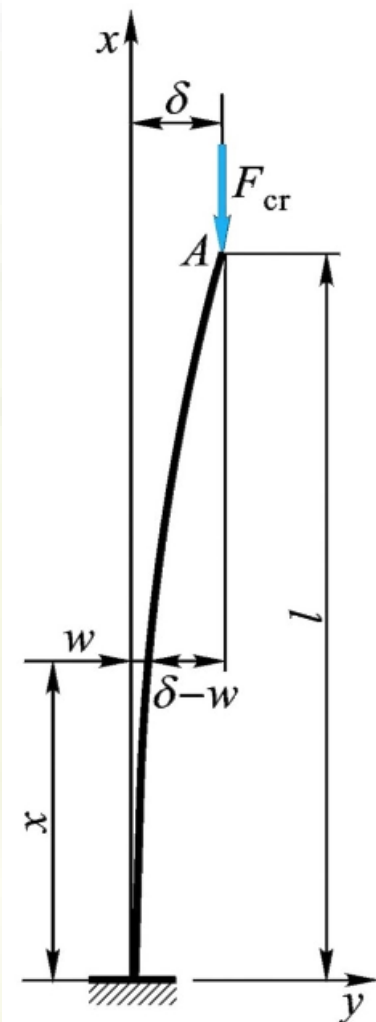


§9-3 不同杆端约束下细长压杆临界力的欧拉公式·压杆的长度因数

目前经过两个例题来推导另某些杆端约束条件下求细长中心压杆临界力的欧拉公式。



例题 9-1



试推导下端固定、上端自由的等直细长中心压杆临界力的欧拉公式，并求压杆失稳时的挠曲线方程。图中 xy 平面为杆的弯曲刚度最小的平面。



例题 9-1

解: 1. 建立压杆挠曲的近似微分方程

根据该压杆失稳后符合杆端约束条件的挠曲线的大致形状可知, 任意 x 横截面上的弯矩为

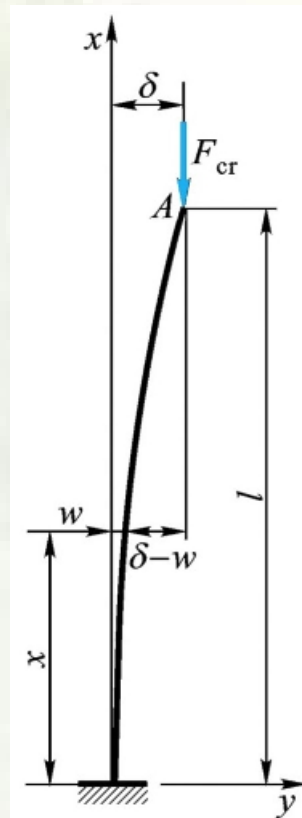
$$M(x) = -F(\delta - w)$$

杆的挠曲线近似微分方程则为

$$EIw'' = -M(x) = F(\delta - w)$$

将上式改写为

$$w'' + \left(\frac{F_{cr}}{EI}\right)w = \left(\frac{F_{cr}}{EI}\right)\delta \quad (1)$$



例题 9-1

2. 求解挠曲线的近似微分方程，并求临界力

$$\text{令 } k^2 = \frac{F_{\text{cr}}}{EI} \text{ 由(1)式得 } w'' + k^2 w = k^2 \delta$$

此微分方程的通解为

$$w = A \sin kx + B \cos kx + \delta \quad (2)$$

$$\text{一阶导数为 } w' = Ak \cos kx - Bk \sin kx \quad (3)$$

根据边界条件 $x=0$, $w'=0$ 由(3)式得 $Ak=0$, 注意到 $k = \sqrt{\frac{F_{\text{cr}}}{EI}}$ 不会等于零, 故知 $A=0$ 。再利用边界条件 $x=0$, $w=0$ 由(1)式得 $B=-\delta$ 。将 $A=0$, $B=-\delta$ 代入(1)式得

$$w = \delta(1 - \cos kx) \quad (4)$$



例题 9-1

利用 $x=l$ 时 $w = \delta$ 这一关系, 由(4)式得出

$$\delta = \delta(1 - \cos kl) \quad \text{亦即} \quad \delta \cos kl = 0$$

从式(4)可知 δ 不可能等于零, 不然 w 将恒等于零, 故上式中只能 $\cos kl = 0$ 。满足此条件的 kl 的最小值为 $kl = \pi/2$, 亦即

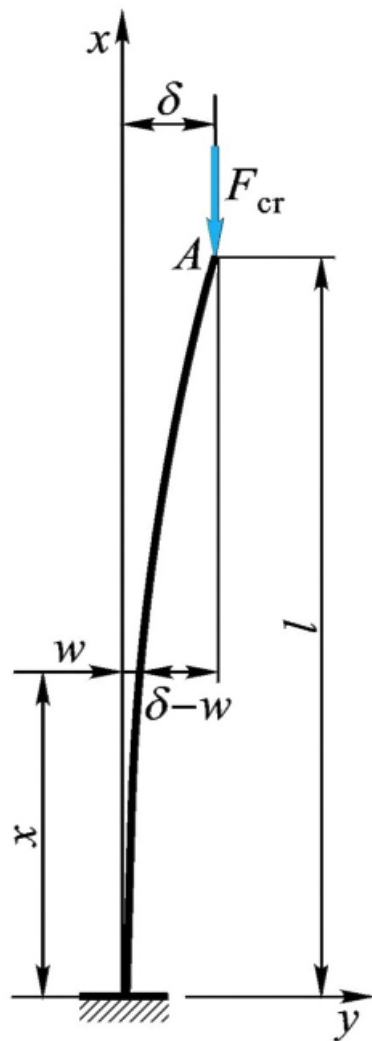
$$\sqrt{\frac{F_{\text{cr}} l}{EI}} = \frac{\pi}{2}$$

从而得到求此压杆临界力的欧拉公式:

$$F_{\text{cr}} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2} = \frac{\pi^2 EI}{(2l)^2}$$



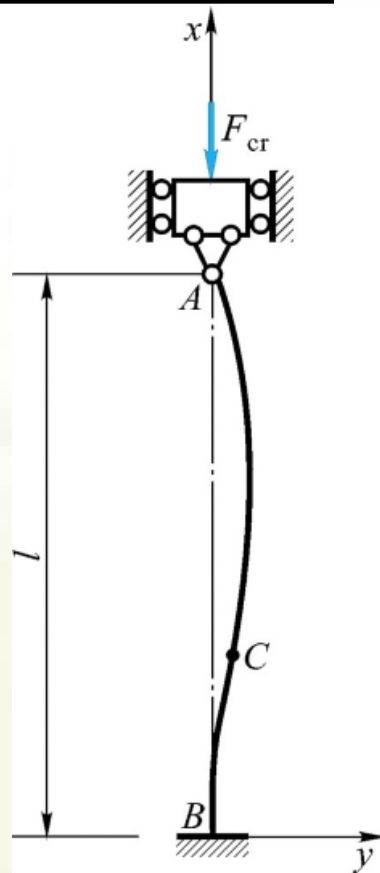
例题 9-1



以 $kl = \pi/2$ 亦即 $k = \pi/(2l)$ 代入式
(4) 便得到压杆失稳时的挠曲线方
程为

$$w = \delta \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2l} \right)$$



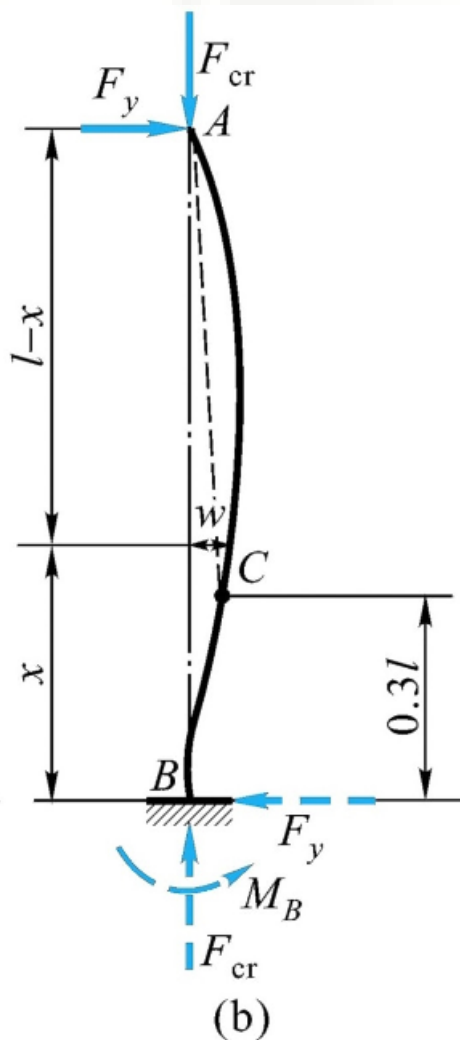
例题 9-2

(a)

试推导下端固定、上端铰支的等直细长中心压杆临界力的欧拉公式，并求该压杆失稳时的挠曲线方程。图(a)中的 xy 平面为杆的最小弯曲刚度平面。



例题 9-2



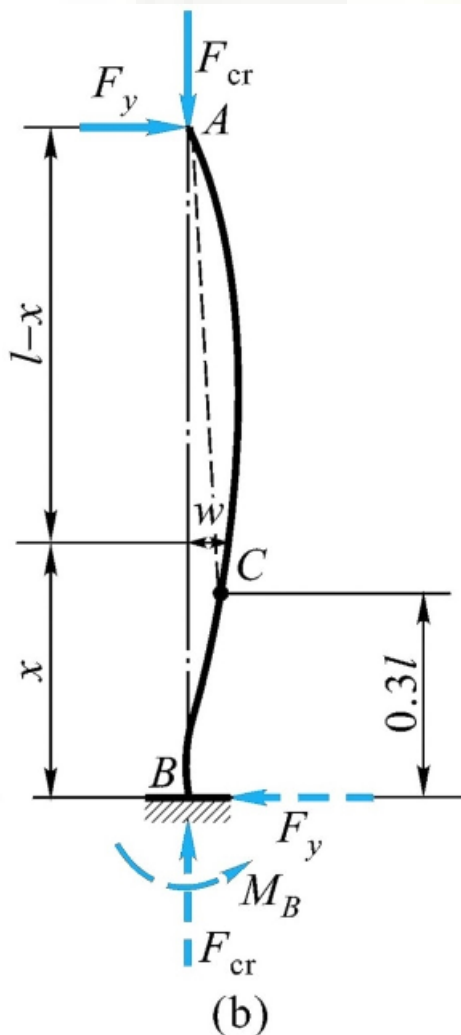
解:

1. 杆端约束力分析

图b示出了该压杆可能的微弯状态，与此相相应， B 处应有逆时针转向的约束力偶矩 M_B ，根据平衡方程 $\sum M_B = 0$ 可知，杆的上端必有向右的水平约束力 F_y ；从而亦知杆的下端有向左的水平约束力 F_y 。



例题 9-2



2. 建立压杆挠曲线的近似微分方程

杆的任意 x 截面上的弯矩为

$$M(x) = F_y w - F_y (l - x)$$

从而有挠曲线近似微分方程:

$$EIw'' = -[F_y w - F_y (l - x)]$$

上式等号右边的负号是因为相应于正值的 w , w'' 是负而加的。



例题 9-2

3. 求临界力 F_{cr}

令 $k^2 = F_{cr} / EI$, 将上式改写为

$$w'' + k^2 w = \frac{F_y}{EI} (l - x)$$

亦即 $w'' + k^2 w = k^2 \frac{F_y}{F_{cr}} (l - x)$

此微分方程的通解为

$$w = A \sin kx + B \cos kx + \frac{F_y}{F_{cr}} (l - x) \quad (\text{a})$$

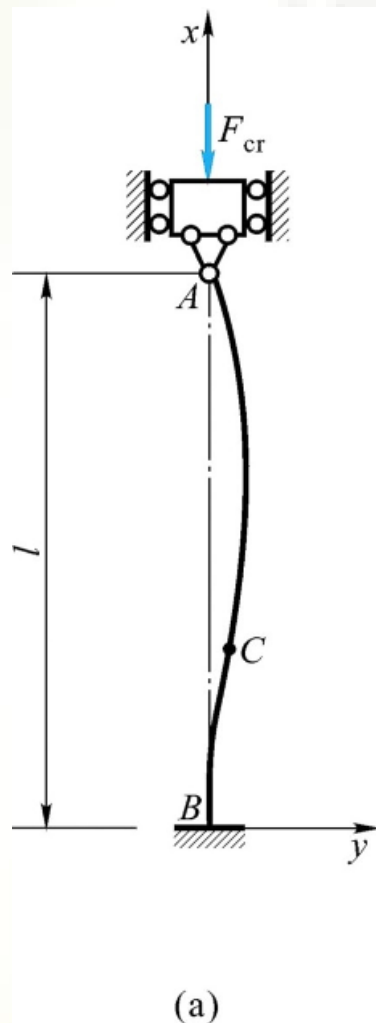
其一阶导数为

$$w' = Ak \cos kx - Bk \sin kx - \frac{F_y}{F_{cr}} \quad (\text{b})$$

式中共有四个未知量: A, B, k, F_y 。



例题 9-2



由边界条件 $x=0$, $w'=0$ 得
 $A=F_y/(kF_{cr})$ 。又由边界条件 $x=0$, $w=0$
 得 $B=-F_y l / F_{cr}$ 。将以上 A 和 B 的体现式
 代入式(a)有

$$w = \frac{F_y}{F_{cr}} \left[\frac{1}{k} \sin kx - l \cos kx + (l - x) \right] \quad (c)$$

再利用边界条件 $x=l$, $w=0$, 由上式得

$$\frac{F_y}{F_{cr}} \left[\frac{1}{k} \sin kl - l \cos kl \right] = 0$$



例题 9-2

因为杆在微弯状态下保持平衡时, F_y 不可能等于零, 故由上式得

$$\frac{1}{k} \sin kl - l \cos kl = 0 \quad \text{亦即} \quad \tan kl = kl$$

满足此条件的最小非零解为 $kl=4.49$, 亦即, 从而得到此压杆临界力的欧拉公式为

$$F_{\text{cr}} = \frac{(4.49)^2 EI}{l^2} \approx \frac{\pi^2 EI}{(0.7l)^2}$$

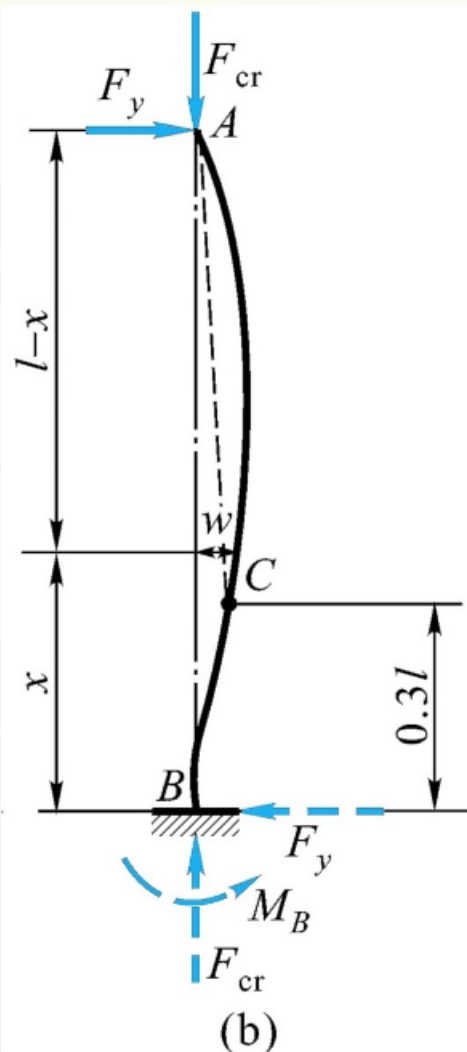


例题 9-2

4. 将 $kl = 4.49$, 亦即 $k = 4.49/l$ 代入式(c)即得此压杆相应于上列临界力的挠曲线方程:

$$w = \frac{F_y l}{F_{cr}} \left[\frac{\sin kx}{4.49} - \cos kx + \left(1 - \frac{x}{l} \right) \right]$$

利用此方程还能够进一步求得该压杆在上列临界力作用下挠曲线上的拐点在 $x = 0.3l$ 处 (图b)。



压杆的长度因数和相当长度

表 9-1 各种支承约束条件下等截面细长压杆临界力的欧拉公式

支端情况	两端铰支	一端固定另 一端铰支	两端固定	一端固定另 一端自由	两端固定 但可沿横 向相对移动
失稳时挠曲线形状					
		C—挠曲线拐点	C, D—挠曲线拐点		C—挠曲线拐点
临界力 F_{cr} 欧拉公式	$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$	$F_{cr} \approx \frac{\pi^2 EI}{(0.7l)^2}$	$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(0.5l)^2}$	$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(2l)^2}$	$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$
长度因数 μ	$\mu = 1$	$\mu \approx 0.7$	$\mu = 0.5$	$\mu = 2$	$\mu = 1$



表9-1中列出了几种经典的理想杆端约束条件下，等截面细长中心受压直杆的欧拉公式。从表中可见，杆端约束越强，压杆的临界力也就越高。

表中将求临界力的欧拉公式写成了同一的形式：

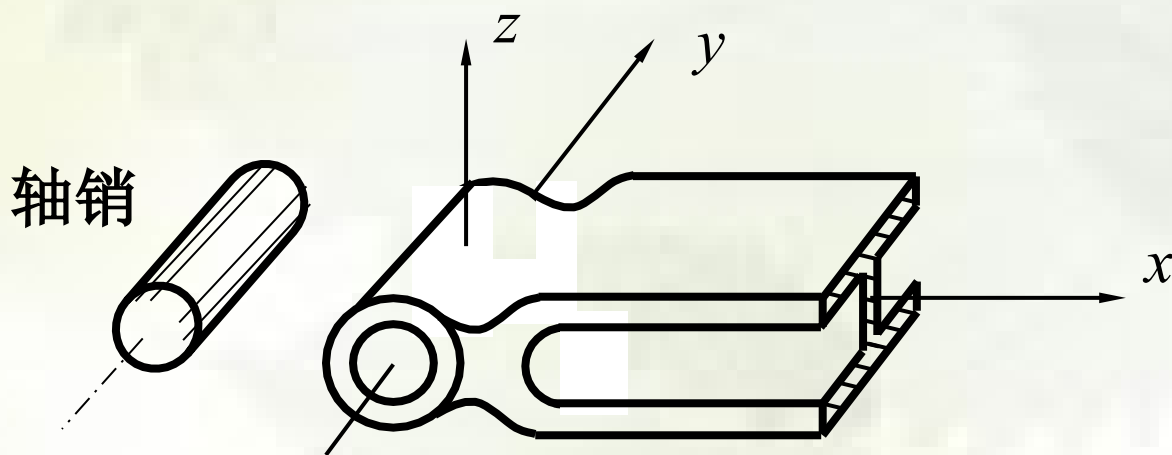
$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}$$

式中， μ 称为压杆的长度因数，它与杆端约束情况有关； μl 称为压杆的相当长度(equivalent length)，它表达某种杆端约束情况下几何长度为 l 的压杆，其临界力相当于长度为 μl 的两端铰支压杆的临界力。表9-1的图中从几何意义上标出了多种杆端约束情况下的相当长度 μl 。



利用欧拉公式计算临界力时需要注意:

- (1)当杆端约束情况在各个纵向平面内相同步(例如球形铰), 欧拉公式中的 I 应是杆的横截面的最小形心主惯性矩 I_{\min} 。
- (2)当杆端约束在各个纵向平面内不同步, 欧拉公式中所取用的 I 应与失稳(或可能失稳)时的弯曲平面相对应。例如杆的两端均为如图所示柱形铰的情况下:



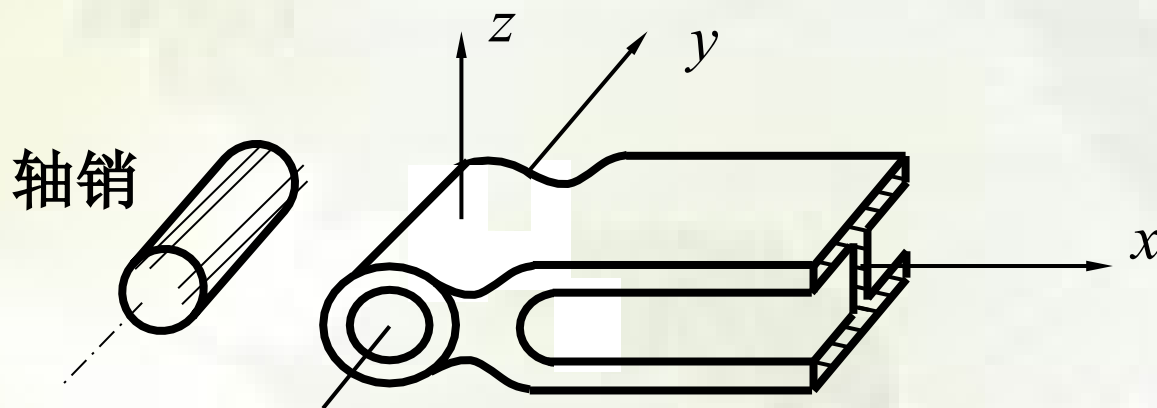
相应于杆在 xy 平面内失稳，杆端约束接近于两端固定，

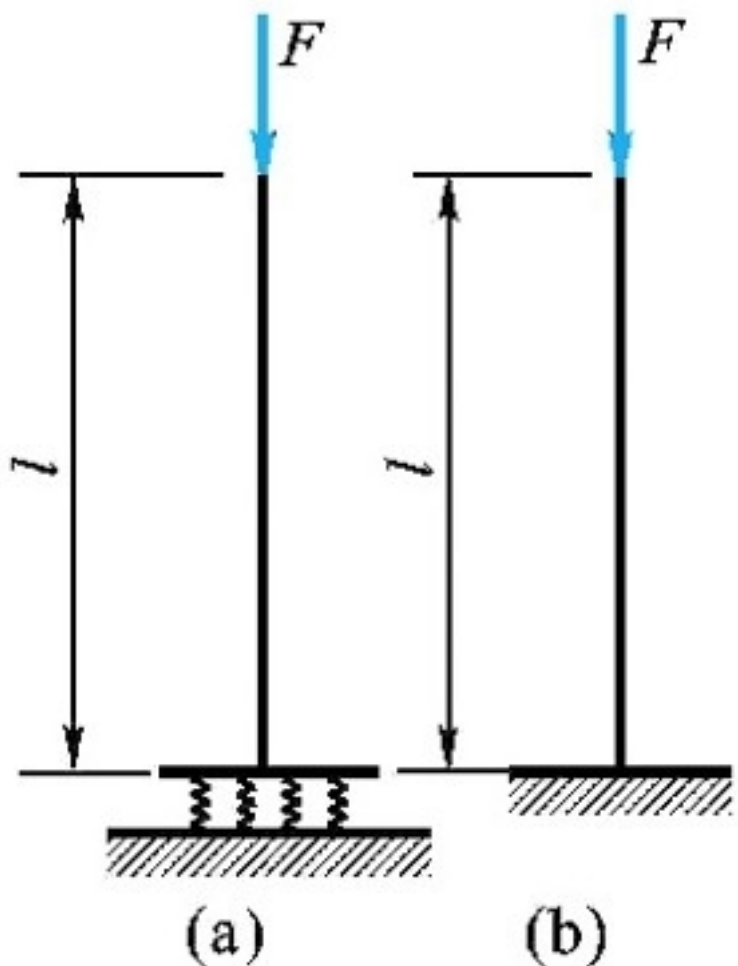
$$F_{\text{cr}} = \frac{\pi^2 EI_z}{(0.5l)^2}$$

相应于杆在 xz 平面内的失稳，杆端约束相当于两端铰支，

$$F_{\text{cr}} = \frac{\pi^2 EI_y}{l^2}$$

而取用的临界力值应是上列两种计算值中的较小者。





思索： 图a、b所示细长中心压杆均与基础刚性连接，但图a所示杆的基础置于弹性地基上，图b所示杆的基础则置于刚性地基上。试问两压杆的临界力是否均为 $F_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(2l)^2}$ ？为何？并由此判断压杆的长度因数 μ 是否可能不小于2。



§9-4 欧拉公式的应用范围·临界应力总图

I. 欧拉公式应用范围

在推导细长中心压杆临界力的欧拉公式时，应用了材料在线弹性范围内工作时的挠曲线近似微分方程，可见欧拉公式只可应用于压杆横截面上的应力不超出材料的百分比极限 σ_p 的情况。

按照抽象的概念，细长中心压杆在临界力 F_{cr} 作用时可在直线状态下维持不稳定的平衡，故其时横截面上的应力可按 $\sigma_{cr} = F_{cr} / A$ 来计算，亦即

$$\sigma_{cr} = \frac{F_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2 A} = \frac{\pi^2 E}{(\mu l / i)^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (\text{a})$$



式中， σ_{cr} 称为临界应力； $i = \sqrt{I/A}$ 为压杆横截面对于失稳时绕以转动的形心主惯性轴的惯性半径； $\mu l / i$ 为压杆的相当长度与其横截面惯性半径之比，称为压杆的长细比(slenderness)或柔度，记作 λ ，即

$$\lambda = \frac{\mu l}{i}$$

根据欧拉公式只可应用于 $\sigma_{cr} \leq \sigma_p$ 的条件，由式(a)知该应用条件就是

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_p$$

亦即 $\lambda \geq \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}}$

或写作 $\lambda \geq \lambda_p$

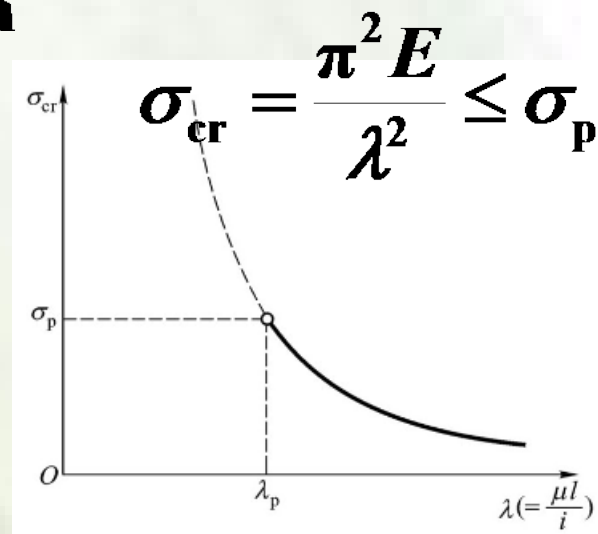


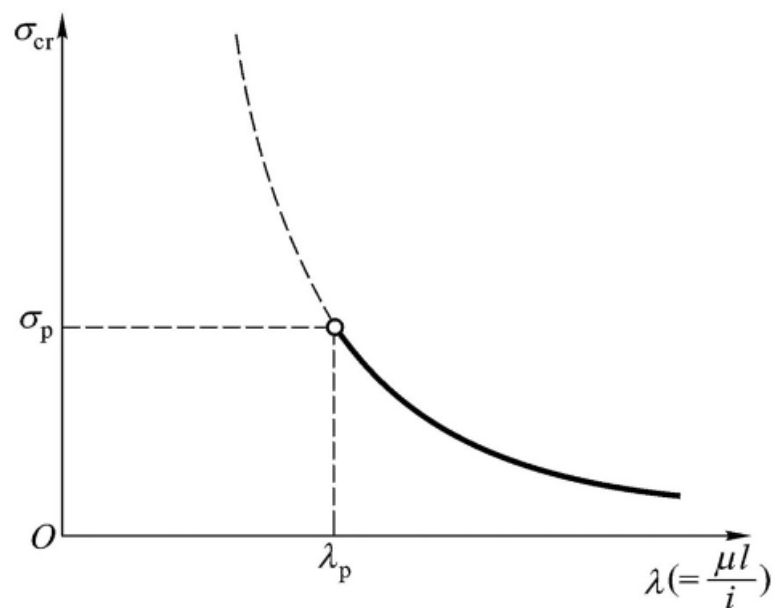
可见 $\lambda_p = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}}$ 就是能够应用欧拉公式的压杆最小柔度。

对于Q235钢，按照 $E=206 \text{ GPa}$ ， $\sigma_p=200 \text{ MPa}$ ，有

$$\lambda_p = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}} = \sqrt{\frac{\pi^2 (206 \times 10^9 \text{ Pa})}{200 \times 10^6 \text{ Pa}}} \approx 100$$

一般把 $\lambda \geq \lambda_p$ 的压杆，亦即能够应用欧拉公式求临界力 F_{cr} 的压杆，称为大柔度压杆或细长压杆，而把 $\lambda < \lambda_p$ 的压杆，亦即不能应用欧拉公式的压杆，称为小柔度压杆。





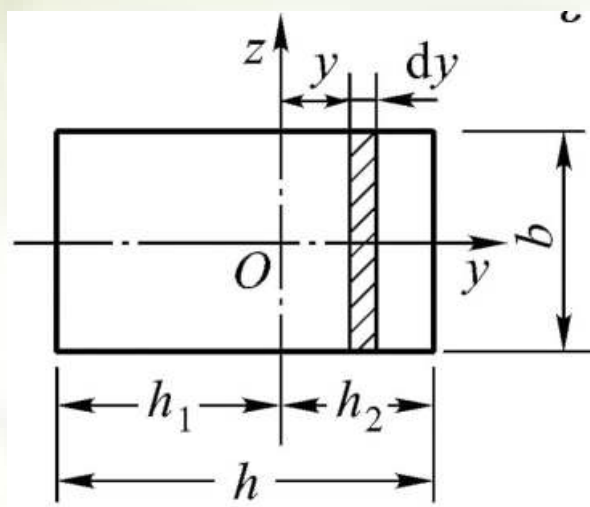
图中用实线示出了欧拉公式应用范围内($\lambda \geq \lambda_p$)的 $\sigma_{cr} - \lambda$ 曲线, 它是一条双曲线, 称为欧拉临界力曲线, 简称欧拉曲线。需要指出的是, 因为实际压杆都有初弯曲, 偶尔偏心 and 材质不匀, 所以从试验数据来分析, 能够应用欧拉公式求临界力的最小柔度比这里算得的 λ_p 要大某些。

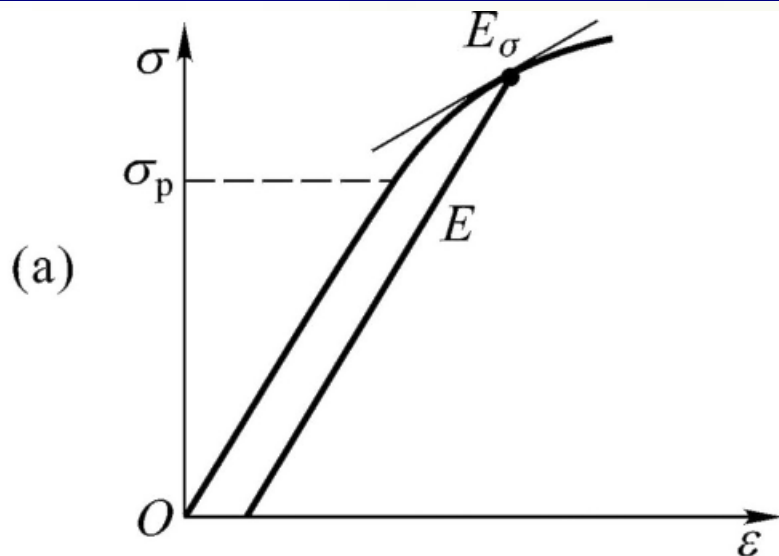


*II. 研究小柔度压杆临界力的折减弹性模量理论

工程中的绝大部分压杆为小柔度压杆，不能应用欧拉公式。研究小柔度压杆 ($\lambda < \lambda_p$) 临界应力的理论诸多，此处简介的折减弹性模量理论是其中之一。

现先以矩形截面小柔度钢压杆在 xy 平面内失稳为例来探讨。





图a所示为钢在压缩时的 σ - ε 曲线。

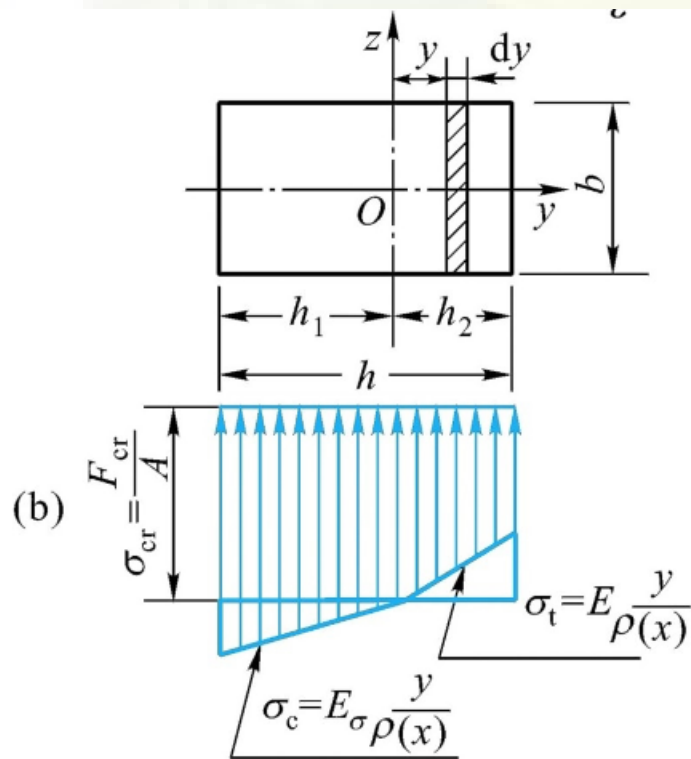
当加载过程中应力 σ 超出百分比极限时，材料在某一应力水平下的弹性模量可应用切线模量 E_σ ；而卸载时，材料的弹性模量由卸载规律可知，它与初始加载时的弹性模量 E 相同。



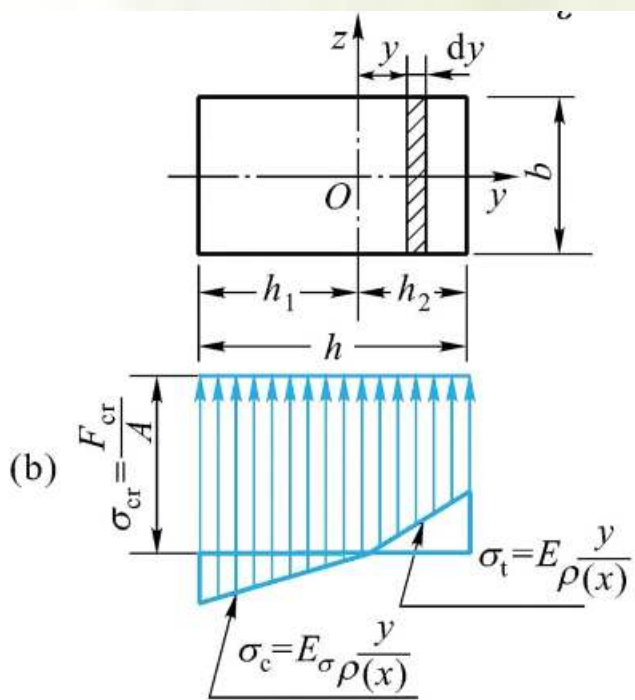
(1) 横截面上应力的变化情况

按抽象的概念，小柔度中心压杆与大柔度中心压杆一样，当 $F=F_{cr}$ 时杆既可在直线状态下保持平衡，也可在微弯状态下保持平衡。

小柔度压杆在直线状态下保持平衡时其横截面上的应力是均匀的，其值为 $\sigma_{cr} = F_{cr}/A$ (图b)。



当压杆在此应力水平下发生微弯时，中性轴一侧(图b中 z 轴右侧)横截面上产生附加拉应力，使原有的压应力 σ_{cr} 减小，故属于减载，附加弯曲拉应力为 $\sigma_t = Ey/\rho(x)$ ；

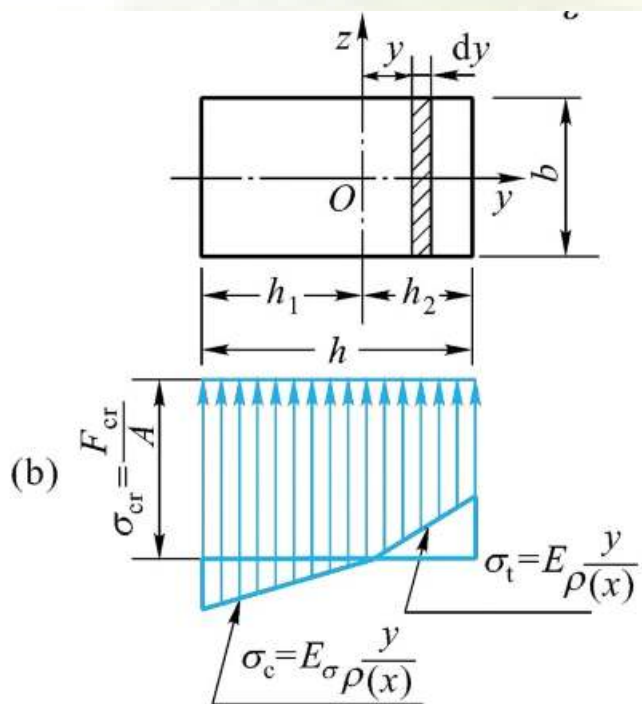


中性轴另一侧横截面上产生附加应力，使原有的压应力 σ_{cr} 增大，故属于加载，附加弯曲压应力为 $\sigma_c = E_\sigma y/\rho(x)$ 。因为 $E \neq E_\sigma$ ，故微弯时中性轴不经过横截面形心，它离左边沿的距离为 h_1 ，离右边沿的距离为 h_2 。



(2) 中性轴的详细位置

根据压杆因为微弯产生的正应力在横截面上不应构成合力有



$$F_N = \int_{A_1} \sigma_c \, dA + \int_{A_2} \sigma_t \, dA = 0$$

即应有

$$\int_{A_1} E_\sigma \frac{y}{\rho(x)} \, dA + \int_{A_2} E \frac{y}{\rho(x)} \, dA = 0$$

亦即要求

$$E_\sigma \left(-bh_1 \cdot \frac{h_1}{2} \right) + E \left(bh_2 \cdot \frac{h_2}{2} \right) = 0$$



以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/255044033113011330>