

## 2023-2024 学年安徽省安庆市六校高三下学期第四次诊断考试数学试题试卷

### 注意事项

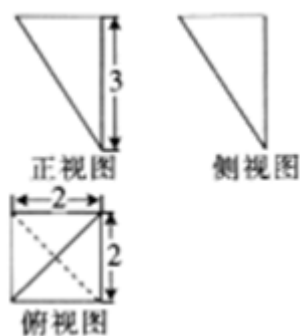
1. 考生要认真填写考场号和座位序号。
2. 试题所有答案必须填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。第一部分必须用 2B 铅笔作答；第二部分必须用黑色字迹的签字笔作答。
3. 考试结束后，考生须将试卷和答题卡放在桌面上，待监考员收回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设复数  $z$  满足  $z \cdot (1+i) = 2i+1$  ( $i$  为虚数单位)，则复数  $z$  的共轭复数在复平面内对应的点位于 ( )

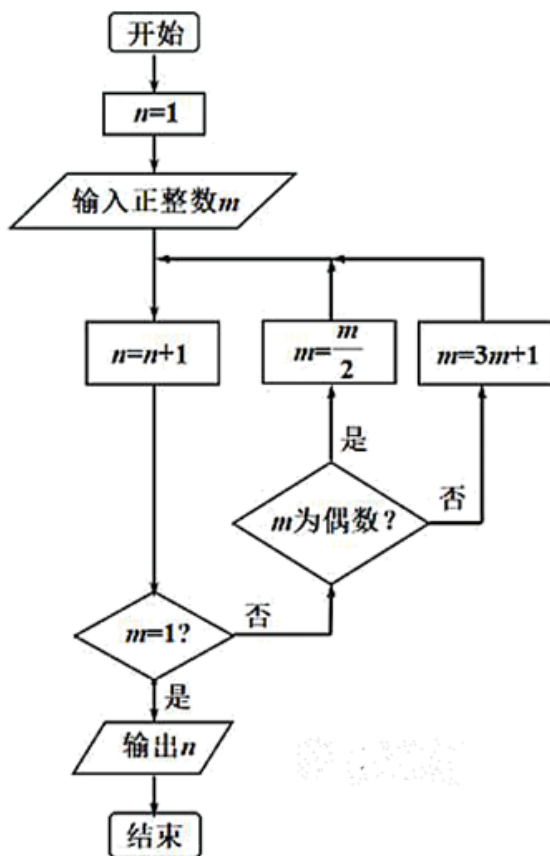
- A. 第一象限      B. 第二象限      C. 第三象限      D. 第四象限

2. 已知某几何体的三视图如图所示，其中正视图与侧视图是全等的直角三角形，则该几何体的各个面中，最大面的面积为 ( )



- A. 2      B. 5      C.  $\sqrt{13}$       D.  $\sqrt{22}$

3. 20 世纪产生了著名的“ $3x+1$ ”猜想：任给一个正整数  $x$ ，如果  $x$  是偶数，就将它减半；如果  $x$  是奇数，则将它乘 3 加 1，不断重复这样的运算，经过有限步后，一定可以得到 1. 如图是验证“ $3x+1$ ”猜想的一个程序框图，若输入正整数  $m$  的值为 40，则输出的  $n$  的值是 ( )

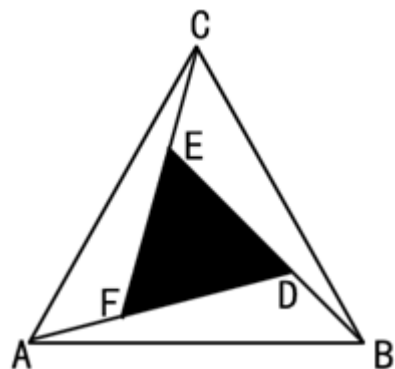


- A. 8      B. 9      C. 10      D. 11

4. 已知平面向量  $\vec{a}, \vec{b}$  满足  $|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=1$ ,  $\vec{a}$  与  $\vec{b}$  的夹角为  $\frac{2\pi}{3}$ , 且  $(\vec{a}+\lambda\vec{b}) \perp (2\vec{a}-\vec{b})$ , 则实数  $\lambda$  的值为 ( )

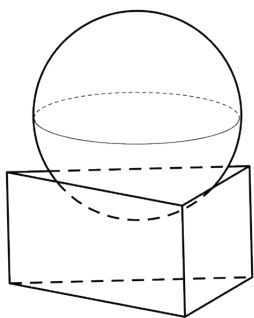
- A. -7      B. -3      C. 2      D. 3

5. 赵爽是我国古代数学家、天文学家, 大约在公元 222 年, 赵爽为《周髀算经》一书作序时, 介绍了“勾股圆方图”, 亦称“赵爽弦图”(以弦为边长得到的正方形是由 4 个全等的直角三角形再加上中间的一个小正方形组成的). 类比“赵爽弦图”. 可类似地构造如下图所示的图形, 它是由 3 个全等的三角形与中间的一个小等边三角形拼成一个大等边三角形. 设  $DF = 2AF = 2$ , 若在大等边三角形中随机取一点, 则此点取自小等边三角形(阴影部分)的概率是 ( )



- A.  $\frac{4}{13}$       B.  $\frac{2\sqrt{13}}{13}$       C.  $\frac{9}{26}$       D.  $\frac{3\sqrt{13}}{26}$

6. 如图所示, 直三棱柱的高为 4, 底面边长分别是 5, 12, 13, 当球与上底面三条棱都相切时球心到下底面距离为 8, 则球的体积为 ( )



- A.  $\frac{160\sqrt{3}}{3}$  B.  $\frac{64\sqrt{2}}{3}$  C.  $\frac{96\sqrt{3}}{3}$  D.  $\frac{256\sqrt{2}}{3}$

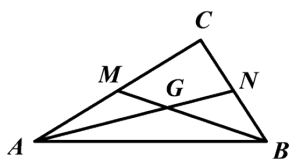
7. 设集合  $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ ,  $B = \{x | -2x^2 + 5x + 3 > 0\}$ , 则  $A \cap B =$  ( )

- A.  $\{0, 1, 2\}$  B.  $\{0, 1\}$   
C.  $\{1, 2\}$  D.  $\{-1, 0, 1\}$

8. 已知双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的左、右顶点分别是  $A, B$ , 双曲线的右焦点  $F$  为  $(2, 0)$ , 点  $P$  在过  $F$  且垂直于  $x$  轴的直线  $l$  上, 当  $\triangle ABP$  的外接圆面积达到最小时, 点  $P$  恰好在双曲线上, 则该双曲线的方程为 ( )

- A.  $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$  B.  $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$   
C.  $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$  D.  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$

9. 如图, 在  $\triangle ABC$  中, 点  $M, N$  分别为  $CA, CB$  的中点, 若  $AB = \sqrt{5}$ ,  $CB = 1$ , 且满足  $3\vec{AG} \cdot \vec{MB} = \vec{CA}^2 + \vec{CB}^2$ , 则  $\vec{AG} \cdot \vec{AC}$  等于 ( )



- A. 2 B.  $\sqrt{5}$  C.  $\frac{2}{3}$  D.  $\frac{8}{3}$

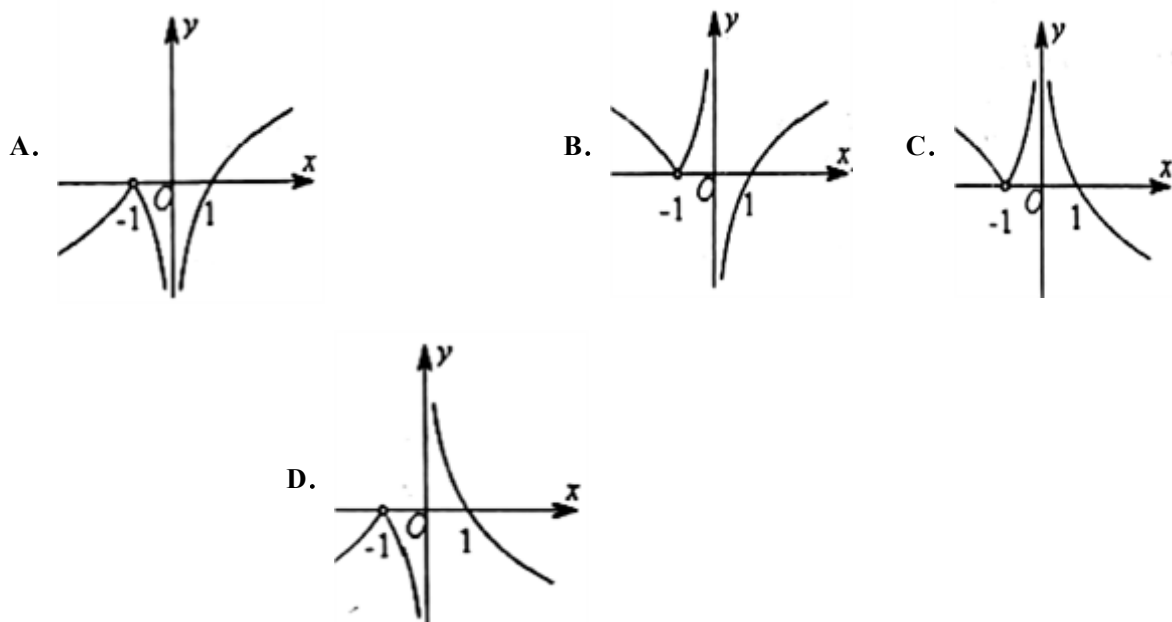
10. 已知集合  $A = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{x}{x+3} \leq 0\right\}$ , 则集合  $A$  真子集的个数为 ( )

- A. 3 B. 4 C. 7 D. 8

11. 已知定点  $A, B$  都在平面  $\alpha$  内, 定点  $P \notin \alpha, PB \perp \alpha, C$  是  $\alpha$  内异于  $A, B$  的动点, 且  $PC \perp AC$ , 那么动点  $C$  在平面  $\alpha$  内的轨迹是 ( )

- A. 圆，但要去掉两个点                      B. 椭圆，但要去掉两个点  
C. 双曲线，但要去掉两个点                D. 抛物线，但要去掉两个点

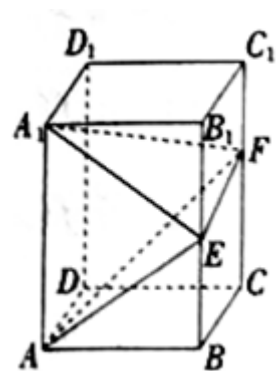
12. 函数  $f(x) = \frac{x+1}{|x+1|} \log_a |x|$  ( $0 < a < 1$ ) 的图象的大致形状是 ( )



二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知实数  $(x, y)$  满足  $\begin{cases} x+3y-3 \leq 0 \\ x-y+1 \geq 0 \\ y \geq -1 \end{cases}$  则点  $P(x, y)$  构成的区域的面积为\_\_\_\_，  $2x+y$  的最大值为\_\_\_\_\_

14. 如图，在直四棱柱  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中，底面  $ABCD$  是平行四边形，点  $E$  是棱  $BB_1$  的中点，点  $F$  是棱  $CC_1$  靠近  $C_1$  的三等分点，且三棱锥  $A_1-AEF$  的体积为 2，则四棱柱  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  的体积为\_\_\_\_\_.



15. 在一次医疗救助活动中，需要从 A 医院某科室的 6 名男医生、4 名女医生中分别抽调 3 名男医生、2 名女医生，且男医生中唯一的主任医师必须参加，则不同的选派案共有\_\_\_\_\_种.(用数字作答)
16. 某部队在训练之余，由同一场地训练的甲、乙、丙三队各出三人，组成  $3 \times 3$  小方阵开展游戏，则来自同一队的战士既不在同一行，也不在同一列的概率为\_\_\_\_\_.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

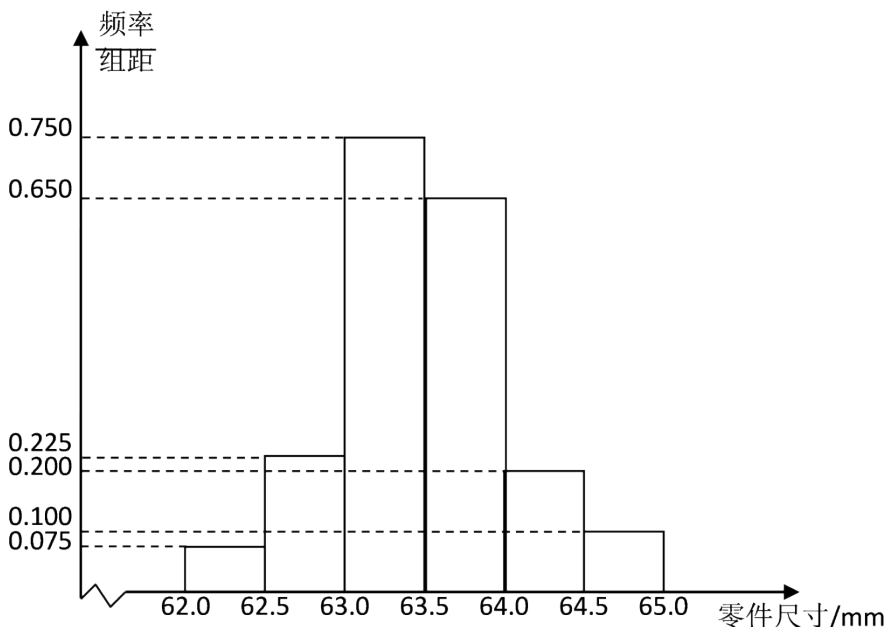
17. (12 分) 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{2}{a_n}$  且  $a_1 = \frac{1}{2}$

(1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式；

(2) 求数列  $\left\{\frac{1}{a_n} + 2n\right\}$  的前  $n$  项和  $S_n$ 。

18. (12 分) 已知矩阵  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ , 且二阶矩阵  $M$  满足  $AM=B$ , 求  $M$  的特征值及属于各特征值的一个特征向量。

19. (12 分) 某企业质量检验员为了检测生产线上零件的质量情况, 从生产线上随机抽取了 80 个零件进行测量, 根据所测量的零件尺寸 (单位: mm), 得到如下的频率分布直方图:



(1) 根据频率分布直方图, 求这 80 个零件尺寸的中位数 (结果精确到 0.01);

(2) 若从这 80 个零件中尺寸位于  $[62.5, 64.5]$  之外的零件中随机抽取 4 个, 设  $X$  表示尺寸在  $[64.5, 65]$  上的零件个数, 求  $X$  的分布列及数学期望  $EX$ ;

(3) 已知尺寸在  $[63.0, 64.5]$  上的零件为一等品, 否则为二等品, 将这 80 个零件尺寸的样本频率视为概率. 现对生产线上生产的零件进行成箱包装出售, 每箱 100 个. 企业在交付买家之前需要决策是否对每箱的所有零件进行检验, 已知每个零件的检验费用为 99 元. 若检验, 则将检验出的二等品更换为一等品; 若不检验, 如果有二等品进入买家手中, 企业要向买家对每个二等品支付 500 元的赔偿费用. 现对一箱零件随机抽检了 11 个, 结果有 1 个二等品, 以整箱检验费用与赔偿费用之和的期望值作为决策依据, 该企业是否对该箱余下的所有零件进行检验? 请说明理由.

20. (12 分) 已知抛物线  $C$  的顶点为原点, 其焦点  $F(0, c)$ ,  $(c > 0)$  关于直线  $l: x - y - 2 = 0$  的对称点为  $M$ , 且

$|FM|=3\sqrt{2}$ .若点  $P$  为  $C$  的准线上的任意一点,过点  $P$  作  $C$  的两条切线  $PA, PB$ , 其中  $A, B$  为切点.

(1) 求抛物线  $C$  的方程;

(2) 求证: 直线  $AB$  恒过定点, 并求  $\triangle PAB$  面积的最小值.

21. (12 分) 已知函数  $f(x)=m\ln(1+x)-x$ ,  $g(x)=mx-\sin x$ .

(1) 若函数  $f(x)$  在  $(0,+\infty)$  上单调递减, 且函数  $g(x)$  在  $(0, \frac{\pi}{2})$  上单调递增, 求实数  $m$  的值;

(2) 求证:  $(1+\sin 1)\left(1+\sin \frac{1}{1 \times 2}\right)\left(1+\sin \frac{1}{2 \times 3}\right) \cdots\left(1+\sin \frac{1}{(n-1) \times n}\right) < e^2$  ( $n \in N^*$ , 且  $n \geq 2$ ).

22. (10 分) 设函数  $f(x)=|x-1|+|x-a|(a \in R)$ .

(1) 当  $a=4$  时, 求不等式  $f(x) \leq 5$  的解集;

(2) 若  $f(x) \geq 4$  对  $x \in R$  恒成立, 求  $a$  的取值范围.

## 参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、D

【解析】

先把  $z \cdot (1+i) = 2i+1$  变形为  $z = \frac{2i+1}{1+i}$ , 然后利用复数代数形式的乘除运算化简, 求出  $\bar{z}$ , 得到其坐标可得答案.

【详解】

解: 由  $z \cdot (1+i) = 2i+1$ , 得  $z = \frac{2i+1}{1+i} = \frac{(2i+1)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{3+i}{2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$ ,

所以  $\bar{z} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$ , 其在复平面内对应的点为  $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$ , 在第四象限

故选: D

【点睛】

此题考查了复数代数形式的乘除运算, 考查了复数的代数表示法及其几何意义, 属于基础题.

2、D

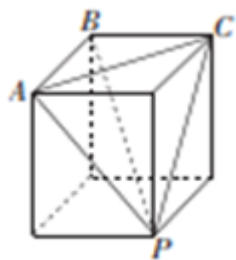
【解析】

根据三视图还原出几何体，找到最大面，再求面积.

【详解】

由三视图可知，该几何体是一个三棱锥，如图所示，将其放在一个长方体中，并记为三棱锥  $P-ABC$  .

$S_{\triangle PAC} = S_{\triangle PAB} = \sqrt{13}$  ,  $S_{\triangle PBC} = \sqrt{22}$  ,  $S_{\triangle ABC} = 2$  , 故最大面的面积为  $\sqrt{22}$  .选 D.



【点睛】

本题主要考查三视图的识别，复杂的三视图还原为几何体时，一般借助长方体来实现.

3、C

【解析】

列出循环的每一步，可得出输出的  $n$  的值.

【详解】

$n=1$  , 输入  $m=40$  ,  $n=1+1=2$  ,  $m=1$  不成立,  $m$  是偶数成立, 则  $m=\frac{40}{2}=20$  ;

$n=2+1=3$  ,  $m=1$  不成立,  $m$  是偶数成立, 则  $m=\frac{20}{2}=10$  ;

$n=3+1=4$  ,  $m=1$  不成立,  $m$  是偶数成立, 则  $m=\frac{10}{2}=5$  ;

$n=4+1=5$  ,  $m=1$  不成立,  $m$  是偶数不成立, 则  $m=3\times 5+1=16$  ;

$n=5+1=6$  ,  $m=1$  不成立,  $m$  是偶数成立, 则  $m=\frac{16}{2}=8$  ;

$n=6+1=7$  ,  $m=1$  不成立,  $m$  是偶数成立, 则  $m=\frac{8}{2}=4$  ;

$n=7+1=8$  ,  $m=1$  不成立,  $m$  是偶数成立, 则  $m=\frac{4}{2}=2$  ;

$n=8+1=9$  ,  $m=1$  不成立,  $m$  是偶数成立, 则  $m=\frac{2}{2}=1$  ;

$n=9+1=10$  ,  $m=1$  成立, 跳出循环, 输出  $n$  的值为10.

故选: C.

【点睛】

本题考查利用程序框图计算输出结果, 考查计算能力, 属于基础题.

4、D

【解析】

由已知可得  $(\vec{a} + \lambda \vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b}) = 0$ ，结合向量数量积的运算律，建立  $\lambda$  方程，求解即可。

【详解】

依题意得  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times 1 \times \cos \frac{2\pi}{3} = -1$

由  $(\vec{a} + \lambda \vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b}) = 0$ ，得  $2\vec{a}^2 - \lambda \vec{b}^2 + (2\lambda - 1)\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

即  $-3\lambda + 9 = 0$ ，解得  $\lambda = 3$ 。

故选：D。

【点睛】

本题考查向量的数量积运算，向量垂直的应用，考查计算求解能力，属于基础题。

5、A

【解析】

根据几何概率计算公式，求出中间小三角形区域的面积与大三角形面积的比值即可。

【详解】

在  $\triangle ABD$  中， $AD = 3$ ， $BD = 1$ ， $\angle ADB = 120^\circ$ ，由余弦定理，得

$$AB = \sqrt{AD^2 + BD^2 - 2AD \cdot BD \cos 120^\circ} = \sqrt{13}，$$

$$\text{所以 } \frac{DF}{AB} = \frac{2}{\sqrt{13}}。$$

$$\text{所以所求概率为 } \frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right)^2 = \frac{4}{13}。$$

故选 A。

【点睛】

本题考查了几何概型的概率计算问题，是基础题。

6、A

【解析】

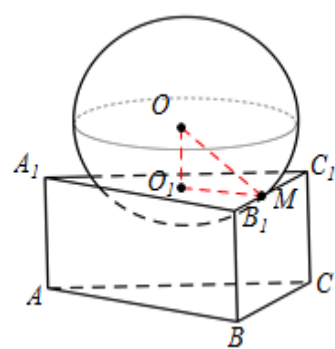
设球心为  $O$ ，三棱柱的上底面  $A_1B_1C_1$  的内切圆的圆心为  $O_1$ ，该圆与边  $A_1B_1$  切于点  $D$ ，根据球的几何性质可得  $OO_1 \perp A_1B_1$  为直角三角形，然后根据题中数据求出圆  $A_1B_1C_1$  半径，进而求得球的半径，最后可求出球的体积。

【详解】

如图，设三棱柱为  $ABC - A_1B_1C_1$ ，且  $AB = 12$ ， $BC = 5$ ， $AC = 13$ ，高  $AA_1 = 4$ 。

所以底面  $\triangle A_1B_1C_1$  为斜边是  $A_1C_1$  的直角三角形，设该三角形的内切圆为圆  $O_1$ ，圆  $O_1$  与边  $A_1B_1$  切于点  $D$ ，

则圆  $O_1$  的半径为  $O_1D = \frac{12+5-13}{2} = 2$ 。



设球心为  $O$ ，则由球的几何知识得  $\triangle OO_1D$  为直角三角形，且  $O_1D = 8 - 4 = 4$ ，

所以  $OD = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$ ，

即球  $O$  的半径为  $2\sqrt{5}$ ，

所以球  $O$  的体积为  $\frac{4}{3} \times \pi \times (2\sqrt{5})^3 = \frac{160\sqrt{5}\pi}{3}$ 。

故选 A。

【点睛】

本题考查与球有关的组合体的问题，解答本题的关键有两个：

(1) 构造以球半径  $r$ 、球心到小圆圆心的距离  $d$  和小圆半径  $r_1$  为三边的直角三角形，并在此三角形内求出球的半径，这是解决与球有关的问题时常用的方法。

(2) 若直角三角形的两直角边为  $a, b$ ，斜边为  $c$ ，则该直角三角形内切圆的半径  $r = \frac{a+b-c}{2}$ ，合理利用中间结论可提高解题的效率。

7、A

【解析】

解出集合  $B$ ，利用交集的定义可求得集合  $A \cap B$ 。

【详解】

因为  $B = \left\{x \mid -2x^2 + 5x + 3 > 0\right\} = \left\{x \mid 2x^2 - 5x - 3 < 0\right\} = \left\{x \mid -\frac{1}{2} < x < 3\right\}$ ，又  $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ ，所以  $A \cap B = \{0, 1, 2\}$ 。

故选：A。

【点睛】

本题考查交集的计算，同时也考查了一元二次不等式的求解，考查计算能力，属于基础题.

8、A

【解析】

点  $P$  的坐标为  $(2, m)$  ( $m > 0$ )， $\tan \angle APB = \tan(\angle APF - \angle BPF)$ ，展开利用均值不等式得到最值，将点代入双曲线计算得到答案.

【详解】

不妨设点  $P$  的坐标为  $(2, m)$  ( $m > 0$ )，由于  $|AB|$  为定值，由正弦定理可知当  $\sin \angle APB$  取得最大值时， $\triangle APB$  的外接圆面积取得最小值，也等价于  $\tan \angle APB$  取得最大值，

$$\text{因为 } \tan \angle APF = \frac{a+2}{m}, \quad \tan \angle BPF = \frac{2-a}{m},$$

$$\text{所以 } \tan \angle APB = \tan(\angle APF - \angle BPF) = \frac{\frac{2+a}{m} - \frac{2-a}{m}}{1 + \frac{2+a}{m} \cdot \frac{2-a}{m}} = \frac{2a}{m + \frac{b^2}{m}} \leq \frac{2a}{2\sqrt{m \cdot \frac{b^2}{m}}} = \frac{a}{b},$$

当且仅当  $m = \frac{b^2}{m}$  ( $m > 0$ )，即当  $m = b$  时，等号成立，

此时  $\angle APB$  最大，此时  $APB$  的外接圆面积取最小值，

点  $P$  的坐标为  $(2, b)$ ，代入  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  可得  $a = \sqrt{2}$ ， $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{2}$ .

所以双曲线的方程为  $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$ .

故选：A

【点睛】

本题考查了求双曲线方程，意在考查学生的计算能力和应用能力.

9、D

【解析】

选取  $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}$  为基底，其他向量都用基底表示后进行运算.

【详解】

由题意  $G$  是  $\triangle ABC$  的重心，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/256052115201010203>