一类天然肠衣原料搭配优化问题的启发求解

（本文 2011 年高教社杯奖）

摘要

天然肠衣制作加工是我国的一个传统产业,出口量占世界首位,研究肠衣如何的搭配对提高原料使用率、降低成本、提高经济效益是非常有意义的。本文针对肠衣搭配问题，建立了优化模型，给出了相应启发式算法，较完善的解决了本问题。

针对要求(1)，本文将求装出成品捆数最多分解为分别求规格 1、规格 2 和规格 3 装出成品捆数最多的问题。在 3 种规格成品的根数和总长度都固定不变且每种原料长度和根数都已知的条件下，基于规划思想，首先对各规格用于组装的原料根数和长度进行了约束，继而建立了优化模型，并求得装出的成品最大捆数之和为 182 捆。

针对要求(2)，首先在规格成品装出捆数最多的前提下，在相同最大捆数下的方案，对要求(1)通过 lingo 软件求得了每个方案中每捆最短的原料和原料数量。然后比较每个方案中最短原料中最长的数量。最终每种规格取最短原料中最长的数量最多的方案见表 2，3,4。

针对要求(3)(4)，在基于放宽成品规格的总长度和根数的条件下，使得组装出成品的捆数增加，再对剩余原料采用降级处理，进而可达到捆数最大的理念下。首先，对在不降级组装条件下，重新对用于组装的原料根数和长度进行约束，继而求出了不降级组装时各规格组装出的捆数。然后，在假设剩余原料只能降一个等级的条件下，得到放宽条件下原料降级组装的捆数。最后，由放宽条件下的组装成品捆数和降级组装的成品捆数求得了装出的成品捆数最多为 208 捆。最终每种规格取最短原料中最长的数量最多的方案见表 5,6,7,8,9

针对时间限制的要求(5)，在基于对肠衣搭配问题下，建立的整数规划模型求解规模较大，编程运行时间超过 30 分钟的情况下，本文创造性的引入了一个基于肠衣搭配的启发式算法，并由此算法求得了上述 4 个要求的近似解。由启发式算法编写的程序可在 1118 秒内（小于 30 分钟）得到结果，求得满足所有 5 个要求的较优搭配方案，工人可以根据这个方案“照方抓药”进行生产。

同时本文还给出了改进的邻域整点搜索算法求解本问题，对两种启发是算法的结果和复杂度进行了分析比较。本文还做了模型推广、模型改进、结果分析等工作。

关键字：肠衣搭配 优化模型 启发式算法

一、 问题重述

1.1 问题的背景

天然肠衣（以下简称肠衣）制作加工是我国的一个传统产业，出口量占世界首位。

1.2 问题的提出与要求

肠衣经过清洗整理后被分割成长度不等的小段（原料），再将原材料按指定根数和总长度组装出成品（捆）。

原料按长度分档，通常以0.5米为一档，如：3-3.4米按3米计算，3.5 -3.9米按3.5米计算，其余的依此类推。为了提高生产效率，公司计划改变组装工艺，先丈量所有原料，并给出了原料描述，根据以上成品和原料描述，设计一个原料搭配方案。

搭配方案有以下具体要求：

(1) 对于给定的一批原料，装出的成品捆数越多越好；

(2) 对于成品捆数相同的方案，最短长度最长的成品越多，方案越好；

(3) 为提高原料使用率，总长度允许有±0.5米的误差，总根数允许比标准少1根；

(4) 某种规格对应原料如果出现剩余，可以降级使用。如长度为14米的原料可以和长度介于7-13.5米的进行捆扎，成品属于7-13.5米的规格；

(5) 为了食品保鲜,要求在30分钟内产生方案。

1.3 要解决的问题

请建立上述问题的数学模型，给出求解方法，并对成品规格和原料描述给出的实际数据进行求解，给出搭配方案。

二、问题分析

2.1 问题背景

天然肠衣制作加工是我国的一个传统产业，出口量占世界首位。研究肠衣的搭配问题对促进我国经济发展建设是非常有意义的。

2.2 问题分析

肠衣在经过清洗整理后被分割成长度不等的小段(原料）后，再将原料按指定根数和总长度组装出成品(捆)。在给出了对应 3 种成品规格和原料数据情况下，公司对要设计的搭配方案提出了 5 个要求。根据公司对搭配方案提出的要求，可知道是要在装出的成品捆数最多的前提下，再对相同最大捆数的搭配方案进行比较，最终选出最好的搭配方案。

对于要求(1)(2),因为每种规格成品在捆数最多的条件下，都可能出现存在多种方案，所以在这里应该分别求出规格成品(1)、规格成品(2)和规格成品(3)的最大捆数。由于每种规格成品可能在最大捆数下有多种搭配方案，在这种情况下可以分别列出 3 种规格的每个方案中每捆长度最短的原料，再算出每种方案中长度最短中长度最大的原料的数量，那么此数量最多的方案也就最好的方案。

对于要求(3)(4),是为了提高原料使用率，也就是对 3 种成品规格的根数、总长度和每种成品规格的原料长度区间增加了范围。因为对每种产品规格的根数、总长度和

原料长度区间增加范围，显然装出的成品捆数会比没有增加范围前的捆数多，在每种规格成品捆数变多情况下，可以再对每种规格的成品进行要求(1)(2)的处理，那么最终求出的方案即为最好的。

对于要求（5），为了食品保鲜，要求在30分钟内产生方案，在这里可以考虑是否对肠衣如何搭配给出一种启发式算法，并借助这种算法编写的程序运行时间不能超过30分钟，那么对于此问题就归结于构造算法了。

三、模型假设

1 假设原料最多只能降一级使用；

2 假设每档长度的原料都以0.5米为一档，如：3-3.5米按3米计算；

3 假设每次肠衣制作加工，分割成的原料对应长度与根数统计是正确的；

4 假设本次的肠衣制作加工完剩余的原料不能用于下次的组装。

四、符号说明

m_i：表示第i档长度原料的长度(i=1…46)；

x_{ij}：表示第j捆成品中第i档长度原料的根数(j=1…n)；

p_i：表示第i档长度原料的根数；

L：表示每捆成品的总长度；

h_u：捆法的方案；

$f_{(k)}$：第k规格的捆法方案

y_k：表示3米到第k规格最长长度原料的长度档数；

v_i：表示原料不降级使用时第i档长度原料组装完后剩余的根数；

g_k：表示第k规格成品中每捆的根数（k=1,2,3）；

n_k：表示原料不降级使用时第k规格原料组装为成品的捆数；

Q_1：表示规格2剩余的原料降级后与规格1剩余的原料组装为成品捆数；

Q_2：表示规格3剩余的原料降级后与规格2剩余的原料组装为成品捆数；

s_{ij}：表示原料降级使用时第j捆成品中第i档长度原料的根数

Z：表示最短长度最长的成品捆数；

五、模型建立与求解

通过对5个搭配方案要求的分析，本文主要共分2种情况下讨论，在装出成品捆数最多为前提对相同捆数的设计方案进行比较，给出最好的搭配方案。其中第一种情况是

在成品规格不允许误差且原料不降级使用的条件下给出最好的设计方案；第二种情况是在每捆成品的总长度允许有±0.5 米的误差、总根数允许比标准少 1 根

和原料可以降级使用的条件下给出最好的方案。

5.1 基于要求（1）（2）的模型建立与求解

5.1.1 对于求 3 种规格产品的最大捆数

根据产品规格表和成品规格表可知，肠衣经过分割后共分 46 种档次的原料。从 3 米开始记为第一档，当长度每增加 0.5 米就相应的增加一档，，组装的成品共分 3 种规格。原料长度为 3-6.5 米（共 8 档长度）为规格 1；7-13.5 米（共 14 档长度）为规格 2；14-25.5 米（共 24 档长度）为规格 3，见表 1。

表 1：原料数据预处理

档类	第 1 档	第 2 档	第 3 档	第 4 档	第 5 档	第 6 档	第 7 档	第 8 档
长度	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6	6.5
根数	43	59	39	41	27	28	34	21
档类	第 9 档	第 10 档	第 11 档	第 12 档	第 13 档	第 14 档	第 15 档	第 16 档
长度	7	7.5	8	8.5	9	9.5	10	10.5
根数	24	24	20	25	21	23	21	18
档类	第 17 档	第 18 档	第 19 档	第 20 档	第 21 档	第 22 档	第 23 档	第 24 档
长度	11	11.5	12	12.5	13	13.5	14	14.5
根数	31	23	22	59	18	25	35	29
档类	第 25 档	第 26 档	第 27 档	第 28 档	第 29 档	第 30 档	第 31 档	第 32 档
长度	15	15.5	16	16.5	17	17.5	18	18.5
根数	30	42	28	42	45	49	50	64
档类	第 33 档	第 34 档	第 35 档	第 36 档	第 37 档	第 38 档	第 39 档	第 40 档
长度	19	19.5	20	20.5	21	21.5	22	22.5
根数	52	63	49	35	27	16	12	2
档类	第 41 档	第 42 档	第 43 档	第 44 档	第 45 档	第 46 档		
长度	23	23.5	24	24.5	25	25.5		
根数	0	6	0	0	0	1		

规格 1，通过成品规格表可知每捆成品的原料总长度为 89 米，每捆成品的原料总数为 20 根，每种原料的总根数总是不小于对应原料组装成成品的根数，即

$$\max n_1$$

$$
\text{s.t}\begin{cases}\sum_{i=1}^{8} m_i x_{ij} = 89 \qquad (j = 1...n_1) \\ \sum_{i=1}^{8} x_{ij} = 20 \\ \sum_{j=1}^{n_1} x_{ij} \le p_i \qquad (i = 1...8) \\ m_i, x_{ij}\text{均取正整数}\end{cases}
$$

规格 2，通过成品规格表可知每捆成品的原料总长度为 89 米，每捆成品的原料总数为 8 根，每种原料的总根数总是不小于对应原料组装成成品的根数，即

$$
\max n_2
$$

$$
\text{s.t}\begin{cases}\sum_{i=9}^{22} m_i x_{ij} = 89 \qquad (j = 1...n_2) \\ \sum_{i=9}^{22} x_{ij} = 8 \\ \sum_{j=1}^{n_2} x_{ij} \le p_i \qquad (i = 9...22) \\ m_i, x_{ij}\text{均取正整数}\end{cases}
$$

规格 3，通过成品规格表可知每捆成品的原料总长度为 89 米，每捆成品的原料总数为 5 根，每种原料的总根数总是不小于对应原料组装成成品的根数，即

$$
\max n_3
$$

$$
\text{s.t}\begin{cases}\sum_{i=23}^{46} m_i x_{ij} = 89 \qquad (j = 1......n_3) \\ \sum_{i=23}^{46} x_{ij} = 5 \\ \sum_{j=1}^{n_3} x_{ij} \le p_i \qquad (i = 23.....46) \\ m_i, x_{ij}\text{均取正整数}\end{cases}
$$

综合 3 种规格的产品捆数模型整理得：

$$
\max \sum_{i=1}^{3} n_k
$$

$$\text{s.t}\begin{cases}\sum_{i=y_{k-1}+1}^{y_k} m_i x_{ij} = L \quad (j=1......n)\\ \sum_{i=y_{k-1}+1}^{y_k} x_{ij} = g_k \\ \sum_{j=1}^{n_k} x_{ij} \le p_i \quad (i=1.....46)\\ m_i, x_{ij}\text{均取正整数}\end{cases} \tag{1}$$

5.1.2 增加考虑要求（2）的“优中选优”的模型建立

通过利用 lingo 软件对 3 种规格成品的最多捆数计算，其得到了 3 种规格成品在捆数最多情况下捆数相同的各种搭配方案。由于每种规格成品可能在最大捆数下有多种搭配方案，在这种情况下可以分别列出 3 种规格的每个方案中每捆长度最短的原料，再算出每种方案中长度最短中长度最大的原料的数量，那么此数量最多的方案也就最好的方案。

对于成品捆数相同的方案，最短长度最长的成品越多，方案越好，即

$$\max card\{\min\{s_u\} \mid \quad u=1...n\text{且}\min\{s_u\}=M \quad\}$$

其中，$\max\{\min\{s_u\}\}=M$

$card(A)$表示集合 A 的元素个数

$$\text{s.t}\begin{cases}\sum_{i=y_{k-1}+1}^{y_k} m_i x_{ij} = L \quad (j=1......n)\\ \sum_{i=y_{k-1}+1}^{y_k} x_{ij} = g_k \\ \sum_{j=1}^{n_k} x_{ij} \le p_i \quad (i=1.....46)\\ m_i, x_{ij}\text{均取正整数}\end{cases} \tag{2}$$

5.1.3 在有时间要求下基于要求（1）与（2）的模型求解

通过利用 lingo 软件对 3 种规格成品的最多捆数计算，其得到了 3 种规格成品在捆数最多情况下捆数相同的各种搭配方案。由于每种规格成品可能在最大捆数下有多种搭配方案，在这种情况下可以分别列出 3 种规格的每个方案中每捆长度最短的原料，再算出每种方案中长度最短中长度最大的原料的数量，那么此数量最多的方案也就最好的方案。通过该模型编程运行所需时间为 40 分钟 。超过了要求（5），所以需要构造启发式算法。

启发式算法 1：

算法符号说明：m_j表示第j步最多捆数的取法。

Step1:初始 j=1，k=1 时求解模型

$$\max m_j$$

$$
\text{s.t}\begin{cases}\sum_{i=y_{k-1}+1}^{y_k} m_i x_{ij} = L \qquad (j=1......n) \\ \sum_{i=y_{k-1}+1}^{y_k} x_{ij} = g_k \\ \sum_{j=1}^{n_k} x_{ij} \le p_i \qquad (i=1.....46) \\ m_i, x_{ij}\text{均取正整数}\end{cases} \tag{3}
$$

Step2:将结果进行选择，即对最短长度最长的成品越多方案越好：

$\max card\{\min\{s_u\}|\quad u=1...n\text{且}\min\{s_u\}=M\quad\}$其中，$\max\{\min\{s_u\}\}=M$，$card(A)$表示集合 A 的元素个数。得到一种最好的方案。

Step3:将v_i换为p_i返回 Step1，令$j=j+1$，当m_j无可行解或$m_j=0$时终止j。执行$n_k=\sum_{j=1}^{j} m_j$，令$k=k+1$。

根据启发式算法 1，求得了每种规格下的最大捆数情况下的最好方案。规格 1 的方案见表 2；规格 2 的方案见表 3；规格 3 的方案见表 4

表 2：规格 1 方案表

档次的长度范围	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6	6.5	对应捆法取的捆数	规格 1 最多取的捆数
捆法 1	3	4	3	3	1	2	3	1	11	14
捆法 2	3	5	2	1	5	1	0	3	3	
最后剩余根数	1	0	0	5	1	3	1	1		

从表 2 可看出，规格 1 的组装步骤为：先用捆法 1 对各档次长度的原料各取 3,4,3,3,1,2,3,1 根组装成一捆，并用此捆法共取 11 捆。然后用捆法 2 按方案 1 的形式取，共取 3 捆。最后按表的方法捆法 1 和 2 都取完后各个档次的原料剩余的根数分别为 1,0,0,5,1,3,1,1 根。由此可看出规格 1 最多可取 14 捆。对剩余的 12 根原料无论无何都不可能组成满足条件的一捆。所以可认为该算法合理可行，且能在规定时间内完成运算。

表 3：规格 2 的方案

档次的长度范围	7	7.5	8	8.5	9	9.5	10	对应捆法取的捆数	规格 2 最多取的捆数
捆法 1	0	1	0	1	0	0	0	22	
捆法 2	0	0	0	0	1	1	0	9	
捆法 3	0	0	0	0	0	0	4	3	
最终剩余根数	24	2	20	3	21	5	0		
捆法	10.5	11	11.5	12	12.5	13	13.5		34
捆法 1	0	1	1	1	2	0	1	22	
捆法 2	2	1	0	0	1	2	0	9	
捆法 3	1	0	0	0	2	0	1	3	
最终剩余根数	6	0	1	0	0	0	0		

从表 3 可看出，规格 2 的组装步骤为：先用捆法 1 对各档次长度的原料各取 0，1，0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 0, 1 根组装成一捆，并用此捆法共取 22 捆。然后用捆法 2 按捆法 1 的形式取，共取 9 捆。依次类推得到捆法 3 取 3 捆。最后按表的方法，捆法 1、2、3 都取完后各个档次的原料剩余的根数分别为 24, 2, 20, 3, 21, 5，0，6, 0, 1, 0, 0, 0, 0 根。由此可看出规格 2 最多可取 34 捆。

表 4：规格 3 的最终方案

捆法	14	14.5	15	15.5	16	16.5	17	17.5	18	18.5	19	19.5	捆数	规格 2 最多取的捆数
捆法 1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	1	42	
捆法 2	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	35	
捆法 3	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	27	134
捆法 4	0	0	2	0	0	0	0	0	0	2	0	0	12	
捆法 5	0	0	1	0	0	0	0	0	3	0	0	0	6	

捆法6	0	0	0	0	0	2	1	1	0	0	0	0	3	
捆法7	0	1	0	0	0	0	0	2	1	0	0	0	2	
捆法8	0	0	0	0	1	1	0	2	0	0	0	0	1	
剩余根数	0	0	0	0	0	0	0	1	5	10	1	1		
捆法	20	20.5	21	21.5	22	22.5	23	23.5	24	24.5	25	25.5	捆数	
捆法1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	42	
捆法2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	35	
捆法3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	27	

从表 4 可看出，规格 3 的最优搭配方案共有 8 个捆法：捆法 1 可取 42 捆，捆法 2 可取 35 捆，捆法 3 可取 27 捆，捆法 4 可取 12 捆，捆法 5 可取 6 捆，捆法 6 可取 3 捆，捆法 7 可取 2 捆，捆法 8 可取 1 捆。由此可看出规格 3 最多可取 134 捆。最后求得三种规格的捆数之和，见表 5。

表 5:3 种规格的总捆数

规格 1 的最多总捆数	规格 2 的最多总捆数	规格 3 的最多总捆数	3 种规格总捆数
14	34	134	182

通过表 2 可知规格 1 的原料总根数为 292 根，所以它的最大能捆 14 根，余 12 根，因为总长度为1.355×10^3米，最多能组成 14 捆，剩余 59.5 米，所以规格 1 最大上限为 14 捆。同理，求得规格 2 的最大上限为 34 捆，规格 3 最大上限为 135 捆。

通过启发式算法 1 求得规格 1 的捆数为 13 捆，规格 2 的为 34 捆，规格 3 的为 134 捆，通过比较可知求得的结果与最大上限非常接近，所以认为该启发式算法是有效的，而且我们运行该启发式算法用时为 1118 秒（小于 30 分钟），所以该算法满足题意。并且我们求得的启发式算法的捆法方案比较少，即可操作性强。

5.2 基于要求（1）（2）（3）（4）的模型建立与求解

为了提高原料的使用率，每捆产品的总长度允许有±0.5 米的误差、总根数允许比标准少 1 根和原料可以降级使用（假定只能降一级，规格 1 对应的原料不能降级使用）。

5.2.1 对于求 3 种规格产品的最多捆数的模型

在每捆产品的总长度允许有±0.5 米的误差情况下，每种规格对应的原料组装成捆后，成品的总长度在[L-0.5 L+0.5]范围内（其中长度以 0.5 米为 1 个单位），即

$$L-0.5\le\sum_{i=y_{k-1}+1}^{y_k}m_i x_{ij}\le L+0.5\quad（k=1,2,3\quad j=1....n_k）$$

在总根数允许比标准少 1 根

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：

https://d.book118.com/256103123120010242