

江苏省无锡市育才中学 2024 届高三第二次诊断性检测数学试卷

注意事项

1. 考生要认真填写考场号和座位序号。
2. 试题所有答案必须填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。第一部分必须用 2B 铅笔作答；第二部分必须用黑色字迹的签字笔作答。
3. 考试结束后，考生须将试卷和答题卡放在桌面上，待监考员收回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 双曲线 $C: x^2 - 2y^2 = 1$ 的渐近线方程为()

A. $x \pm \sqrt{2}y = 0$

B. $x \pm 2y = 0$

C. $\sqrt{2}x \pm y = 0$

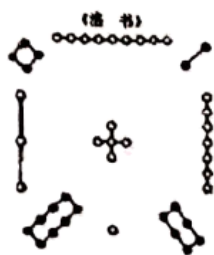
D. $2x \pm y = 0$

2. 如图是甲、乙两位同学在六次数学小测试（满分 100 分）中得分情况的茎叶图，则下列说法错误的是（ ）

甲				乙	
		9	7	2	4
2	2	8	8	1	9
	1	3	9	6	9

- A. 甲得分的平均数比乙大
B. 甲得分的极差比乙大
C. 甲得分的方差比乙小
D. 甲得分的中位数和乙相等

3. 洛书，古称龟书，是阴阳五行术数之源，在古代传说中有神龟出于洛水，其甲壳上心有此图象，结构是戴九履一，左三右七，二四为肩，六八为足，以五居中，五方白圈皆阳数，四角黑点为阴数. 如图，若从四个阴数和五个阳数中分别随机选取 1 个数，则其和等于 11 的概率是 ().



- A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{3}{10}$ D. $\frac{1}{4}$

4. 已知函数 $f(x) = (x-a-1)e^x$, 若 $2^a = \log_2 b = c$, 则 ()

- A. $f(a) < f(b) < f(c)$ B. $f(b) < f(c) < f(a)$
C. $f(a) < f(c) < f(b)$ D. $f(c) < f(b) < f(a)$

5. 一个四面体所有棱长都是 4，四个顶点在同一个球上，则球的表面积为 ()

- A. 24π B. $8\sqrt{6}\pi$ C. $\frac{4\sqrt{3}\pi}{3}$ D. 12π

6. 波罗尼斯（古希腊数学家，的公元前 262-190 年）的著作《圆锥曲线论》是古代世界光辉的科学成果，它将圆锥曲线的性质网罗殆尽，几乎使后人没有插足的余地。他证明过这样一个命题：平面内与两定点距离的比为常数 k ($k>0$ ，且 $k\neq 1$) 的点的轨迹是圆，后人将这个圆称为阿波罗尼斯圆。现有椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a>b>0$)，A，B 为椭圆的长轴端点，C，D 为椭圆的短轴端点，动点 M 满足 $\frac{|MA|}{|MB|} = 2$ ， $\triangle MAB$ 面积的最大值为 8， $\triangle MCD$ 面积的最小值为 1，则椭圆的离心率为 ()

且 $k\neq 1$) 的点的轨迹是圆，后人将这个圆称为阿波罗尼斯圆。现有椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a>b>0$)，A，B 为椭圆的长轴端点，C，D 为椭圆的短轴端点，动点 M 满足 $\frac{|MA|}{|MB|} = 2$ ， $\triangle MAB$ 面积的最大值为 8， $\triangle MCD$ 面积的最小值为 1，则椭圆的离心率为 ()

点，C，D 为椭圆的短轴端点，动点 M 满足 $\frac{|MA|}{|MB|} = 2$ ， $\triangle MAB$ 面积的最大值为 8， $\triangle MCD$ 面积的最小值为 1，则椭圆的离心率为 ()

的离心率为 ()

- A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

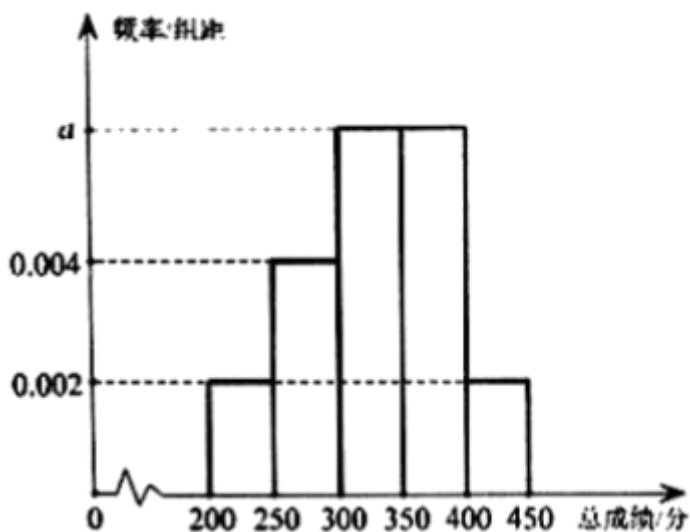
7. 复数 $(a-i)(2-i)$ 的实部与虚部相等，其中 i 为虚部单位，则实数 $a =$ ()

- A. 3 B. $-\frac{1}{3}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. -1

8. 设复数 z 满足 $\frac{z-i}{i} = z - 2i$ (i 为虚数单位)，则 $z =$ ()

- A. $\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$ B. $\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$ C. $-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$ D. $-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$

9. 某地区教育主管部门为了对该地区模拟考试成进行分析，随机抽取了 200 分到 450 分之间的 2000 名学生的成绩，并根据这 2000 名学生的成绩画出样本的频率分布直方图，如图所示，则成绩在 $[250, 350]$ 内的学生人数为 ()



- A. 800 B. 1000 C. 1200 D. 1600

10. 已知函数 $f(x) = m(x-1) - (x-2)e^{x-e}$ (e 为自然对数底数)，若关于 x 的不等式 $f(x) > 0$ 有且只有一个正整数解，则实数 m 的最大值为 ()

- A. $\frac{e^3+e}{2}$ B. $\frac{e^2+e}{2}$ C. $\frac{e^3-e}{2}$ D. $\frac{e^2-e}{2}$

11. 已知直线 $l: \sqrt{3}x + y + 2 = 0$ 与圆 $O: x^2 + y^2 = 4$ 交于 A, B 两点, 与 l 平行的直线 l_1 与圆 O 交于 M, N 两点, 且 $\triangle OAB$ 与 $\triangle OMN$ 的面积相等, 给出下列直线 l_1 : ① $\sqrt{3}x + y - 2\sqrt{3} = 0$, ② $\sqrt{3}x + y - 2 = 0$, ③ $x - \sqrt{3}y + 2 = 0$, ④ $\sqrt{3}x + y + 2\sqrt{3} = 0$. 其中满足条件的所有直线 l_1 的编号有 ()

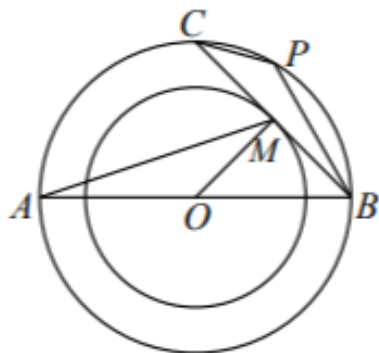
- A. ①② B. ①④ C. ②③ D. ①②④

12. 某校为提高新入职教师的教学水平, 实行“老带新”的师徒结对指导形式, 要求每位老教师都有徒弟, 每位新教师都有一位老教师指导, 现选出 3 位老教师负责指导 5 位新入职教师, 则不同的师徒结对方式共有 () 种.

- A. 360 B. 240 C. 150 D. 120

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 如图, 两个同心圆 O 的半径分别为 2 和 $\sqrt{2}$, AB 为大圆 O 的一条直径, 过点 B 作小圆 O 的切线交大圆于另一点 C , 切点为 M , 点 P 为劣弧 $\widehat{BC}$ 上的任一点 (不包括 B, C 两点), 则 $\overrightarrow{AM} \cdot (\overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CP})$ 的最大值是_____.



14. 已知抛物线 $C: y^2 = 16x$ 的对称轴与准线的交点为 M , 直线 $l: y = kx - 4k$ 与 C 交于 A, B 两点, 若 $|AM| = 4|BM|$, 则实数 $k =$ _____.

15. 已知点 $(1, 2)$ 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{4} = 1 (a > 0)$ 渐近线上的一点, 则双曲线的离心率为_____

16. 在二项式 $(x^2 + 2)^6$ 的展开式中, x^8 的系数为_____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (12 分) 设数列 $\{a_n\}$, 其前 n 项和 $S_n = -3n^2$, 又 $\{b_n\}$ 单调递增的等比数列, $b_1 b_2 b_3 = 512$, $a_1 + b_1 = a_3 + b_3$.

(I) 求数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式;

(II) 若 $c_n = \frac{b_n}{(b_n - 2)(b_n - 1)}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n , 并求证: $\frac{2}{3} \leq T_n < 1$.

18. (12 分) 已知 $f(x) = 2\ln(x+2) - (x+1)^2$, $g(x) = k(x+1)$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 当 $k=2$ 时, 求证: 对于 $\forall x > -1$, $f(x) < g(x)$ 恒成立;

(3) 若存在 $x_0 > -1$, 使得当 $x \in (-1, x_0)$ 时, 恒有 $f(x) > g(x)$ 成立, 试求 k 的取值范围.

19. (12 分) 已知函数 $f(x) = (2-x)e^x + ax$.

(I) 已知 $x=2$ 是 $f(x)$ 的一个极值点, 求曲线 $f(x)$ 在 $(0, f(0))$ 处的切线方程

(II) 讨论关于 x 的方程 $f(x) = a \ln x (a \in \mathbb{R})$ 根的个数.

20. (12 分) 设函数 $f(x) = 5 - |x+a| - |x-2|$.

(1) 当 $a=1$ 时, 求不等式 $f(x) \geq 0$ 的解集;

(2) 若 $f(x) \leq 1$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

21. (12 分) 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - ae^x - 2a^2x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $f(x) \geq 0$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

22. (10 分) 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$, 点 F 为抛物线的焦点, 焦点 F 到直线 $3x - 4y + 2 = 0$ 的距离为 d_1 ,

焦点 F 到抛物线 C 的准线的距离为 d_2 , 且 $\frac{d_1}{d_2} = \frac{1}{2}$.

(1) 求抛物线 C 的标准方程;

(2) 若 x 轴上存在点 M , 过点 M 的直线 l 与抛物线 C 相交于 P 、 Q 两点, 且 $\frac{1}{|PM|^2} + \frac{1}{|QM|^2}$ 为定值, 求点 M 的坐标.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、A

【解析】

将双曲线方程化为标准方程为 $x^2 - \frac{y^2}{\frac{1}{2}} = 1$ ，其渐近线方程为 $x^2 - \frac{y^2}{\frac{1}{2}} = 0$ ，化简整理即得渐近线方程.

【详解】

双曲线 $C: x^2 - 2y^2 = 1$ 得 $x^2 - \frac{y^2}{\frac{1}{2}} = 1$ ，则其渐近线方程为 $x^2 - \frac{y^2}{\frac{1}{2}} = 0$ ，

整理得 $x \pm \sqrt{2}y = 0$.

故选：A

【点睛】

本题主要考查了双曲线的标准方程，双曲线的简单性质的应用.

2、B

【解析】

由平均数、方差公式和极差、中位数概念，可得所求结论.

【详解】

对于甲， $\bar{x}_1 = \frac{79+88+82+82+93+91}{6} \approx 85.8$ ；

对于乙， $\bar{x}_2 = \frac{72+74+81+89+96+99}{6} \approx 85.2$ ，

故 A 正确；

甲的极差为 $93 - 79 = 14$ ，乙的极差为 $99 - 72 = 27$ ，故 B 错误；

对于甲，方差 $S_1^2 \approx 26.5$ ，

对于乙，方差 $S_2^2 \approx 106.5$ ，故 C 正确；

甲得分的中位数为 $\frac{82+88}{2} = 85$ ，乙得分的中位数为 $\frac{81+89}{2} = 85$ ，故 D 正确.

故选：B.

【点睛】

本题考查茎叶图的应用，考查平均数和方差等概念，培养计算能力，意在考查学生对这些知识的理解掌握水平，属于基础题.

3、A

【解析】

基本事件总数 $n = 4 \times 5 = 20$ ，利用列举法求出其和等于 11 包含的基本事件有 4 个，由此能求出其和等于 11 的概率.

【详解】

解：从四个阴数和五个阳数中分别随机选取 1 个数，

基本事件总数 $n = 4 \times 5 = 20$ ，

其和等于 11 包含的基本事件有：(9,2)，(3,8)，(7,4)，(5,6)，共 4 个，

$\therefore$ 其和等于 11 的概率 $p = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$.

故选：A.

【点睛】

本题考查概率的求法，考查古典概型等基础知识，考查运算求解能力，属于基础题.

4、C

【解析】

利用导数求得 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上递增，结合 $y = c$ 与 $y = 2^x$, $y = \log_2 x$, $y = x$ 图象，判断出 a, b, c 的大小关系，由此比较出 $f(a), f(b), f(c)$ 的大小关系.

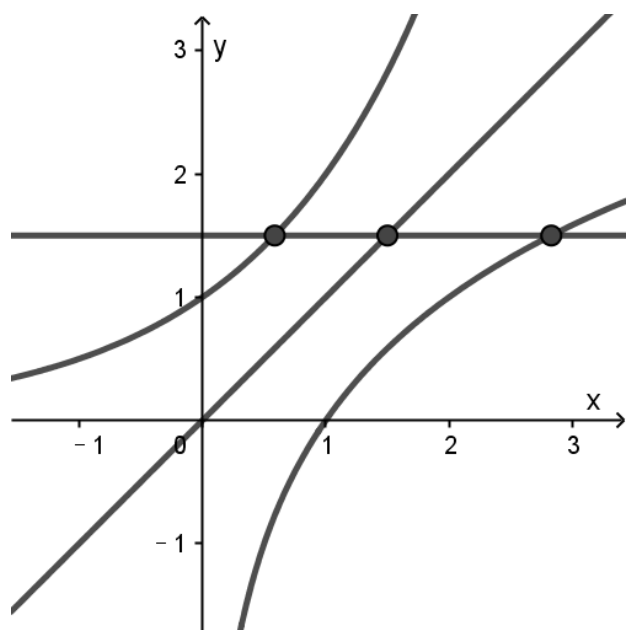
【详解】

因为 $f'(x) = (x - a)e^x$ ，所以 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上单调递增；

在同一坐标系中作 $y = c$ 与 $y = 2^x$, $y = \log_2 x$, $y = x$ 图象，

由 $2^a = \log_2 b = c$ ，可得 $a < c < b$ ，故 $f(a) < f(c) < f(b)$.

故选：C



【点睛】

本小题主要考查利用导数研究函数的单调性，考查利用函数的单调性比较大小，考查数形结合的数学思想方法，属于中档题.

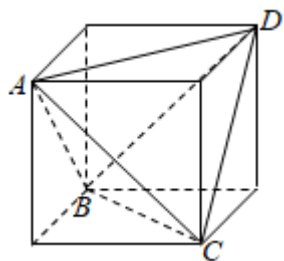
5、A

【解析】

将正四面体补成正方体，通过正方体的对角线与球的半径关系，求解即可.

【详解】

解：如图，将正四面体补形成一个正方体，正四面体的外接球与正方体的外接球相同，



∵四面体所有棱长都是 4，

∴正方体的棱长为 $2\sqrt{2}$ ，

设球的半径为 r ，

则 $2r = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + 4^2}$ ，解得 $r = \sqrt{6}$ ，

所以 $S = 4\pi r^2 = 24\pi$ ，

故选：A.

【点睛】

本题主要考查多面体外接球问题，解决本题的关键在于，巧妙构造正方体，利用正方体的外接球的直径为正方体的对角线，从而将问题巧妙转化，属于中档题.

6、D

【解析】

求得定点 M 的轨迹方程 $\left(x - \frac{5a}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{16a^2}{9}$ 可得 $\frac{1}{2} \times 2a \times \frac{4}{3}a = 8, \frac{1}{2} \times 2b \times \frac{1}{3}a = 1$ ，解得 a, b 即可.

【详解】

设 A (-a, 0), B (a, 0), M (x, y). ∵动点 M 满足 $\frac{|MA|}{|MB|} = 2$,

则 $\sqrt{(x+a)^2 + y^2} = 2\sqrt{(x-a)^2 + y^2} = 2$ ，化简得 $(x - \frac{5a}{3})^2 + y^2 = \frac{16a^2}{9}$.

∵ $\triangle MAB$ 面积的最大值为 8, $\triangle MCD$ 面积的最小值为 1,

$$\therefore \frac{1}{2} \times 2a \times \frac{4}{3}a = 8, \frac{1}{2} \times 2b \times \frac{1}{3}a = 1, \text{ 解得 } a = \sqrt{6}, b = \frac{\sqrt{6}}{2},$$

$$\therefore \text{椭圆的离心率为 } \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

故选 D.

【点睛】

本题考查了椭圆离心率, 动点轨迹, 属于中档题.

7、B

【解析】

利用乘法运算化简复数 $(a-i)(2-i)$ 即可得到答案.

【详解】

$$\text{由已知, } (a-i)(2-i) = 2a-1-(a+2)i, \text{ 所以 } 2a-1 = -a-2, \text{ 解得 } a = -\frac{1}{3}.$$

故选: B

【点睛】

本题考查复数的概念及复数的乘法运算, 考查学生的基本计算能力, 是一道容易题.

8、B

【解析】

$$\text{易得 } z = \frac{2+i}{1-i}, \text{ 分子分母同乘以分母的共轭复数即可.}$$

【详解】

$$\text{由已知, } z-i = zi+2, \text{ 所以 } z = \frac{2+i}{1-i} = \frac{(2+i)(1+i)}{2} = \frac{1+3i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i.$$

故选: B.

【点睛】

本题考查复数的乘法、除法运算, 考查学生的基本计算能力, 是一道容易题.

9、B

【解析】

由图可列方程算得 a , 然后求出成绩在 $[250, 350]$ 内的频率, 最后根据频数=总数 $\times$ 频率可以求得成绩在 $[250, 350]$ 内的学生人数.

【详解】

由频率和为 1，得 $(0.002 + 0.004 + 2a + 0.002) \times 50 = 1$ ，解得 $a = 0.006$ ，

所以成绩在 $[250, 350]$ 内的频率 $= (0.004 + 0.006) \times 50 = 0.5$ ，

所以成绩在 $[250, 350]$ 内的学生人数 $= 2000 \times 0.5 = 1000$ 。

故选：B

【点睛】

本题主要考查频率直方图的应用，属基础题。

10、A

【解析】

若不等式 $f(x) > 0$ 有且只有一个正整数解，则 $y = m(x-1)$ 的图象在 $y = g(x)$ 图象的上方只有一个正整数值，利用导数求出 $g(x)$ 的最小值，分别画出 $y = g(x)$ 与 $y = m(x-1)$ 的图象，结合图象可得。

【详解】

解： $f(x) = m(x-1) - (x-2)e^x - e > 0$ ，

$\therefore m(x-1) > (x-2)e^x + e$ ，

设 $y = g(x) = (x-2)e^x + e$ ，

$\therefore g'(x) = (x-1)e^x$ ，

当 $x > 1$ 时， $g'(x) > 0$ ，函数 $g(x)$ 单调递增，

当 $x < 1$ 时， $g'(x) < 0$ ，函数 $g(x)$ 单调递减，

$\therefore g(x) \geq g(1) = 0$ ，

当 $x \rightarrow +\infty$ 时， $f(x) \rightarrow +\infty$ ，当 $x \rightarrow -\infty$ ， $f(x) \rightarrow e$ ，

函数 $y = m(x-1)$ 恒过点 $(1, 0)$ ，

分别画出 $y = g(x)$ 与 $y = m(x-1)$ 的图象，如图所示，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/255330223011011201>

