

2023 北京陈经纶中学高二 10 月月考

数 学

本试卷共 8 页, 120 分. 考试时长 90 分钟. 考生务必将答案答在答题卡上, 在试卷上作答无效. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回.

第一部分 (选择题 共 40 分)

一、选择题共 10 小题, 每小题 4 分, 共 40 分. 在每小题列出的四个选项中, 选出符合题目要求的一项.

1. 直线 $x - y - 2 = 0$ 的倾斜角是 ()

A. 30°

B. 45°

C. 60°

D. 75°

【答案】B

【解析】

【分析】由直线方程得斜率, 由斜率得倾斜角.

【详解】直线 $x - y - 2 = 0$ 的斜率为 1, 倾斜角为 45° ,

故选: B.

2. 已知点 $A(1, 1, 0)$, $B(-1, 0, 2)$, $C(0, 2, 0)$ 者在平面 α 内, 则平面 α 的一个法向量的坐标可以是 ()

A. $\left(1, 1, -\frac{3}{2}\right)$

B. $\left(1, -1, \frac{1}{2}\right)$

C. $(2, 2, 3)$

D. $(2, -2, -1)$

【答案】C

【解析】

【分析】设出法向量 $\vec{n} = (x, y, z)$, 利用向量垂直得到方程组, 取 $x = 2$ 求出 $\vec{n} = (2, 2, 3)$, 与 $\vec{n} = (2, 2, 3)$ 共线的向量也是法向量, 得到答案.

【详解】由 $A(1, 1, 0)$, $B(-1, 0, 2)$, $C(0, 2, 0)$, 得 $\vec{AB} = (-2, -1, 2)$, $\vec{AC} = (-1, 1, 0)$,

设 $\vec{n} = (x, y, z)$ 是平面 α 的一个法向量, 则 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{AB} = 0, \\ \vec{n} \cdot \vec{AC} = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} -2x - y + 2z = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}$,

取 $x = 2$, 则 $y = 2, z = 3$, 故 $\vec{n} = (2, 2, 3)$, 则与 $\vec{n} = (2, 2, 3)$ 共线的向量也是法向量,

经验证, 只有 C 正确..

故选: C.

3. 过点 $P(-1, 3)$ 且垂直于直线 $x - 2y + 3 = 0$ 的直线方程为 ()

A. $2x + y - 1 = 0$

B. $2x + y - 5 = 0$

C. $x + 2y - 5 = 0$

D. $x - 2y + 7 = 0$

【答案】A

【解析】

【分析】由题意可得直线 $x - 2y + 3 = 0$ 的斜率为 $\frac{1}{2}$ ，由垂直得垂直直线的斜率，然后由点斜式写出直线方程，化为一般式可得结果.

【详解】解：由题意可得直线 $x - 2y + 3 = 0$ 的斜率为 $\frac{1}{2}$ ，

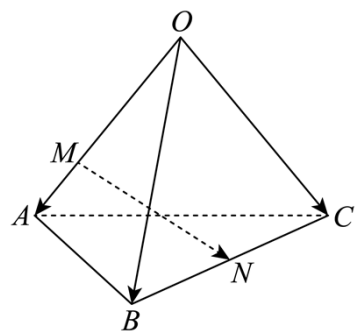
则过点 $P(-1, 3)$ 且垂直于直线 $x - 2y + 3 = 0$ 的直线斜率为 -2 ，

直线方程为 $y - 3 = -2(x + 1)$ ，

化为一般式为 $2x + y - 1 = 0$.

故选：A.

4. 如图，在四面体 $OABC$ 中， $\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}, \vec{OC} = \vec{c}$. 点 M 在 OA 上，且 $\vec{OM} = 2\vec{MA}$, N 为 BC 中点，则 $\vec{MN}$ 等于 ()



A. $\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$

B. $-\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$

C. $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$

D. $\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$

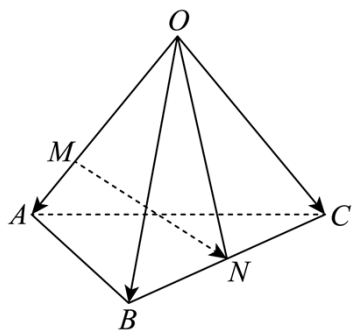
【答案】B

【解析】

【分析】连接 ON ，利用空间向量基本定理可得答案.

【详解】连接 ON , $\vec{MN} = \vec{ON} - \vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{OB} + \vec{OC}) - \frac{2}{3}\vec{OA} = -\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$.

故选：B.



5. 若直线 $\sqrt{3}x + y - 1 = 0$ 与直线 $2\sqrt{3}x + my + 3 = 0$ 平行，则它们之间的距离是 ()

- A. 1 B. $\frac{5}{4}$ C. 3 D. 4

【答案】B

【解析】

【分析】先求得 m 的值，再去求两平行直线间的距离即可.

【详解】由直线 $\sqrt{3}x + y - 1 = 0$ 与直线 $2\sqrt{3}x + my + 3 = 0$ 平行，

可得 $2\sqrt{3} - \sqrt{3}m = 0$ ，解之得 $m = 2$

则直线 $\sqrt{3}x + y - 1 = 0$ 与直线 $2\sqrt{3}x + 2y + 3 = 0$ 间的距离为 $\frac{\left| -1 - \frac{3}{2} \right|}{\sqrt{3+1}} = \frac{5}{4}$

故选：B

6. 已知 $\vec{a} = (2, 3, -2)$ ， $\vec{b} = (-4, 2, 1)$ ， $\vec{c} = (10, 3, \lambda)$ ，若 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ 三个三向量共面，则实数 λ 等于 ()

- A. $\frac{7}{2}$ B. $\frac{5}{2}$ C. $\frac{9}{2}$ D. $-\frac{11}{2}$

【答案】D

【解析】

【分析】根据向量共面，设 $\vec{a} = x\vec{b} + y\vec{c}$ ，由空间向量的坐标线性运算和向量相等，列出方程组，解之可求得答案.

【详解】解：因为 $\vec{a} = (2, 3, -2)$ ， $\vec{b} = (-4, 2, 1)$ ， $\vec{c} = (10, 3, \lambda)$ 三个向量共面，所以设 $\vec{a} = x\vec{b} + y\vec{c}$ ，即 $(2, 3, -2) = x(-4, 2, 1) + y(10, 3, \lambda)$ ，

$$\text{所以} \begin{cases} 2 = -4x + 10y \\ 3 = 2x + 3y \\ -2 = x + \lambda y \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = \frac{1}{2} \\ \lambda = -\frac{11}{2} \end{cases},$$

故选：D.

7. 直线 $l: ax + y + 1 = 0$ 与连接 $A(2, 3), B(-3, 2)$ 的线段相交，则 a 的取值范围是 ()

A. $[-1, 2]$

B. $[2, +\infty) \cup (-\infty, -1)$

C. $[-2, 1] \cup (2, 3)$

D. $(-\infty, -2] \cup [1, +\infty)$

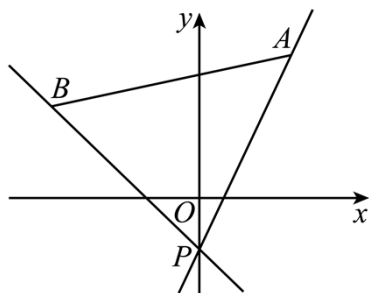
【答案】D

【解析】

【分析】根据给定条件，作出图形，利用斜率公式结合图形求解作答.

【详解】直线 $ax + y + 1 = 0$ 过点 $P(0, -1)$.

如图，



由题意，直线 l 与线段 AB 总有公共点，

即直线 l 以直线 PA 为起始位置，绕点 P 逆时针旋转到直线 PB 即可，

直线 l 的斜率为 k ，直线 PA, PB 的斜率分别为 k_{PA}, k_{PB} ，于是 $k \leq k_{PB}$ 或 $k \geq k_{PA}$ ，

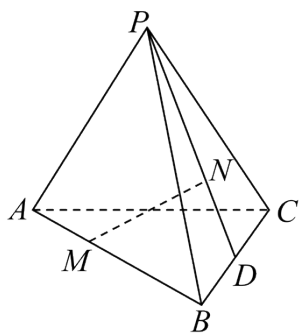
而 $k_{PA} = \frac{3 - (-1)}{2 - 0} = 2, k_{PB} = \frac{2 - (-1)}{-3 - 0} = -1$ ，因此 $k \leq -1$ 或 $k \geq 2$ ，

所以 $-a \leq -1$ 或 $-a \geq 2$ ，解得 $a \leq -2$ 或 $a \geq 1$ ，即 a 的取值范围是 $(-\infty, -2] \cup [1, +\infty)$.

故选：D.

8. 如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中， $\triangle PAC$ 是边长为 3 的正三角形， M 是 AB 上一点， $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} \overrightarrow{MB}$ ， D

为 BC 的中点， N 为 PD 上一点且 $\overrightarrow{PN} = \frac{2}{3} \overrightarrow{PD}$ ，则 $|MN| = ()$



A. 5

B. 3

C. $\sqrt{5}$

D. $\sqrt{3}$

【答案】D

【解析】

【分析】以 $\{\vec{PA}, \vec{PB}, \vec{PC}\}$ 为一组基底，表示 $\vec{MN}$ 求解.

【详解】解：以 $\{\vec{PA}, \vec{PB}, \vec{PC}\}$ 为一组基底，

$$\text{则 } |\vec{MN}|^2 = |\vec{AN} - \vec{AM}|^2,$$

$$= \left| \vec{PN} - \vec{PA} - \frac{1}{3} \vec{AB} \right|^2,$$

$$= \left| \frac{2}{3} \vec{PD} - \vec{PA} - \frac{1}{3} \vec{PB} + \frac{1}{3} \vec{PA} \right|^2,$$

$$= \left| \frac{1}{3} \vec{PB} + \frac{1}{3} \vec{PC} - \vec{PA} - \frac{1}{3} \vec{PB} + \frac{1}{3} \vec{PA} \right|^2,$$

$$= \left| \frac{1}{3} \vec{PC} - \frac{2}{3} \vec{PA} \right|^2,$$

$$= \frac{1}{9} \vec{PC}^2 - \frac{4}{9} \vec{PC} \cdot \vec{PA} + \frac{4}{9} \vec{PA}^2,$$

$$= \frac{1}{9} \times 9 - \frac{4}{9} \times 3 \times 3 \times \cos 60^\circ + \frac{4}{9} \times 9 = 3,$$

$$\text{所以 } |\vec{MN}| = \sqrt{3}.$$

故选：D

9. $A(-2,0)$, $B(2,0)$, $C(0,2)$, $E(-1,0)$, $F(1,0)$, 一束光线从点 F 出发射到 BC 上的点 D , 经 BC 反射后, 再经 AC 反射, 落到线段 AE 上 (不含端点), 则 FD 的斜率的取值范围是 ()

A. $(-\infty, 2)$

B. $(0, +\infty)$

C. $(1, +\infty)$

D. $(4, +\infty)$

【答案】D

【解析】

【分析】先根据题意求得 $A(-2,0)$ 关于直线 BC 对称的点为 $A_1(2,4)$ ，点 $E(-1,0)$ 关于直线 AC 的对称点为 $E_1(-2,1)$ ，点 $E_1(-2,1)$ 关于直线 BC 的对称点为 $E_2(1,4)$ ，再数形结合得到点 D 的变动范围，从而得到 $k_{FD} > k_{A_1F}$ ，由此得解.

【详解】设直线 BC 方程为 $y = kx + b$ ，则 $\begin{cases} 0 = 2k + b \\ 2 = b \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} k = -1 \\ b = 2 \end{cases}$ ，即 $BC: y = -x + 2$ ，即

$$BC: x + y - 2 = 0,$$

设 $A(-2,0)$ 关于直线 BC 对称的点为 $A_1(x, y)$ ，则 $\begin{cases} \frac{y}{x+2} = 1 \\ \frac{x-2}{2} + \frac{y}{2} - 2 = 0 \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$ ，即 $A_1(2,4)$ ，

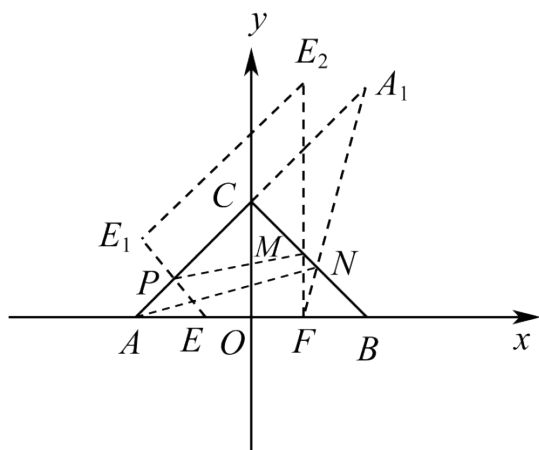
$$k_{A_1F} = 4,$$

同理可得：

点 $E(-1,0)$ 关于直线 $AC: y = x + 2$ 的对称点为 $E_1(-2,1)$ ，

点 $E_1(-2,1)$ 关于直线 $BC: y = -x + 2$ 的对称点为 $E_2(1,4)$ ，

如图所示：



利用光线反射的性质可知，当这束光线反射后最终经过点 A 时，则其先经过点 N ；当这束光线反射后最终经过点 E 时，则其先经过点 M ；

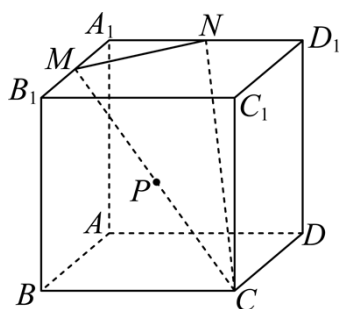
所以点 M, N 之间为点 D 的变动范围,

因为 $E_2(1,4)$, $F(1,0)$, 所以直线 FE_2 , 即直线 FM 斜率不存在, 而 $k_{FN} = k_{A_1F} = 4$,

所以 $k_{FD} > k_{FN} = 4$, 即 $k_{FD} \in (4, +\infty)$.

故选: D

10. 如图, 在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, M, N 分别是棱 A_1B_1, A_1D_1 的中点, 点 E 在 BD 上, 点 F 在 B_1C 上, 且 $BE = CF$, 点 P 在线段 CM 上运动, 给出下列四个结论:



①当点 E 是 BD 中点时, 直线 $EF \parallel$ 平面 DCC_1D_1 ;

②直线 B_1D_1 到平面 CMN 的距离是 $\frac{\sqrt{2}}{2}$;

③存在点 P , 使得 $\angle B_1PD_1 = 90^\circ$;

④ $\triangle PDD_1$ 面积的最小值是 $\frac{5\sqrt{5}}{6}$.

其中所有正确结论的个数是 ()

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

【答案】C

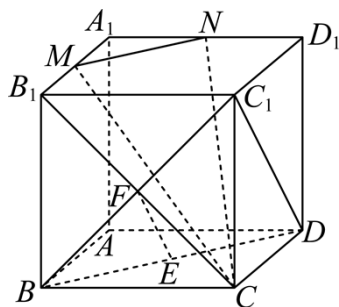
【解析】

【分析】根据线面平行的判定判断①; 根据等体积法求得点 D_1 到平面 CMN 的距离即直线 B_1D_1 到平面 CMN 的距离, 判断②; 建立空间直角坐标系, 利用空间向量的数量积运算解决垂直问题, 判断③; 求出 $\triangle PDD_1$ 面积的表达式, 结合二次函数知识求得面积的最小值, 判断④, 即得答案.

【详解】对于①, 点 E 是 BD 中点, $BD = B_1C = 2\sqrt{2}$,

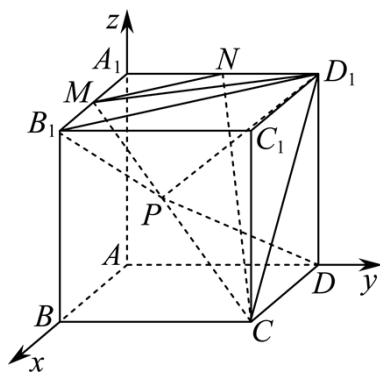
而 $BE = CF$, 故 $CF = BE = \sqrt{2}$, 即 F 为 B_1C 的中点,

连接 DC_1 ，则 $EF \parallel DC_1$ ，因为 $EF \not\subset$ 平面 DCC_1D_1 ， $DC_1 \subset$ 平面 DCC_1D_1 ，



故直线 $EF \parallel$ 平面 DCC_1D_1 ，①正确；

对于②，连接 B_1D_1 ， M, N 分别是棱 A_1B_1 ， A_1D_1 的中点，



故 $B_1D_1 \parallel MN$ ， $B_1D_1 \not\subset$ 平面 CMN ， $MN \subset$ 平面 CMN ，

故 $B_1D_1 \parallel$ 平面 CMN ，

故直线 B_1D_1 到平面 CMN 的距离等于点 D_1 到平面 CMN 的距离，设为 h ；

$$MN = \frac{1}{2} B_1D_1 = \sqrt{2}, CN = CM = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + 1^2} = 3, V_{C-MND_1} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 1 \times 1 \right) \times 2 = \frac{1}{3},$$

$$S_{\triangle CMN} = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{3^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2} = \frac{\sqrt{17}}{2}, \text{ 故 } V_{D_1-CMN} = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{17}}{2} \times h,$$

$$\text{由于 } V_{C-MND_1} = V_{D_1-CMN}, \text{ 故 } \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{17}}{2} \times h, \therefore h = \frac{2\sqrt{17}}{17}, \text{ ②错误；}$$

对于③，以点 A 为坐标原点， AB, AD, AA_1 为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系，

则 $M(1,0,2), C(2,2,0), B_1(2,0,2), D_1(0,2,2)$ ，

$$\overrightarrow{MC} = (1, 2, -2), \text{ 设 } \overrightarrow{MP} = t \cdot \overrightarrow{MC} = (t, 2t, -2t), t \in [0, 1],$$

故 $P(t+1, 2t, -2t+2)$, 则 $\overrightarrow{PB_1} = (1-t, -2t, 2t)$, $\overrightarrow{PD_1} = (-t-1, 2-2t, 2t)$,

由 $\angle B_1PD_1 = 90^\circ$, 得 $\overrightarrow{PB_1} \cdot \overrightarrow{PD_1} = (1-t)(-t-1) + (-2t)(2-2t) + 2t \cdot 2t = 9t^2 - 4t - 1 = 0$,

解得 $t = \frac{2 \pm \sqrt{13}}{9} \in [0, 1]$, 故存在点 P , 使得 $\angle B_1PD_1 = 90^\circ$, ③正确;

对于④, 由③知 $P(t+1, 2t, -2t+2)$ 在 DD_1 上的投影为 $(0, 2, -2t+2)$,

故 $P(t+1, 2t, -2t+2)$ 到 DD_1 的距离为 $d = \sqrt{(t+1)^2 + (2-2t)^2} = \sqrt{5\left(t - \frac{3}{5}\right)^2 + \frac{16}{5}}$,

则 $\triangle PDD_1$ 的面积为 $S = \frac{1}{2} \times 2 \times d = \sqrt{5\left(t - \frac{3}{5}\right)^2 + \frac{16}{5}}, t \in [0, 1]$,

当 $t = \frac{3}{5} \in [0, 1]$ 时, $5\left(t - \frac{3}{5}\right)^2 + \frac{16}{5}$ 取得最小值 $\frac{16}{5}$,

故 $\triangle PDD_1$ 的面积 S 取到最小值 $\frac{4\sqrt{5}}{5}$, ④错误,

故所有正确结论的个数是 2,

故选: C

第二部分 (非选择题 共 80 分)

二、填空题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分.

11. 若直线 $l_1: mx + y - 1 = 0$ 与 $l_2: (4m-3)x + my - 1 = 0$ 平行, 则实数 $m =$ _____.

【答案】3

【解析】

【分析】根据两直线平行, 列出有关 m 的等式, 即可求出实数 m 的值, 再验证直线的关系.

【详解】由于 l_1 与 l_2 平行,

则 $m^2 - (4m-3) = 0$, 则 $m = 1$ 或 $m = 3$,

当 $m = 1$ 时, $l_1: x + y - 1 = 0$, $l_2: x + y - 1 = 0$, 两直线重合,

当 $m = 3$ 时, $l_1: 3x + y - 1 = 0$, $l_2: 9x + 3y - 1 = 0$, 两直线平行.

故答案为: 3.

12. 已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点的坐标为 $A(3, 3)$ 、 $B(2, -2)$ 、 $C(-7, 1)$, 则 BC 边上的高所在的直线方程是 _____; $\triangle ABC$ 的面积是 _____.

【答案】 ①. $3x - y - 6 = 0$ ②. 24

【解析】

【分析】(1) 先求出直线 BC 的斜率, 进而得 BC 边上的高的斜率, 由点斜式写出方程即可;

(2) 先求出 BC 及直线 BC 方程, 再由点到直线距离公式求得 A 到 BC 的距离, 即可求得面积.

【详解】由 $k_{BC} = \frac{-2-1}{2-(-7)} = -\frac{1}{3}$, 则 BC 边上的高的斜率 3,

又经过 A 点, 故方程为 $y - 3 = 3(x - 3)$, 化简为 $3x - y - 6 = 0$;

又 $BC = \sqrt{(2+7)^2 + (-2-1)^2} = 3\sqrt{10}$,

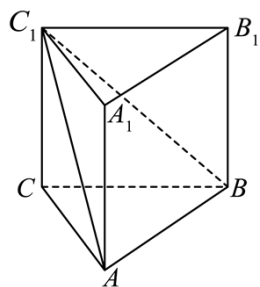
直线 BC 的方程为 $y + 2 = -\frac{1}{3}(x - 2)$, 整理为 $x + 3y + 4 = 0$,

而点 A 到 BC 的距离为 $\frac{|3+3 \times 3+4|}{\sqrt{1^2+3^2}} = \frac{16}{\sqrt{10}}$,

则 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2} \times 3\sqrt{10} \times \frac{16}{\sqrt{10}} = 24$.

故答案为: $3x - y - 6 = 0$, 24

13. 如图, 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 所有棱长均为 1, 且 $AA_1 \perp$ 底面 ABC , 则点 B_1 到平面 ABC_1 的距离为_____.



【答案】 $\frac{\sqrt{21}}{7}$

【解析】

【分析】建立合适的空间直角坐标系, 求出所需点的坐标和向量的坐标, 利用待定系数法求出平面 ABC_1 的法向量, 再由点到平面的距离公式求解即可.

【详解】以点 C 为坐标原点, 建立空间直角坐标系如图所示,

则 $A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), B(0, 1, 0), B_1(0, 1, 1), C_1(0, 0, 1)$,

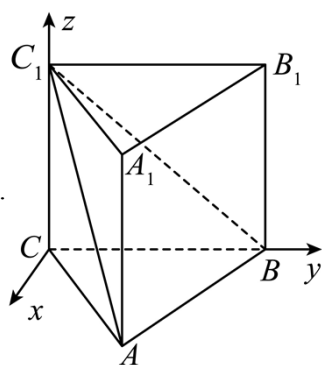
所以 $\overrightarrow{C_1A} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, -1\right)$, $\overrightarrow{C_1B} = (0, 1, -1)$, $\overrightarrow{C_1B_1} = (0, 1, 0)$,

设平面 ABC_1 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$, 则 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{C_1A} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{C_1B} = 0 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$,

令 $x = 1$, 则 $y = z = \sqrt{3}$, 故 $\vec{n} = (1, \sqrt{3}, \sqrt{3})$,

所以点 B_1 到平面 ABC_1 的距离为 $\left| \frac{\overrightarrow{C_1B_1} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \right| = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1+3+3}} = \frac{\sqrt{21}}{7}$.

故答案为: $\frac{\sqrt{21}}{7}$.



14. 已知平面内点一定点 $A(-3,1)$, 点 M, N 分别是 x 轴和直线 $2x + y - 5 = 0$ 上的两个动点, 则 $|AM| + |MN|$ 的最小值为_____.

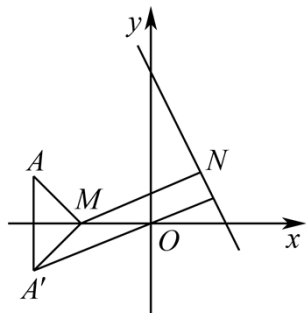
【答案】 $\frac{12\sqrt{5}}{5}$

【解析】

【分析】 利用对称性, 作点 $A(-3,1)$ 关于 x 轴的对称点 $A'(-3,-1)$, $|AM| + |MN| = |A'M| + |MN|$,

利用数形结合求 $|AM| + |MN|$ 的最小值.

【详解】 作出点 $A(-3,1)$ 关于 x 轴的对称点 $A'(-3,-1)$, 则 $|AM| + |MN| = |A'M| + |MN|$,



最小值即为 $A'(-3, -1)$ 到直线 $2x+y-5=0$ 的距离 $d = \frac{|-6-1-5|}{\sqrt{5}} = \frac{12\sqrt{5}}{5}$,

所以 $|AM| + |MN|$ 的最小值为 $\frac{12\sqrt{5}}{5}$.

故答案为: $\frac{12\sqrt{5}}{5}$.

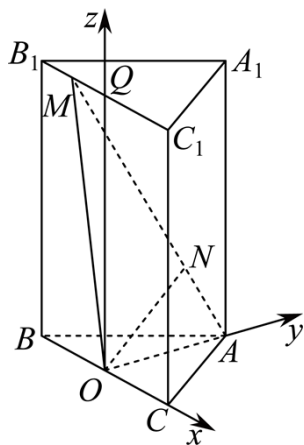
15. 正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AB = 2$, $AA_1 = \sqrt{3}$, O 为 BC 的中点, M 是棱 B_1C_1 上一动点, 过 O 作 $ON \perp AM$ 于点 N , 则线段 MN 长度的最小值为_____.

【答案】 $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ## $\frac{1}{2}\sqrt{6}$

【解析】

【分析】以 O 为原点, OC, OA, OQ 所在直线分别为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系, 在直角三角形 OMA 中, 利用相似三角形求出 MN 的表达式, 利用函数单调性即可求得.

【详解】因为正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, O 为 BC 的中点, 取 B_1C_1 中点 Q 连接 OQ , 如图, 以 O 为原点, OC, OA, OQ 所在直线分别为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系,



则 $O(0, 0, 0), A(0, \sqrt{3}, 0), B_1(-1, 0, \sqrt{3}), C_1(1, 0, \sqrt{3})$,

因为 M 是棱 B_1C_1 上一动点, 设 $M(a, 0, \sqrt{3})$, 且 $a \in [-1, 1]$,

所以, $\vec{OM} \cdot \vec{OA} = (a, 0, \sqrt{3}) \cdot (0, \sqrt{3}, 0) = 0$,

则 $OA \perp OM$.

因为 $ON \perp AM$, 所以在直角三角形 OMA 中,

可得 $\angle OMN \sim \angle AMO$, 所以 $\frac{MN}{MO} = \frac{MO}{MA}$,

$$\text{即 } MN = \frac{MO^2}{MA} = \frac{a^2 + 3}{\sqrt{a^2 + (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2}} = \frac{a^2 + 3}{\sqrt{a^2 + 6}},$$

于是令 $t = \sqrt{a^2 + 6}$, $t \in [\sqrt{6}, \sqrt{7}]$,

$$\text{所以 } \frac{a^2 + 3}{\sqrt{a^2 + 6}} = \frac{t^2 - 3}{t} = t - \frac{3}{t}, t \in [\sqrt{6}, \sqrt{7}],$$

又函数 $y = t - \frac{3}{t}$ 在 $t \in [\sqrt{6}, \sqrt{7}]$ 上单调递增,

$$\text{所以当 } t = \sqrt{6} \text{ 时, } (t - \frac{3}{t})_{\min} = \sqrt{6} - \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2},$$

即线段 MN 长度的最小值为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

故答案为: $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

16. 已知点 $A(-1,0), B(1,0), C(0,1)$, 直线 $y=ax+b(a>0)$ 将 $\triangle ABC$ 分割为面积相等的两部分, 则 b 的取值范围是

【答案】 $\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

【解析】

【分析】解法一: 先求得直线 $y=ax+b$ ($a>0$) 与 x 轴的交点为 $M(-\frac{b}{a}, 0)$, 由 $-\frac{b}{a} \leq 0$ 可得点 M 在射线 OA 上. 求出直线和 BC 的交点 N 的坐标, ①若点 M 和点 A 重合, 求得 $b = \frac{1}{3}$; ②若点 M 在点 O 和点 A 之间, 求得 $\frac{1}{3} < b < \frac{1}{2}$; ③若点 M 在点 A 的左侧, 求得 $\frac{1}{3} > b > 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$. 再把以上得到的三个 b 的范围取并集, 可得结果.

解法二: 考查临界位置时对应的 b 值, 综合可得结论.

【详解】解法一: 由题意可得, 三角形 ABC 的面积为 $\frac{1}{2} \cdot AB \cdot OC = 1$,

由于直线 $y=ax+b$ ($a>0$) 与 x 轴的交点为 $M(-\frac{b}{a}, 0)$,

由直线 $y=ax+b$ ($a>0$) 将 $\triangle ABC$ 分割为面积相等的两部分, 可得 $b>0$,

故 $-\frac{b}{a} \leq 0$, 故点 M 在射线 OA 上.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/255211000333011304>