交通大学附属中学 2024 年高三第二次诊断性检测数学试卷

考生请注意：

1．答题前请将考场、试室号、座位号、考生号、姓名写在试卷密封线内，不得在试卷上作任何标记。

2．第一部分选择题每小题选出答案后，需将答案写在试卷指定的括号内，第二部分非选择题答案写在试卷题目指定的位置上。

3．考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．已知斜率为 k 的直线 l 与抛物线 $C:y^2=4x$ 交于 A，B 两点，线段 AB 的中点为 $M(1,m)(m>0)$，则斜率 k 的取值范围是（　　）

A．$(-\infty,1)$　　B．$(-\infty,1]$　　C．$(1,+\infty)$　　D．$[1,+\infty)$

2．已知集合 $A=\{(x,y)|x^2+y^2=4\},B=\{(x,y)|y=2^x\}$，则 $A\cap B$ 元素个数为(　　)

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

3．一小商贩准备用 50 元钱在一批发市场购买甲、乙两种小商品，甲每件进价 4 元，乙每件进价 7 元，甲商品每卖出去 1 件可赚 1 元，乙商品每卖出去 1 件可赚 1.8 元.该商贩若想获取最大收益，则购买甲、乙两种商品的件数应分别为（　　）

A．甲 7 件，乙 3 件　　B．甲 9 件，乙 2 件　　C．甲 4 件，乙 5 件　　D．甲 2 件，乙 6 件

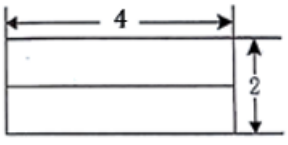
4．已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，S_n 为其前 n 项和，$a_6+a_3-a_5=3$，则 $S_7=$（　　）

A．42　　B．21　　C．7　　D．3

5．已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}ax^3+x^2(a>0)$．若存在实数 $x_0\in(-1,0)$，且 $x_0\neq-\frac{1}{2}$，使得 $f(x_0)=f(-\frac{1}{2})$，则实数 a 的取值范围为（　　）

A．$(\frac{2}{3},5)$　　B．$(\frac{2}{3},3)\cup(3,5)$　　C．$(\frac{18}{7},6)$　　D．$(\frac{18}{7},4)\cup(4,6)$

6．一个空间几何体的正视图是长为 4，宽为 $\sqrt{3}$ 的长方形，侧视图是边长为 2 的等边三角形，俯视图如图所示，则该几何体的体积为（　　）



俯视图

A．$\frac{4\sqrt{3}}{3}$　　B．$4\sqrt{3}$　　C．$\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　D．$2\sqrt{3}$

7．记单调递增的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $a_2+a_4=10$，$a_2a_3a_4=64$，则（　　）

A．$S_{n+1}-S_n=2^{n+1}$　　B．$a_n=2^n$　　C．$S_n=2^n-1$　　D．$S_n=2^{n-1}-1$

8．已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的离心率为$e$，抛物线$y^2=2px(p>0)$的焦点坐标为$(1,0)$，若$e=p$，则双曲线$C$的渐近线方程为（　　）

A．$y=\pm\sqrt{3}x$　　B．$y=\pm2\sqrt{2}x$

C．$y=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}x$　　D．$y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$

9．执行如图所示的程序框图，当输出的$S=2$时，则输入的S的值为(　　)

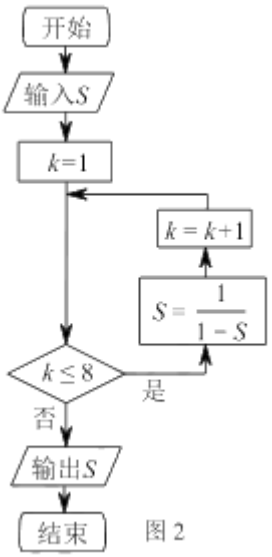


图2

A．-2　　B．-1　　C．$-\frac{1}{2}$　　D．$\frac{1}{2}$

10．某工厂利用随机数表示对生产的600个零件进行抽样测试，先将600个零件进行编号，编号分别为001，002，……，599,600.从中抽取60个样本，下图提供随机数表的第4行到第6行：

32 21 18 34 29	78 64 54 07 32	52 42 06 44 38	12 23 43 56 77	35 78 90 56 42
84 42 12 53 31	34 57 86 07 36	25 30 07 32 86	23 45 78 89 07	23 68 96 08 04
32 56 78 08 43	67 89 53 55 77	34 89 94 83 75	22 53 55 78 32	45 77 89 23 45

若从表中第6行第6列开始向右读取数据，则得到的第6个样本编号是（　　）

A．324　　B．522　　C．535　　D．578

11．《聊斋志异》中有这样一首诗：“挑水砍柴不堪苦，请归但求穿墙术.得诀自诩无所阻，额上坟起终不悟.”在这里，我们称形如以下形式的等式具有“穿墙术”：$2\sqrt{\frac{2}{3}}=\sqrt{2\frac{2}{3}}$，$3\sqrt{\frac{3}{8}}=\sqrt{3\frac{3}{8}}$，$4\sqrt{\frac{4}{15}}=\sqrt{4\frac{4}{15}}$，$5\sqrt{\frac{5}{24}}=\sqrt{5\frac{5}{24}}$，则按照以上规律，若$10\sqrt{\frac{10}{n}}=\sqrt{10\frac{10}{n}}$具有“穿墙术”，则$n=$（　　）

A．48　　B．63　　C．99　　D．120

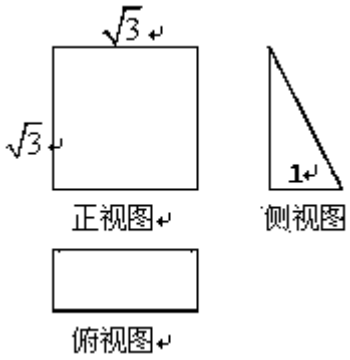
12．已知正项数列$\{a_n\},\{b_n\}$满足：$\begin{cases} a_{n+1}=a_n+10b_n \\ b_{n+1}=a_n+b_n \end{cases}$，设$c_n=\frac{a_n}{b_n}$，当$c_3+c_4$最小时，$c_5$的值为(　　)

A．2　　B．$\frac{14}{5}$　　C．3　　D．4

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13．正项等比数列$\{a_n\}$满足$a_1+a_3=\frac{5}{4}$，且$2a_2,\frac{1}{2}a_4,a_3$成等差数列，则$(a_1a_2)\cdot(a_2a_3)\cdot\ldots\cdot(a_na_{n+1})$取得最小值时$n$的值为_____

14．一个空间几何体的三视图及部分数据如图所示，则这个几何体的体积是_____

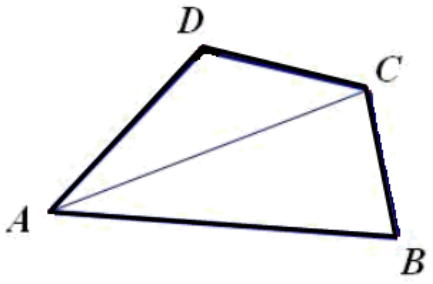


15．（5分）已知曲线C的方程为$y=-ax^3+x(a\in\mathbf{R})$，其图象经过点$P(1,0)$，则曲线$C$在点$P$处的切线方程是_____.

16．$(x+\frac{1}{x}-2)^4$的展开式中x^2的系数为____.

三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

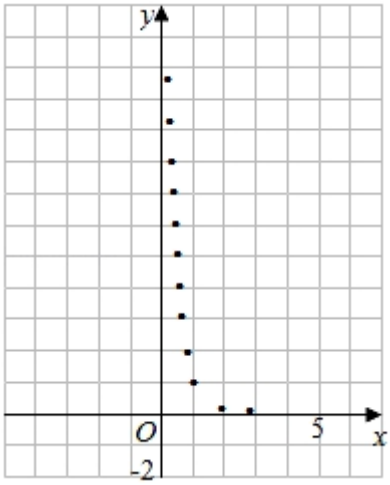
17．（12分）如图，在平面四边形$ABCD$中，$\angle D=\frac{2\pi}{3}$，$\sin\angle BAC=\cos\angle B=\frac{5}{13}$，$AB=13$.



（1）求AC；

（2）求四边形$ABCD$面积的最大值.

18．（12分）某学生为了测试煤气灶烧水如何节省煤气的问题设计了一个实验，并获得了煤气开关旋钮旋转的弧度数x与烧开一壶水所用时间y的一组数据，且作了一定的数据处理（如表），得到了散点图（如图）.



$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{w}$	$\sum_{i=1}^{10}(x_i-\bar{x})^2$	$\sum_{i=1}^{10}(w_i-\bar{w})^2$	$\sum_{i=1}^{10}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})$	$\sum_{i=1}^{10}(w_i-\bar{w})(y_i-\bar{y})$
1.47	20.6	0.78	2.35	0.81	−19.3	16.2

表中 $w_i=\dfrac{1}{x_1^2}$，$\bar{w}=\dfrac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}w_i$.

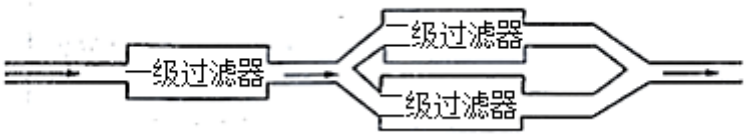
（1）根据散点图判断，$y=a+bx$ 与 $y=c+\dfrac{d}{x^2}$ 哪一个更适宜作烧水时间 y 关于开关旋钮旋转的弧度数 x 的回归方程类型？（不必说明理由）

（2）根据判断结果和表中数据，建立 y 关于 x 的回归方程；

（3）若旋转的弧度数 x 与单位时间内煤气输出量 t 成正比，那么 x 为多少时，烧开一壶水最省煤气？

附：对于一组数据 (u_1,v_1)，(u_2,v_2)，(u_3,v_3)，…，(u_n,v_n)，其回归直线 $v=\alpha+\beta u$ 的斜率和截距的最小二乘估计分别为 $\hat{\beta}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(v_i-\bar{v})(u_i-\bar{u})}{\sum_{i=1}^{n}(u_i-\bar{u})^2}$，$\hat{\alpha}=\bar{v}-\hat{\beta}\bar{u}$.

19.（12 分）某客户准备在家中安装一套净水系统，该系统为二级过滤，使用寿命为十年如图所示两个二级过滤器采用并联安装，再与一级过滤器串联安装.

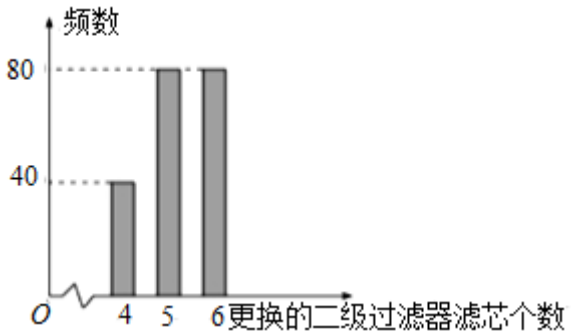


其中每一级过滤都由核心部件滤芯来实现在使用过程中，一级滤芯和二级滤芯都需要不定期更换（每个滤芯是否需要更换相互独立）.若客户在安装净水系统的同时购买滤芯，则一级滤芯每个 160 元，二级滤芯每个 80 元.若客户在使用过程中单独购买滤芯则一级滤芯每个 400 元，二级滤芯每个 200 元.现需决策安装净水系统的同时购买滤芯的数量，为此参考了根据 100 套该款净水系统在十年使用期内更换滤芯的相关数据制成的图表，其中表 1 是根据 100 个一级过滤器更换的滤芯个数制成的频数分布表，图 2 是根据 200 个二级过滤器更换的滤芯个数制成的条形图.

表 1：一级滤芯更换频数分布表

一级滤芯更换的个数	8	9
频数	60	40

图 2：二级滤芯更换频数条形图



以 100 个一级过滤器更换滤芯的频率代替 1 个一级过滤器更换滤芯发生的概率，以 200 个二级过滤器更换滤芯的频率代替 1 个二级过滤器更换滤芯发生的概率.

（1）求一套净水系统在使用期内需要更换的各级滤芯总个数恰好为 16 的概率；

（2）记 X 表示该客户的净水系统在使用期内需要更换的二级滤芯总数，求 X 的分布列及数学期望；

（3）记 m,n 分别表示该客户在安装净水系统的同时购买的一级滤芯和二级滤芯的个数.若 $m+n=19$，且 $m\in\{8,9\}$，以该客户的净水系统在使用期内购买各级滤芯所需总费用的期望值为决策依据，试确定 m,n 的值.

20.（12 分）已知函数 $f\left(x\right)=\sqrt{3}\cos 2x-\sin 2x$，将 $f\left(x\right)$ 的图象向左移 $\alpha\left(\alpha>0\right)$ 个单位，得到函数 $y=g\left(x\right)$ 的图象.

（1）若 $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$，求 $y=g\left(x\right)$ 的单调区间；

（2）若 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$y=g\left(x\right)$ 的一条对称轴是 $x=\dfrac{\pi}{12}$，求 $y=g\left(x\right)$ 在 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 的值域.

21.（12 分）在中国，不仅是购物，而且从共享单车到医院挂号再到公共缴费，日常生活中几乎全部领域都支持手机支付.出门不带现金的人数正在迅速增加。中国人民大学和法国调查公司益普索合作，调查了腾讯服务的 6000 名用户，

从中随机抽取了 60 名，统计他们出门随身携带现金（单位：元）如茎叶图如示，规定：随身携带的现金在 100 元以下（不含 100 元）的为“手机支付族”，其他为“非手机支付族”.

男性		女性
0	3	5
7	4	0 8
8 8 5	5	3 5
2 0	6	0 5
8	7	0
3	8	5 5 8
0	9	5
8 5 0 0 0	10	0 0
9 8 2 2 0	11	5
5 0 0 0	12	0 8
5 5 4 2 0	13	0
6 6 1 0	14	5
5 4 3 2 0	15	6
5 0	16	

	男性	女性	合计
手机支付族			
非手机支付族			
合计			

（1）根据上述样本数据，将2×2列联表补充完整，并判断有多大的把握认为“手机支付族”与“性别”有关？

（2）用样本估计总体，若从腾讯服务的用户中随机抽取 3 位女性用户，这 3 位用户中“手机支付族”的人数为ξ，求随机变量ξ的期望和方差；

（3）某商场为了推广手机支付，特推出两种优惠方案，方案一：手机支付消费每满 1000 元可直减 100 元；方案二：手机支付消费每满 1000 元可抽奖 2 次，每次中奖的概率同为$\frac{1}{2}$，且每次抽奖互不影响，中奖一次打 9 折，中奖两次打 8.5 折.如果你打算用手机支付购买某样价值 1200 元的商品，请从实际付款金额的数学期望的角度分析，选择哪种优惠方案更划算？

附：

$P(K^2\geq k_0)$	**0.050**	**0.010**	**0.001**
k_0	**3.841**	**6.635**	**10.828**

$$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

22.（10 分）在ΔABC中，角A、B、C的对边分别为a、b、c，且$2\sqrt{3}\sin^2\frac{A}{2}+\sin A-\sqrt{3}=0$.

（1）求角A的大小；

（2）已知ΔABC外接圆半径$R=\sqrt{3}$，$AC=\sqrt{3}$,求ΔABC的周长.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、C

【解析】

设 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，设直线 l 的方程为：$y=kx+b$，与抛物线方程联立，由 $\Delta>0$ 得 $kb<1$，利用韦达定理结合已知条件得 $b=\dfrac{2-k^2}{k}$，$m=\dfrac{2}{k}$，代入上式即可求出 k 的取值范围.

【详解】

设直线 l 的方程为：$y=kx+b$，$A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，

联立方程 $\begin{cases}y=kx+b\\ y^2=4x\end{cases}$，消去 y 得：$k^2x^2+(2kb-4)x+b^2=0$，

$\therefore \Delta=(2kb-4)^2-4k^2b^2>0$，

$\therefore kb<1$，

且 $x_1+x_2=\dfrac{4-2kb}{k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{b^2}{k^2}$，

$y_1+y_2=k(x_1+x_2)+2b=\dfrac{4}{k}$，

Q 线段 AB 的中点为 $M(1,m)\ \ (m>0)$，

$\therefore x_1+x_2=\dfrac{4-2kb}{k^2}=2$，$y_1+y_2=\dfrac{4}{k}=2m$，

$\therefore b=\dfrac{2-k^2}{k}$，$m=\dfrac{2}{k}$，

Q $m>0$，

$\therefore k>0$，

把 $b=\dfrac{2-k^2}{k}$ 代入 $kb<1$，得 $2-k^2<1$，

$\therefore k^2>1$，

$\therefore k>1$，

故选：C

【点睛】

本题主要考查了直线与抛物线的位置关系，考查了韦达定理的应用，属于中档题.

2、B

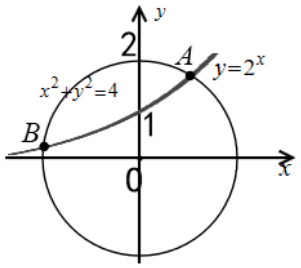
【解析】

作出两集合所表示的点的图象，可得选项.

【详解】

由题意得，集合 A 表示以原点为圆心，以 2 为半径的圆，集合 B 表示函数 $y=2^x$ 的图象上的点，作出两集合所表示的点的示意图如下图所示，得出两个图象有两个交点:点 A 和点 B，所以两个集合有两个公共元素，所以 $A\cap B$ 元素个数为 2，

故选：B.



【点睛】

本题考查集合的交集运算，关键在于作出集合所表示的点的图象，再运用数形结合的思想，属于基础题.

3、D

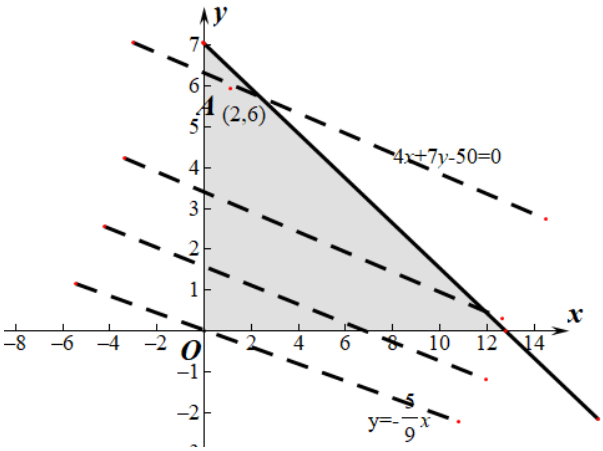
【解析】

由题意列出约束条件和目标函数，数形结合即可解决.

【详解】

设购买甲、乙两种商品的件数应分别 x， y 利润为 z 元，由题意 $\begin{cases}4x+7y\le 50,\\ x,y\in N^*,\end{cases}$ $z=x+1.8y$，

画出可行域如图所示，



显然当 $y=-\frac{5}{9}x+\frac{5}{9}z$ 经过 $A(2,6)$ 时， z 最大.

故选：D.

【点睛】

本题考查线性目标函数的线性规划问题，解决此类问题要注意判断x，y是否是整数，是否是非负数，并准确的画出可行域，本题是一道基础题.

4、B

【解析】

利用等差数列的性质求出a_4的值，然后利用等差数列求和公式以及等差中项的性质可求出S_7的值.

【详解】

由等差数列的性质可得$a_6+a_3-a_5=a_4+a_5-a_5=3$，

$$\therefore S_7=\frac{7\left(a_1+a_7\right)}{2}=\frac{7\times 2a_4}{2}=7\times 3=21.$$

故选：B.

【点睛】

本题考查等差数列基本性质的应用，同时也考查了等差数列求和，考查计算能力，属于基础题.

5、D

【解析】

首先对函数求导，利用导数的符号分析函数的单调性和函数的极值，根据题意，列出参数所满足的不等关系，求得结果.

【详解】

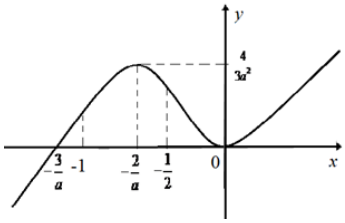
$f'\left(x\right)=ax^2+2x$，令$f'\left(x\right)=0$，得$x_1=0$，$x_2=-\frac{2}{a}$.

其单调性及极值情况如下：

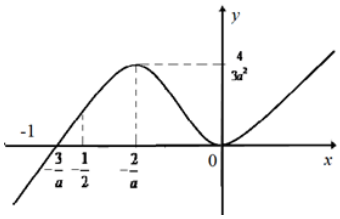
x	$\left(-\infty,-\frac{2}{a}\right)$	$-\frac{2}{a}$	$\left(-\frac{2}{a},0\right)$	0	$\left(0,+\infty\right)$
$f'\left(x\right)$	+	0	_	0	+
$f\left(x\right)$	Z	极大值	]	极小值	Z

若存在$x_0\in\left(-1,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2},0\right)$，使得$f\left(x_0\right)=f\left(-\frac{1}{2}\right)$，

则$\begin{cases} -\frac{2}{a}<-\frac{1}{2} \\ -\frac{2}{a}>-1 \\ f(-1)<f\left(-\frac{1}{2}\right) \end{cases}$（如图 1）或$-\frac{3}{a}<-\frac{1}{2}<-\frac{2}{a}$（如图 2）.



（图 1）



（图 2）

于是可得$a\in\left(\frac{18}{7},4\right)\cup(4,6)$，

故选：D.

【点睛】

该题考查的是有关根据函数值的关系求参数的取值范围的问题，涉及到的知识点有利用导数研究函数的单调性与极值，画出图象数形结合，属于较难题目.

6、B

【解析】

由三视图确定原几何体是正三棱柱，由此可求得体积.

【详解】

由题意原几何体是正三棱柱，$V=\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{3}\times 4=4\sqrt{3}$.

故选：B.

【点睛】

本题考查三视图，考查棱柱的体积．解题关键是由三视图不愿出原几何体.

7、C

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/256153001212010141