摘　要

设 Δ_N 为 PDE 的 Neumann 问题中的 Laplace 算子, 称为 Neumann-Laplace 算子, $\mathrm{BMO}_{\Delta_N}(\mathbb{R}^n)$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 上与 Δ_N 相关的有界平均振荡(BMO)空间. 本文我们将考虑带有 Neumann 边界值条件的 Laplace 方程的解 $u(x,t)=e^{-t\sqrt{-\Delta_N}}f(x)$, 简称为 Neumann 调和函数, 我们将证明当 $f\in \mathrm{BMO}_{\Delta_N}(\mathbb{R}^n)$ 时, Neumann 调和函数满足 Carleson 条件

$$\sup_{Q}\frac{1}{|Q|}\int_0^{r_Q}\int_Q t\left|\nabla \boldsymbol{u}(x,t)\right|^2 dxdt<\infty.$$

反之, 上述 Carleson 条件也刻画了初值在 $\mathrm{BMO}_{\Delta_N}(\mathbb{R}^n)$ 中的 Neumann 调和函数. 本文我们将借助经典 PDE 理论和类似于热方程的 Neumann 问题的研究方法来探究带有 Neumann 边界值条件的 Laplace 方程. 充分利用 Neumann 边界值条件, 通过镜面反射的方法, 将带有 Neumann 边界值条件的 Laplace 方程转化为经典的 Laplace 方程, 再采用实变方法研究与算子相关的函数空间及其等价刻画, 最后通过偶延拓的方法来探究 BMO 初值与满足 Carleson 条件的调和函数的关系.

关键词： 调和函数; Neumann 边界值条件; Neumann-Laplace 算子; BMO 空间; HMO 空间

目　　录

摘要 i

Abstract iii

目录 v

第一章　绪论 1

1.1　研究背景及其现状 1

1.2　研究的主要内容 4

第二章　Neumann-Possion 半群的研究 7

2.1　Neumann-Laplace 方程的解 7

2.2　Neumann-Possion 半群及其对应的 Possion 核 8

2.3　Neumann-Possion 核的光滑性 10

第三章　Δ_N 相关的空间 15

3.1　$\mathrm{BMO}_{\Delta_N}(\mathbb{R}^n)$ 和 $\mathrm{HMO}_{\Delta_N}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ 的定义 15

3.2　$\mathrm{BMO}_{\Delta_N}(\mathbb{R}^n)$ 和 $\mathrm{HMO}_{\Delta_N}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ 的关系 17

参考文献 27

致谢 31

攻读学位期间取得的研究成果 33

浙江师范大学学位论文诚信承诺书 35

浙江师范大学学位论文独创性声明 37

学位论文使用授权声明 37

第一章　绪论

1.1　研究背景及其现状

考虑上半空间 $\mathbb{R}^{n+1}_+ = (\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ 上 Laplace 方程的初值问题

$$\begin{cases} \partial_{tt} u(x,t) + \Delta u(x,t) = 0, & x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

由 PDE 理论可知上述方程的解 u 可表示为初值 f 的 Poisson 积分, 即

$$u(x,t) = e^{-t\sqrt{-\Delta}} f(x).$$

其中 $\{e^{-t\sqrt{-\Delta}}\}_{t\geq 0}$ 为 Poisson 半群.

一个最基本的问题是研究初值与解之间的关系, 即找到一对函数空间 (X,Y) 使得

$$f \in X \Leftrightarrow u \in Y.$$

1970年, 考虑 Lebesgue 空间时, Stein-Weiss [1]总结了, 初值 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 < p \leq \infty)$ 当且仅当上半空间 $\mathbb{R}^{n+1}_+$ 上的调和函数 $u(x,t) = e^{-t\sqrt{-\Delta}} f(x)$ 满足

$$\sup_{t>0} \|u(\cdot,t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \infty.$$

1972年, Fefferman-Stein [2]研究 $p = 1$ 的情形, 他们得到了 Hardy 空间 $H^1(\mathbb{R}^n)$ 是 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 空间的恰当替代, 即 $f \in H^1(\mathbb{R}^n)$ 当且仅当上半空间的调和函数 $u(x,t) = e^{-t\sqrt{-\Delta}} f(x)$ 满足

$$\sup_{t>0} \|u(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \infty.$$

在文献[2]中, 他们还发现了 John-Nirenberg [3]引入的 BMO 空间是 Hardy 空间 $H^1(\mathbb{R}^n)$ 的对偶空间, 因此 BMO 空间自然成为了 $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 空间的替代物. 并且在文献[4]中, 经典的奇异积分并不映射 $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, 而是 $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 到 $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$. 事实上, Fefferman-Stein [2] 证明了当 $f \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$, 其 Poisson 积分 $u(x,t) = e^{-t\sqrt{-\Delta}} f(x)$ 满足 Carleson 条件

$$\sup_{Q} \frac{1}{|Q|} \int_0^{r_Q} \int_Q t|\nabla u(x,t)|^2 dx dt < \infty, \tag{1.1}$$

其中Q为$\mathbb{R}^n$中的方体, r_Q为方体Q边长的一半. 另一方面, 从解函数找寻其初值函数, Fefferman-Stein 事先假设了调和函数 u 为某个函数 f 的 Poisson 积分且满足 (1.1), 则 $f \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$. 而最初的问题中, 我们并不能提前假设 u 是某个函数的 Poisson 积分.

1976年, Fabes-Johnson-Neri [5] 改进了 Fefferman-Stein 的结果, 他们证明了所有满足 (1.1) 的调和函数必然可以表示成 $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ 中的某个函数 f 的 Poisson 积分. 若记

$$\mathrm{HMO}(\mathbb{R}^{n+1}_+) = \{\text{满足 (1.1) 的有界调和函数}\}$$

为调和平均振荡空间, 则文献[5]中的结果可以理解为

$$f \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow u \in \mathrm{HMO}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$$

或

$$\mathrm{HMO}(\mathbb{R}^{n+1}_+) = e^{-t\sqrt{-\Delta}}\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n).$$

1975年, 除了研究 Laplace 方程, Fabes-Neri [6]同时还研究了热方程的类似问题

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) - \Delta u(x,t) = 0, & x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{1.2}$$

他们证明了热函数(热方程的解) u 满足热型 Carleson 条件(类似于 (1.1))

$$\sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_0^{r_Q^2} \int_Q \left|\nabla_x u(x,t)\right|^2 dxdt < \infty, \tag{1.3}$$

当且仅当 $f \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ 使得$u = e^{-t(-\Delta)}f$. 若记

$$\mathrm{TMO}(\mathbb{R}^{n+1}_+) = \{\text{ 满足 (1.3) 的热函数}\}$$

为温度平均振荡空间, 则 Fabes-Neri 的结果可以理解为

$$f \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow u \in \mathrm{TMO}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$$

或

$$\mathrm{TMO}(\mathbb{R}^{n+1}_+) = e^{-t(-\Delta)}\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n).$$

其中 $\{e^{-t(-\Delta)}\}_{t\geq 0}$ 是热半群. 注意到不同于调和函数的情形, 热型 Carleson 条件中仅存在空间梯度, 且关于时间的积分范围是从0 到 r_Q^2.

经典的 BMO 空间在现代调和分析中起着至关重要的作用. 在欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中, 函数 $f \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$, 当且仅当

$$\|f\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)} = \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - f_Q|\, dx < \infty,$$

其中 f_Q 表示 f 在方体 Q 上的积分平均, $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ 与欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 上的 Laplace 算子有关. 在文献[7, 8, 16] 中, Duong-Yan 考虑用一般的非负自伴算子 L 来代替 Laplace 算子, 可以得到与 L 算子相关的 BMO 空间为 $\mathrm{BMO}_L(\mathbb{R}^n)$, 其定义为

$$\|f\|_{\mathrm{BMO}_L(\mathbb{R}^n)} = \sup_Q \frac{1}{|Q|}\int_Q \left|f(x) - e^{-r^2L}f(x)\right|dx < \infty.$$

一个自然的问题是初值 $f \in \mathrm{BMO}_L(\mathbb{R}^n)$ 对应的 Laplace 方程的解是否可以用 Carleson 条件来刻画.

2014年, Duong-Yang-Zhang [9]把研究扩展到 $\mathbb{R}^n$ 上的 Schrödinger 算子, 他们证明了如果 $\mathcal{L} = -\Delta + v$, 其中 v 满足逆 Hölder 不等式, 对应的 Laplace 方程的解可以用类似 Carleson 型的条件来刻画, 即

$$\sup_Q \frac{1}{|Q|}\int_0^{r_Q}\int_Q t|\nabla u(x,t)|^2 dxdt < \infty. \tag{1.4}$$

定义与 Schrödinger 算子 $\mathcal{L}$ 相关的初值空间为 $\mathrm{BMO}_{\mathcal{L}}(\mathbb{R}^n)$, 相关的解空间为 $\mathrm{HMO}_{\mathcal{L}}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$, 即

$$\mathrm{HMO}_{\mathcal{L}}(\mathbb{R}^{n+1}_+) = \{\text{ 满足 (1.4) 的算子 } \mathcal{L} \text{ 对应的 Laplace 方程的解}\},$$

则他们的结果可以理解为

$$f \in \mathrm{BMO}_{\mathcal{L}}(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow u \in \mathrm{HMO}_{\mathcal{L}}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$$

或

$$\mathrm{HMO}_{\mathcal{L}}(\mathbb{R}^{n+1}_+) = e^{-t\sqrt{\mathcal{L}}}\mathrm{BMO}_{\mathcal{L}}(\mathbb{R}^n).$$

2022年, 对于一般的非负自伴算子 L, Song-Wu [10]进一步研究了满足极限条件的 $\mathrm{BMO}_L(\mathbb{R}^n)$ 函数 $\mathrm{CMO}_L(\mathbb{R}^n)$ 与满足极限条件的 $\mathrm{HMO}_L(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ 函数 $\mathrm{HCMO}_L(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ 的关系, 并且证明了当 $f \in \mathrm{CMO}_L(\mathbb{R}^n)$ 时, 存在对应的 Laplace 方程的解 $u = e^{-t\sqrt{L}}f$ 满足一种类似于 Carleson 型条件, 使得 $u \in \mathrm{HCMO}_L(\mathbb{R}^{n+1}_+)$. 反之, 若 u 满足类似于 Carleson 型条件, 则必然可以表示成 $\mathrm{CMO}_L(\mathbb{R}^n)$ 中某个函数 f 的泊松积分 $u = e^{-t\sqrt{L}}f$. 他们的最后结果可以表示为

$$f \in \mathrm{CMO}_L(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow u \in \mathrm{HCMO}_L(\mathbb{R}^{n+1}_+)$$

或

$$\mathrm{HCMO}_L(\mathbb{R}^{n+1}_+) = e^{-t\sqrt{L}}\mathrm{CMO}_L(\mathbb{R}^n).$$

在文献[11]中，Jiang-Li 将底空间 $\mathbb{R}^n$ 换成一般度量测度空间 X，他们研究了满足 Carleson 条件的调和函数与 $\mathrm{BMO}_L(\mathbb{R}^n)$ 函数之间的关系，得到了类似的 Carleson 特征刻画.

2008年，Strauss [12]解决了直线 $(0,\infty)$ 上热方程的 Neumann 问题

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) - \Delta u(x,t) = 0, & x>0, t>0, \\ \partial_x u(0,t) = 0, & x>0, t>0, \\ u(x,0) = f(x), & x>0. \end{cases}$$

利用反射法，得到了 $u(x,t)$ 的表达式.

2022年，受文献[12]的启发，Yang-Zhang [13]解决了 $\mathbb{R}^n\times(0,\infty)$ 上热方程的 Neumann 问题

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) - \Delta u(x,t) = 0, & x\in\mathbb{R}^n, t>0, \\ \partial_{x_n} u(x',0,t) = 0, & x'\in\mathbb{R}^{n-1}, x_n\in\mathbb{R}, t>0, \\ u(x,0) = f(x), & x\in\mathbb{R}^n. \end{cases}$$

他们证明了初值在与 Neumann-Laplace 算子相关的 BMO 空间中，当且仅当 Neumann 热方程的解满足某个类似于 Carleson 型条件. 他们得到了与 Fabes 等人类似的结果，即

$$f\in \mathrm{BMO}_{\Delta_N}(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow u\in \mathrm{TMO}_{\Delta_N}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$$

或

$$\mathrm{TMO}_{\Delta_N}(\mathbb{R}^{n+1}_+) = e^{-t(-\Delta_N)}\mathrm{BMO}_{\Delta_N}(\mathbb{R}^n).$$

更多关于热(Laplace)方程的 Dirchlet 问题的结论，见文献[4, 9, 10, 12, 14, 15, 17, 18].

1.2　研究的主要内容

受以上工作的启发，本文我们将要研究带有 Neumann 边界值条件的 Laplace 方程

$$\begin{cases} \partial_{tt} u(x,t) + \Delta u(x,t) = 0, & x\in\mathbb{R}^n, t>0, \\ \partial_{x_n} u(x',0,t) = 0, & x'\in\mathbb{R}^{n-1}, x_n\in\mathbb{R}, t>0, \\ u(x,0) = f(x), & x\in\mathbb{R}^n. \end{cases}$$

我们来讨论当初值在 $\mathrm{BMO}_{\Delta_N}(\mathbb{R}^n)$ 中，Neumann 调和函数的 Carleson 特征刻画，即

$$f\in \mathrm{BMO}_{\Delta_N}(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow u\in \mathrm{HMO}_{\Delta_N}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$$

或

$$\mathrm{HMO}_{\Delta_N}(\mathbb{R}^{n+1}_+) = e^{-t\sqrt{-\Delta_N}}\mathrm{BMO}_{\Delta_N}(\mathbb{R}^n).$$

本文研究内容安排如下, 在第二章首先找出 Neumann-Laplace 方程的解公式, 然后研究与 Neumann-Laplace 算子 Δ_N 相关的 Poisson 核的光滑性. 第三章研究与 Neumann-Laplace 算子 Δ_N 相关的 $\mathrm{BMO}_{\Delta_N}(\mathbb{R}^n)$ 和 $\mathrm{HMO}_{\Delta_N}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$, 并且探究满足 Carleson 条件的 Neumann 调和函数与 $\mathrm{BMO}_{\Delta_N}(\mathbb{R}^n)$ 函数的关系, 即说明 Carleson 条件可以刻画初值在 $\mathrm{BMO}_{\Delta_N}(\mathbb{R}^n)$ 中的 Neumann 调和函数.

而本文的创新之处是基于与经典 Laplace 算子有关的调和函数和热函数的研究成果, 再考虑带有 Neumann 边界值条件的调和函数, 当去掉 Neumann 边界值条件后, 这个结果可以简化为经典结果 [1]. 然而我们使用的方法与文献[1]中的方法完全不同, 我们借助于文献[13]中的一些新观察, 将一个函数折分成两个偶函数, 并在某种意义下将它们粘合在一起, 然后将 Neumann 问题转化为经典问题. 最后通过 Neumann-Poission 半群来建立初值与解的关系, 刻画初值为 $\mathrm{BMO}_{\Delta_N}(\mathbb{R}^n)$ 的 Neumann 调和函数, 我们所研究的结果补充了 Neumann 调和函数的相关研究.

第二章　Neumann-Possion 半群的研究

2.1　Neumann-Laplace 方程的解

记 $\Delta=\sum_{i=1}^{n}\partial_{x_i}^2$ 为欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 上的 Laplace 算子, 设

$$\mathbb{R}_+^n=\left\{(x',x_n)\in\mathbb{R}^n:x'=(x_1,\ldots,x_{n-1})\in\mathbb{R}^{n-1},x_n>0\right\},$$

$$\mathbb{R}_-^n=\left\{(x',x_n)\in\mathbb{R}^n:x'=(x_1,\ldots,x_{n-1})\in\mathbb{R}^{n-1},x_n<0\right\}.$$

考虑 $\mathbb{R}_+^n\times(0,\infty)$ 上带有 Neumann 边界值条件的 Laplace 方程

$$\begin{cases}\partial_{tt}u\left(x',x_n,t\right)+\Delta u\left(x',x_n,t\right)=0, & x'\in\mathbb{R}^{n-1},x_n>0,t>0,\\ \partial_{x_n}u\left(x',0,t\right)=0, & x'\in\mathbb{R}^{n-1},x_n>0,t>0,\\ u\left(x',x_n,0\right)=f\left(x',x_n\right), & x'\in\mathbb{R}^{n-1},x_n>0.\end{cases}\tag{2.1}$$

在后文中, (2.1)的解 u 被称为 Neumann 调和函数.

对任意 $x=(x',x_n)\in\mathbb{R}_+^n$, 记 $\tilde{x}=(x',-x_n)\in\mathbb{R}_-^n$. 在我们的问题中, 初始函数 f 仅定义在 $\mathbb{R}_+^n$ 中. 记 f_e 是 f 在整个 $\mathbb{R}^n$ 空间上的唯一偶延拓, 即

$$f_e(x)=\begin{cases}f(x), & x\in\mathbb{R}_+^n,\\ f\left(\tilde{x}\right), & x\in\mathbb{R}_-^n.\end{cases}\tag{2.2}$$

回顾文献[3]中 $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 上经典的 Laplace 方程

$$\begin{cases}\partial_{tt}\omega(x,t)+\Delta\omega(x,t)=0, & x\in\mathbb{R}^n,t>0,\\ \omega(x,0)=f_e(x), & x\in\mathbb{R}^n.\end{cases}\tag{2.3}$$

由椭圆 PDE 理论可知 (2.3) 的解 $\omega(x,t)$ 为

$$\omega(x,t)=e^{-t\sqrt{-\Delta}}f_e(x)=\int_{\mathbb{R}^n}p_t(x,y)f_e(y)dy,\tag{2.4}$$

其中 $\{e^{-t\sqrt{-\Delta}}\}_{t\geq0}$ 是 Possion 半群, 对应 Possion 核的表达式为

$$p_t(x,y)=\frac{C_nt}{(t^2+|x-y|^2)^{(n+1)/2}},\quad C_n=\frac{\Gamma[(n+1)/2]}{\pi^{(n+1)/2}}.$$

由 (2.2)和 (2.4), 可以得到

$$\begin{aligned}
\omega(x,t) &= \int_{\mathbb{R}^n_+} p_t(x,y)f_e(y)dy + \int_{\mathbb{R}^n_-} p_t(x,y)f_e(y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n_+} p_t(x,y)f(y)dy + \int_{\mathbb{R}^n_-} p_t(x,y)f(\tilde{y})dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n_+} p_t(x,y)f(y)dy + \int_{-\infty}^{0}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{C_n t}{(t^2+|x'-y'|^2+|x_n-y_n|^2)^{(n+1)/2}} f\left(y', -y_n\right) dy'dy_n \\
&= \int_{\mathbb{R}^n_+} p_t(x,y)f(y)dy + \int_{0}^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{C_n t}{(t^2+|x'-y'|^2+|x_n+y_n|^2)^{(n+1)/2}} f\left(y', y_n\right) dy'dy_n \\
&= \int_{\mathbb{R}^n_+} [p_t(x,y) + \frac{C_n t}{(t^2+|x'-y'|^2+|x_n+y_n|^2)^{(n+1)/2}}] f(y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n_+} \left(p_t(x,y) + p_t(\tilde{x},y)\right) f(y)dy,
\end{aligned}$$

因此 $\omega(x,t)$ 相对于 x_n 为偶函数, 即

$$\omega\left(x', -x_n, t\right) = \omega\left(x', x_n, t\right),$$

微分说明它的导数是关于 x_n 的奇函数, 因此它在原点处的斜率为0, 即

$$\partial_{x_n}\omega\left(x', 0, t\right) = 0,$$

综上所述, 我们可以得到如下命题.

命题 2.1. *限制在 $\mathbb{R}^n_+ \times (0,\infty)$ 上的经典 Laplace 方程的解 ω , 也满足带有 Neumann 边界值条件的 Laplace 方程. 由 PDE 理论可知, 当 $x \in \mathbb{R}^n_+$ 时, (2.1) 的解 u 与 (2.3) 的解 ω 相同, 则得到*

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n_+} \left(p_t(x,y) + p_t(\tilde{x},y)\right) f(y)dy.$$

为满足 (2.1) 的解公式.

2.2 Neumann-Possion 半群及其对应的 Possion 核

回顾 Neumann 边界值问题 (2.1) , 用 Δ_{N_+} 表示定义在 $\mathbb{R}^n_+$ 上的 Neumann-Laplace 算子, 类似地, 我们可以定义 $\mathbb{R}^n_-$ 上的 Neumann-Laplace 算子 Δ_{N_-}, 由谱定理可以定义由算子 Δ_{N_+}, Δ_{N_-} 生成的 Possion 半群为 $\{e^{-t\sqrt{-\Delta_{N_+}}}\}_{t\geq 0}$, $\{e^{-t\sqrt{-\Delta_{N_-}}}\}_{t\geq 0}$, 用 $p_{t,\Delta_{N_+}}(x,y)$, $p_{t,\Delta_{N_-}}(x,y)$ 记对应的 Possion 核, 由命题 (2.1) , 可以得到

$$p_{t,\Delta_{N_\pm}}(x,y) = p_t(x,y) + p_t(\tilde{x},y), \quad x,y \in \mathbb{R}^n_\pm.$$

注意到对任意 $\mathbb{R}^n_{\pm}$ 上的函数 f , 我们有

$$e^{-t\sqrt{-\Delta}}f_e(x)=\begin{cases}e^{-t\sqrt{-\Delta_{N_\pm}}}f(x), & x\in\mathbb{R}^n_{\pm},\ t\geq 0,\\ e^{-t\sqrt{-\Delta_{N_\pm}}}f(\tilde{x}), & x\in\mathbb{R}^n_{\mp},\ t\geq 0.\end{cases}\tag{2.5}$$

现在设 f 是 $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 的函数, f_+ 是 f 在 $\mathbb{R}^n_+$ 上的限制, f_- 是 f 在 $\mathbb{R}^n_-$ 上的限制. 设 Δ_N 是作用于 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上唯一确定的无界算子, 使得

$$\begin{cases}(\Delta_N f)_+=\Delta_{N_+}f_+, & f_+\in W^{1,2}\left(\mathbb{R}^n_+\right),\\ (\Delta_N f)_-=\Delta_{N_-}f_-, & f_-\in W^{1,2}\left(\mathbb{R}^n_-\right).\end{cases}$$

定义由算子 Δ_N 生成的 Possion 半群为 $\{e^{-t\sqrt{-\Delta_N}}\}_{t\geq 0}$, 用 $p_{t,\Delta_N}(x,y)$ 记对应的 Possion 核, 表达式为

$$p_{t,\Delta_N}(x,y)=\left[p_t(x,y)+p_t(\tilde{x},y)\right]H\left(x_ny_n\right),$$

其中 $H:\mathbb{R}\to\{0,1\}$, 满足

$$H(t)=0, t<0;\quad H(t)=1, t\geq 0.$$

我们注意到, 所有的算子 Δ_N, Δ_{N_+}, Δ_{N_-} 都是自伴算子, 它们生成了作用于 $L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1\leq p\leq\infty)$ 的有界解析正半群, 且满足以下引理.

引理 2.1. *Neumann-Laplace 算子 Δ_N 生成的半群满足*

$$\begin{cases}\left(e^{-t\sqrt{-\Delta_N}}f\right)_+=e^{-t\sqrt{-\Delta_{N_+}}}f_+,\\ \left(e^{-t\sqrt{-\Delta_N}}f\right)_-=e^{-t\sqrt{-\Delta_{N_-}}}f_-.\end{cases}\tag{2.6}$$

证明. 因为

$$\begin{aligned}\left(e^{-t\sqrt{-\Delta_N}}f\right)_+&=e^{-t\sqrt{-\Delta_N}}f\Big|_{\mathbb{R}^n_+}\\ &=p_{t,\Delta_N}*f\big|_{\mathbb{R}^n_+}\\ &=\int_{\mathbb{R}^n_+}p_{t,\Delta_N}(x-y)f(y)dy\\ &=\int_{\mathbb{R}^n_+}p_{t,\Delta_{N_+}}(x-y)f_+(y)dy\\ &=p_{t,\Delta_{N_+}}*f_+\\ &=e^{-t\sqrt{-\Delta_{N_+}}}f_+.\end{aligned}$$

同理

$$\left(e^{-t\sqrt{-\Delta_N}}f\right)_-=e^{-t\sqrt{-\Delta_{N_-}}}f_-.$$

故 (2.6) 式得证, 引理 2.1证毕. □

算子 Δ_N, Δ_{N_+}, Δ_{N_-} 对应的 Possion 核满足以下引理.

引理 2.2. *假设 $p_{t,L}(x,y)$ 是 Δ_N, Δ_{N_+}, Δ_{N_-} 算子之一对应的 Possion 核, 则 $p_{t,L}(x,y)$ 具有 Possion 上界*

$$0 \le p_{t,L}(x,y) \le C\frac{t}{(t+|x-y|)^{n+1}}. \tag{2.7}$$

证明. 以 Δ_{N_+} 为例, 设 x, y 在同一半平面上时, 记

$$p_{t,\Delta_{N_+}}(x,y) = p_t(x,y) + p_t(\tilde{x},y),$$

已知

$$p_t(x,y) = C_n\frac{t}{(t+|x-y|)^{n+1}},$$

其中

$$\begin{aligned} p_t(\tilde{x},y) &= C_n\frac{t}{(t^2+|\tilde{x}-y|^2)^{(n+1)/2}} \\ &= C_n\frac{t}{\left(t^2+|(x',-x_n)-(y',y_n)|^2\right)^{(n+1)/2}} \\ &= C_n\frac{t}{\left(t^2+|x'-y'|^2+|x_n+y_n|^2\right)^{(n+1)/2}} \\ &\le C_n\frac{t}{\left(t^2+|x'-y'|^2+|x_n-y_n|^2\right)^{(n+1)/2}} \\ &\le C_n\frac{t}{(t+|x-y|)^{n+1}}, \end{aligned}$$

故可以得到

$$p_{t,\Delta_{N_+}}(x,y) \le C\frac{t}{(t+|x-y|)^{n+1}}.$$

类似地, Δ_N, Δ_{N_-} 对应的 Possion 核也具有 Possion 上界, 引理 2.2证毕. □

2.3 Neumann-Possion 核的光滑性

目前我们已经定义了 Neumann-Laplace 算子 Δ_N , 以及它生成的 Possion 半群 $\{e^{-t\sqrt{-\Delta_N}}\}_{t\ge 0}$, 和对应的 Possion 核 $p_{t,\Delta_N}(x,y)$. 接下来我们通过引理 2.2, 考虑 $\Delta_N, \Delta_{N_+}, \Delta_{N_-}$ 对应 Possion 核的光滑性.

定理 2.1. *假设 L 是 $\Delta_N, \Delta_{N_+}, \Delta_{N_-}$ 算子之一, 则对 $x,y,z \in \mathbb{R}^n_{\pm}, |x-z| \le |x-y|/2$, 有*

$$|p_{t,L}(x,y) - p_{t,L}(z,y)| \le C\frac{t}{(t+|x-y|)^{n+1}}\frac{|x-z|}{t+|x-y|}\ , \tag{2.8}$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/255201114211011244