

江西省南昌市进贤二中 2024 年高中毕业班新课程教学质量监测卷数学试题

注意事项

1. 考生要认真填写考场号和座位序号。
2. 试题所有答案必须填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。第一部分必须用 2B 铅笔作答；第二部分必须用黑色字迹的签字笔作答。
3. 考试结束后，考生须将试卷和答题卡放在桌面上，待监考员收回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 下列不等式成立的是（ ）

A. $\sin \frac{1}{2} > \cos \frac{1}{2}$ B. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} > \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ C. $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} < \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}$ D. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} > \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$

2. M、N 是曲线 $y=\pi\sin x$ 与曲线 $y=\pi\cos x$ 的两个不同的交点,则 $|MN|$ 的最小值为()

A. π B. $\sqrt{2}\pi$ C. $\sqrt{3}\pi$ D. 2π

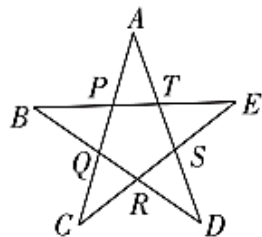
3. $a^2 + b^2 = 1$ 是 $a\sin\theta + b\cos\theta \leq 1$ 恒成立的（ ）

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

4. 已知 $a = \log_3 \sqrt{2}$, $b = \ln 3$, $c = 2^{-0.99}$, 则 a, b, c 的大小关系为（ ）

A. $b > c > a$ B. $a > b > c$ C. $c > a > b$ D. $c > b > a$

5. 中国的国旗和国徽上都有五角星，正五角星与黄金分割有着密切的联系，在如图所示的正五角星中，以 A、B、C、D、E 为顶点的多边形为正五边形，且 $PT = \frac{\sqrt{5}-1}{2} AP$ ，则 $\frac{AT}{ES} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \frac{ES}{ES} =$ （ ）



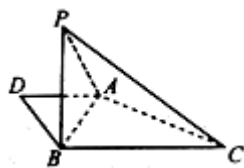
A. $\frac{\sqrt{5}+1}{2} \frac{QR}{QR}$ B. $\frac{\sqrt{5}+1}{2} \frac{RQ}{RQ}$ C. $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \frac{RD}{RD}$ D. $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \frac{RC}{RC}$

6. 已知 i 是虚数单位，则 $\frac{i+\square}{\square} + \frac{\square}{i+\square} =$ （ ）

A. $-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\square$ B. $\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\square$ C. $\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\square$ D. $\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\square$

7. 如图，平面四边形 ACBD 中， $AB \perp BC$ ， $AB = \sqrt{3}$ ， $BC = 2$ ， $\triangle ABD$ 为等边三角形，现将 $\triangle ABD$ 沿 AB

翻折，使点 D 移动至点 P ，且 $PB \perp BC$ ，则三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的表面积为（ ）



- A. 8π B. 6π C. 4π D. $\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi$

8. 造纸术、印刷术、指南针、火药被称为中国古代四大发明，此说法最早由英国汉学家艾约瑟提出并为后来许多中国的历史学家所继承，普遍认为这四种发明对中国古代的政治，经济，文化的发展产生了巨大的推动作用.某小学三年级共有学生 500 名，随机抽查 100 名学生并提问中国古代四大发明，能说出两种发明的有 45 人，能说出 3 种及其以上发明的有 32 人，据此估计该校三级的 500 名学生中，对四大发明只能说出一种或一种也说不出的人有（ ）

- A. 69 人 B. 84 人 C. 108 人 D. 115 人

9. 在 $\triangle ABC$ 中， D 在边 AC 上满足 $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$ ， E 为 BD 的中点，则 $\overrightarrow{CE} =$ （ ）.

- A. $\frac{7}{8}\overrightarrow{BA} - \frac{3}{8}\overrightarrow{BC}$ B. $\frac{3}{8}\overrightarrow{BA} - \frac{7}{8}\overrightarrow{BC}$ C. $\frac{3}{8}\overrightarrow{BA} + \frac{7}{8}\overrightarrow{BC}$ D. $\frac{7}{8}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{8}\overrightarrow{BC}$

10. 函数 $f(x) = \sin(x + \theta)$ 在 $[0, \pi]$ 上为增函数，则 θ 的值可以是（ ）

- A. 0 B. $\frac{\pi}{2}$ C. π D. $\frac{3\pi}{2}$

11. 已知 P 为圆 $C: (x-5)^2 + y^2 = 36$ 上任意一点， $A(-5, 0)$ ，若线段 PA 的垂直平分线交直线 PC 于点 Q ，则 Q 点的轨迹方程为（ ）

- A. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ B. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$
C. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1 \ (x < 0)$ D. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1 \ (x > 0)$

12. 已知集合 $A = \{x | -1 < x < 2\}$ ， $B = \{x | x > 1\}$ ，则 $A \cup B =$

- A. $(-1, 1)$ B. $(1, 2)$ C. $(-1, +\infty)$ D. $(1, +\infty)$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 设双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左焦点为 F ，过点 F 且倾斜角为 45° 的直线与双曲线 C 的两条渐近线顺次交于 A ， B 两点若 $\overrightarrow{FB} = 3\overrightarrow{FA}$ ，则 C 的离心率为_____.

14. 已知 $\triangle ABC$ 中， $AB = BC$ ，点 D 是边 BC 的中点， $\triangle ABC$ 的面积为 2，则线段 AD 的取值范围是_____.

15. 已知函数 $f(x) = x|x-4|$ ，则不等式 $f(a+2) > f(3)$ 的解集为_____.

16. (5分) 已知 x 为实数, 向量 $a = (2, -1)$, $b = (1, x)$, 且 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 则 $|2a + b| =$ _____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (12分) 椭圆 $W: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左、右焦点分别是 F_1, F_2 , 离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 左、右顶点分别为 A, B .

过 F_1 且垂直于 x 轴的直线被椭圆 W 截得的线段长为 1.

(1) 求椭圆 W 的标准方程;

(2) 经过点 $P(1, 0)$ 的直线与椭圆 W 相交于不同的两点 C, D (不与点 A, B 重合), 直线 CB 与直线 $x = 4$ 相交于点 M , 求证: A, D, M 三点共线.

18. (12分) 设 $f(x) = xe^x - ax^2$, $g(x) = \ln x + x - x^2 + 1 - \frac{e}{a}$ ($a > 0$)

(1) 求 $g(x)$ 的单调区间;

(2) 设 $h(x) = f(x) - ag(x) \geq 0$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

19. (12分) 运输一批海鲜, 可在汽车、火车、飞机三种运输工具中选择, 它们的速度分别为 60 千米/小时、120 千米/小时、600 千米/小时, 每千米的运费分别为 20 元、10 元、50 元. 这批海鲜在运输过程中每小时的损耗为 m 元

($m > 0$), 运输的路程为 S (千米). 设用汽车、火车、飞机三种运输工具运输时各自的总费用 (包括运费和损耗费) 分别为 y_1 (元)、 y_2 (元)、 y_3 (元).

(1) 请分别写出 y_1, y_2, y_3 的表达式;

(2) 试确定使用哪种运输工具总费用最省.

20. (12分) 设 $f(x) = (a-4)\log_a x - \frac{3}{a-1}x + \frac{3}{a-1}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$).

(1) 证明: 当 $a = 4$ 时, $\ln x + f(x) \leq 0$;

(2) 当 $x \geq 1$ 时 $f(x) \leq 0$, 求整数 a 的最大值. (参考数据: $\ln 2 \approx 0.69, \ln 3 \approx 1.10, \ln 5 \approx 1.61, \ln 7 \approx 1.95$)

21. (12分) 已知数列的前 n 项和为 S_n , 且满足 $a_n = \frac{1}{2}S_n + 1$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $b_n = \log_2 a_n$, $c_n = \frac{1}{b_n b_{n+1}}$, 且数列 $\{c_n\}$ 前 n 项和为 T_n , 求 T_n 的取值范围.

22. (10分) 如图, 设 A 是由 $n \times n$ 个实数组成的 n 行 n 列的数表, 其中 a_{ij} ($i, j = 1, 2, 3, \dots, n$) 表示位于第 i 行第 j 列的实数, 且 $a_{ij} \in \{1, -1\}$. 记 $S(n, n)$ 为所有这样的数表构成的集合. 对于 $A \in (n, n)$, 记 $r_i(A)$ 为 A 的第 i 行各数之积,

$c_j(A)$ 为 A 的第 j 列各数之积. 令 $l(A) = \sum_{i=1}^n r_i(A) + \sum_{j=1}^n c_j(A)$

a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
a_{21}	a_{22}		a_{2n}
...	...	...	...
a_{n1}	a_{n2}	...	a_{nn}

(I) 请写出一个 $A \in S(4, 4)$, 使得 $l(A)=0$;

(II) 是否存在 $A \in S(9, 9)$, 使得 $l(A)=0$? 说明理由;

(III) 给定正整数 n , 对于所有的 $A \in S(n, n)$, 求 $l(A)$ 的取值集合.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、D

【解析】

根据指数函数、对数函数、幂函数的单调性和正余弦函数的图象可确定各个选项的正误.

【详解】

对于 A, $Q 0 < \frac{1}{2} < \frac{\pi}{4}$, $\therefore \sin \frac{1}{2} < \cos \frac{1}{2}$, A 错误;

对于 B, $Q y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 在 R 上单调递减, $\therefore \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$, B 错误;

对于 C, $Q \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} = \log_2 3 > 1$, $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2} = \log_3 2 < 1$, $\therefore \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} > \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}$, C 错误;

对于 D, $Q y = x^{\frac{1}{3}}$ 在 R 上单调递增, $\therefore \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} > \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$, D 正确.

故选：D.

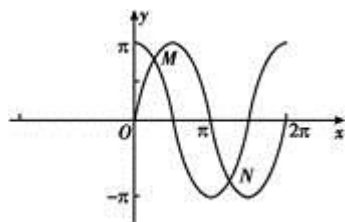
【点睛】

本题考查根据初等函数的单调性比较大小的问题；关键是熟练掌握正余弦函数图象、指数函数、对数函数和幂函数的单调性.

2、C

【解析】

两函数的图象如图所示,则图中|MN|最小,



设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$,

$$\text{则 } x_1 = \frac{\pi}{4}, x_2 = \frac{5}{4}\pi,$$

$$|x_1 - x_2| = \pi,$$

$$|y_1 - y_2| = |\pi \sin x_1 - \pi \cos x_2|$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \pi + \frac{\sqrt{2}}{2} \pi$$

$$= \sqrt{2} \pi,$$

$$\therefore |MN| = \sqrt{\pi^2 + 2\pi^2} = \sqrt{3} \pi. \text{ 故选 C.}$$

3、A

【解析】

设 $\begin{cases} a = \cos \alpha \\ b = \sin \alpha \end{cases} \Rightarrow a \sin \theta + b \cos \theta = \sin \theta \cos \alpha + \cos \theta \sin \alpha = \sin(\theta + \alpha) \leq 1$ 成立；反之， $a = b = 0$ 满足

$a \sin \theta + b \cos \theta \leq 1$ ，但 $a^2 + b^2 \neq 1$ ，故选 A.

4、A

【解析】

根据指数函数与对数函数的单调性，借助特殊值即可比较大小.

【详解】

因为 $\log_3 \sqrt{2} < \log_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2}$,

所以 $a < \frac{1}{2}$.

因为 $3 > e$,

所以 $b = \ln 3 > \ln e = 1$,

因为 $0 > -0.99 > -1$, $y = 2^x$ 为增函数,

所以 $\frac{1}{2} < c = 2^{-0.99} < 1$

所以 $b > c > a$,

故选: A.

【点睛】

本题主要考查了指数函数、对数函数的单调性, 利用单调性比较大小, 属于中档题.

5、A

【解析】

利用平面向量的概念、平面向量的加法、减法、数乘运算的几何意义, 便可解决问题.

【详解】

解: $\overrightarrow{AT} - \frac{\sqrt{5}-1}{2} \overrightarrow{ES} = \overrightarrow{SD} - \overrightarrow{SR} = \overrightarrow{RD} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \overrightarrow{QR}$.

故选: A

【点睛】

本题以正五角星为载体, 考查平面向量的概念及运算法则等基础知识, 考查运算求解能力, 考查化归与转化思想, 属于基础题.

6、D

【解析】

利用复数的运算法则即可化简得出结果

【详解】

$$\begin{aligned} \frac{1+\square}{\square} + \frac{\square}{1+\square} &= \frac{-\square(1+\square)}{-\square^2} + \frac{\square(1-\square)}{(1+\square)(1-\square)} = -\square - \square^2 + \frac{\square - \square^2}{2} \\ &= -\square + 1 + \frac{\square}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\square \end{aligned}$$

故选 $\square$

【点睛】

本题考查了复数代数形式的乘除运算，属于基础题。

7、A

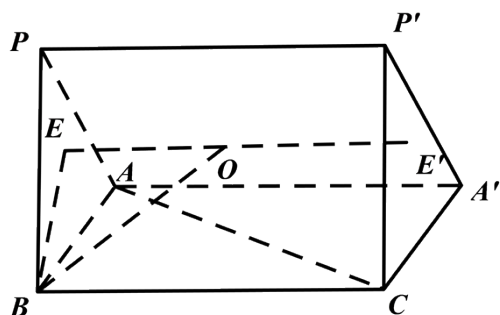
【解析】

将三棱锥 $P-ABC$ 补形为如图所示的三棱柱，则它们的外接球相同，由此易知外接球球心 O 应在棱柱上下底面三角形的外心连线上，在 $Rt\triangle OBE$ 中，计算半径 OB 即可。

【详解】

由 $AB \perp BC$ ， $PB \perp BC$ ，可知 $BC \perp$ 平面 PAB 。

将三棱锥 $P-ABC$ 补形为如图所示的三棱柱，则它们的外接球相同。



由此易知外接球球心 O 应在棱柱上下底面三角形的外心连线上，

记 $\triangle ABP$ 的外心为 E ，由 $\triangle ABD$ 为等边三角形，

可得 $BE = 1$ 。又 $OE = \frac{BC}{2} = 1$ ，故在 $Rt\triangle OBE$ 中， $OB = \sqrt{2}$ ，

此即为外接球半径，从而外接球表面积为 8π 。

故选：A

【点睛】

本题考查了三棱锥外接球的表面积，考查了学生空间想象，逻辑推理，综合分析，数学运算的能力，属于较难题。

8、D

【解析】

先求得100名学生中，只能说一种或一种也说不出的人数，由此利用比例，求得500名学生中对四大发明只能说一种或一种也说不出的人数。

【详解】

在这100名学生中，只能说一种或一种也说不出的有 $100 - 45 - 32 = 23$ 人，设对四大发明只能说一种或一种也说不出的有 x 人，则 $\frac{100}{23} = \frac{500}{x}$ ，解得 $x = 115$ 人。

故选：D

【点睛】

本小题主要考查利用样本估计总体，属于基础题.

9、B

【解析】

由 $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$ ，可得 $\overrightarrow{CD} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CA}$ ， $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{CA})$ ，再将 $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}$ 代入即可.

【详解】

因为 $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$ ，所以 $\overrightarrow{CD} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CA}$ ，故 $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{CA}) = \frac{1}{2}(-\overrightarrow{BC} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BA} - \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}) = \frac{3}{8}\overrightarrow{BA} - \frac{7}{8}\overrightarrow{BC}$.

故选：B.

【点睛】

本题考查平面向量的线性运算性质以及平面向量基本定理的应用，是一道基础题.

10、D

【解析】

依次将选项中的 θ 代入，结合正弦、余弦函数的图象即可得到答案.

【详解】

当 $\theta = 0$ 时， $f(x) = \sin x$ 在 $[0, \pi]$ 上不单调，故 A 不正确；

当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时， $f(x) = \cos x$ 在 $[0, \pi]$ 上单调递减，故 B 不正确；

当 $\theta = \pi$ 时， $f(x) = -\sin x$ 在 $[0, \pi]$ 上不单调，故 C 不正确；

当 $\theta = \frac{3\pi}{2}$ 时， $f(x) = -\cos x$ 在 $[0, \pi]$ 上单调递增，故 D 正确.

故选：D

【点睛】

本题考查正弦、余弦函数的单调性，涉及到诱导公式的应用，是一道容易题.

11、B

【解析】

如图所示：连接 QA ，根据垂直平分线知 $QA = QP$ ， $||QC| - |QA|| = 6 < 10$ ，故轨迹为双曲线，计算得到答案.

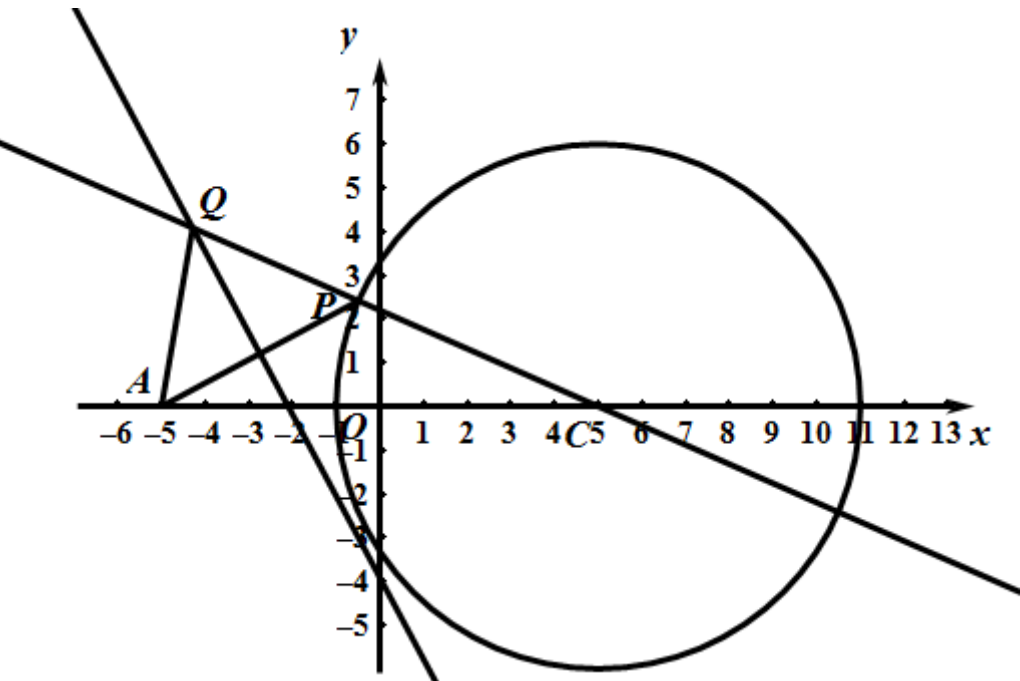
【详解】

如图所示：连接 QA ，根据垂直平分线知 $QA = QP$ ，

故 $||QC| - |QA|| = ||QC| - |QP|| = |PC| = 6 < 10$ ，故轨迹为双曲线，

$2a=6$ ， $a=3$ ， $c=5$ ，故 $b=4$ ，故轨迹方程为 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 。

故选：B。



【点睛】

本题考查了轨迹方程，确定轨迹方程为双曲线是解题的关键。

12、C

【解析】

根据并集的求法直接求出结果。

【详解】

$$\because A=\{x|-1<x<2\},B=\{x|>1\} \text{ ,}$$

$$\therefore A\cup B=(-1,+\infty) \text{ ,}$$

故选 C。

【点睛】

考查并集的求法，属于基础题。

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13、 $\sqrt{5}$

【解析】

设直线 AB 的方程为 $x=y-c$ ，与 $y=\pm\frac{b}{a}x$ 联立得到 A 点坐标，由 $\overline{FB}=3\overline{FA}$ 得， $y_B=3y_A$ ，代入可得 $b=2a$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/256105230222011000>