

专题 2-4 瓜豆轨最值模型：为什么我们喜欢手拉手（直线与曲线）

01

题型·解读

【例题 1】三种处理策略

【例题 2】饮马类瓜豆与加权线段和问题

【瓜豆圆介绍】

题型一 轨迹为直线型·构造中位线求

2023·广东深圳·统考三模

题型二 轨迹为直线型·构造手拉手

经典例题·宿迁中考

2023·黑龙江绥化·中考真题

2023·湖北黄冈·统考中考真题

2023·西安市交通大学附属中学初三月考

题型三 轨迹为直线型·将军饮马加权线段和问题

题型四 轨迹为圆弧型·构造中位线

2023·山东泰安·中考真题

题型五 轨迹为圆弧型·构造手拉手

2023·四川宜宾·统考中考真题

2022 沈阳中考

2022·盐城市一模

2023·深圳外国语学校中考模拟

题型六 路径相关问题

2022·山东滨州·统考中考真题

2023·海南·统考中考真题

题型七 当线段最小值时求其它量

2022·广东广州·中考真题

2023·四川·广元中考真题

02

满分·技巧

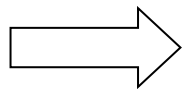
初中阶段如遇求轨迹长度仅有 2 种类型：“直线型”和“圆弧型”（两种类型中还会涉及点往返探究“往返型”），对于两大类型该如何断定，通常老师会让学生画图寻找 3 处以上的点来确定轨迹类型进而求出答案，对于填空选择题而言不外乎是个好方法，但如果要进行说理很多考生难以解释清楚

一、我们先来解释一下瓜豆原理：定角定比，主从联动

瓜豆原理：一个主动点，一个从动点（根据某种约束条件，跟着主动点动），当主动点运动时，从动点的轨迹相同。

只要满足：

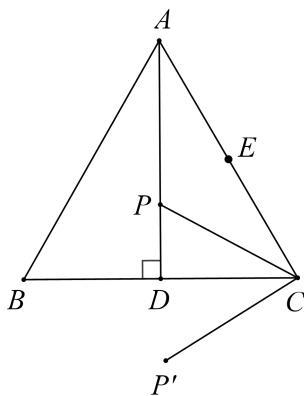
- 1、两“动”，一“定”
- 2、两动点与定点的连线夹角是定角
- 3、两动点到定点的距离比值是定值



则两动点的运动轨迹是相似的，运动轨迹长度的比和它们到定点的距离比相同。

【例题 1】三种处理策略

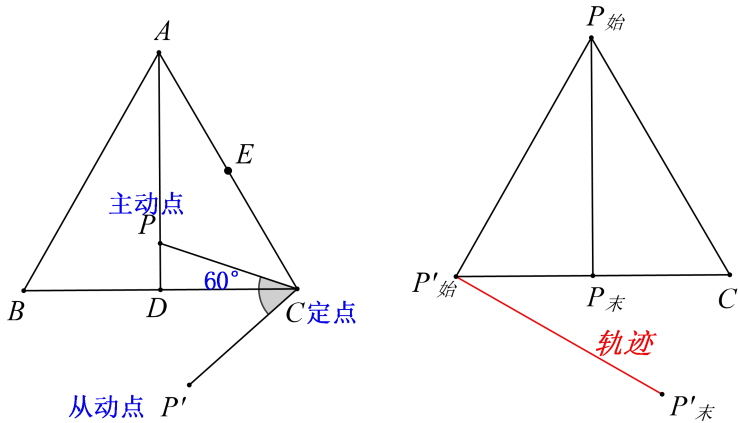
如图， D 、 E 是边长为 4 的等边三角形 ABC 上的中点， P 为中线 AD 上的动点，把线段 PC 绕 C 点逆时针旋转 60° ，得到 P' ， EP' 的最小值



【分析】

结合这个例题我们再来熟悉一下瓜豆模型

第一层：点 P' 运动的轨迹是直线吗？



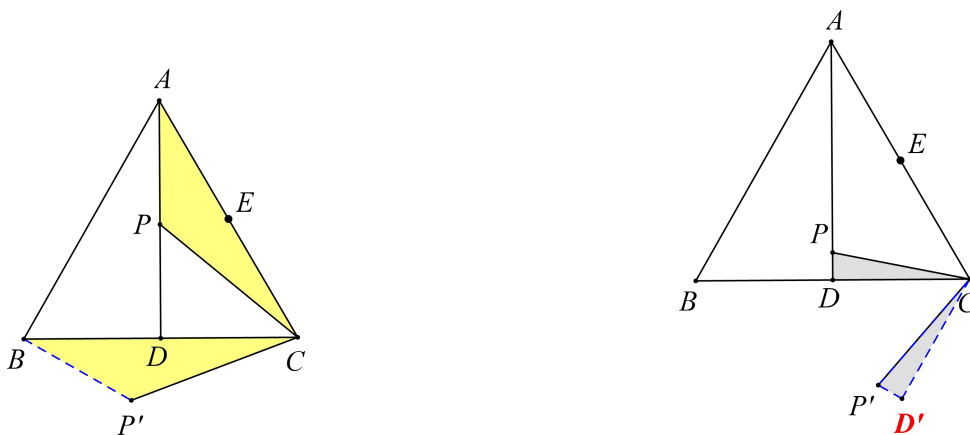
答：是直线，可以通过 P 在 A, D 时，即始末位置时 P' 对应的位置得到直线轨迹，对于选填题，可找出从动点的始末位置，从而快速定位轨迹，若要说明则需要构造手拉手证明。

第二层：点 P' 的运动长度和点 P 的运动长度相同吗？

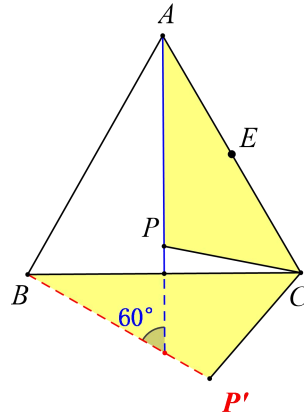
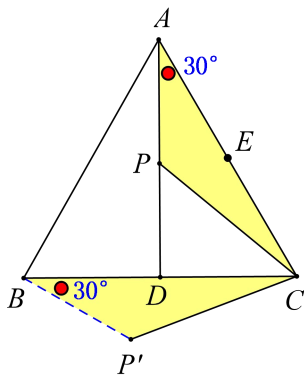
答：因为点 P' 与点 P 到定点 C 的距离相等，则有运动路径长度相等，若要说明则同样需要构造手拉手结构，通过全等证明。

第三层：手拉手模型怎么构造？

答：以旋转中心 C 为顶点进行构造，其实只要再找一组对应的主从点即可，简单来说就是从 P 点的轨迹即线段 AD 中再找一个点进行与 P 点类似的旋转，比如把线段 AD 中的点 A 绕 C 点逆时针旋转 60° ，即为点 B ，连接 BP' 即可得到一组手拉手模型，虽然前面说是任意点，但一般来说我们选择一个特殊位置的点进行旋转后的点位置也是比较容易确定的，比如说点 D 进行旋转也是比较方便。



第四层：分析 $\angle CAP$ 和 $\angle CBP'$



答：由全等可知 $\angle CAP = \angle CBP'$ ，因为 B 为定点，所以得到 P' 轨迹为直线 BP'

第五层：点 P 和点 P' 轨迹的夹角和旋转角的关系

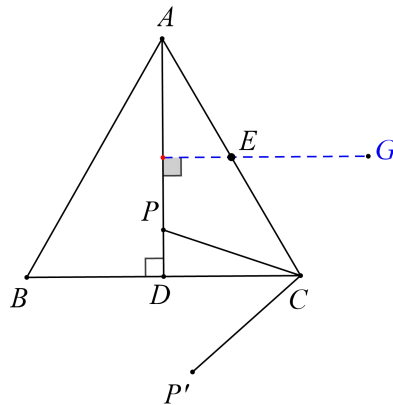
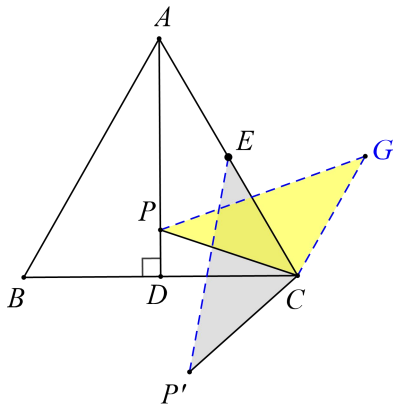
答：不难得出本题主动点与从动点轨迹的夹角等于旋转角，要注意的是如果旋转角是钝角，那么主动点与从动点轨迹的夹角等于旋转角的补角，这个在后面的例题中会出现。

大气层：前面提到，如果是选填空题，可以通过找从动点的始末位置快速定位轨迹线段，或者通过构造手拉手，通过全等或相似得出相等角然后得出轨迹，这两种方法都是先找出从动点 P' 的轨迹，再作垂线段并求出垂线段的长得到最小值，那么还有其他方法吗？

答：还可以对关键点进行旋转来构造手拉手模型，从而**代换**所求线段，构造如下。

将点 EC 绕点 C 顺时针旋转 60° ，构造手拉手模型(SAS 全等型)，从而得到 $P'E = PG$ ，最小值即为点 G 到 AD 的距离。

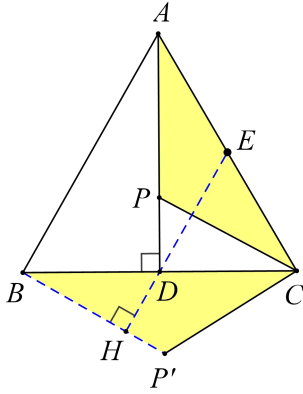
要注意的是因为要**代换** $P'E$ ，所以 E 点的旋转方式应该是从 $P' \rightarrow P$ ，所以是顺时针旋转，求轨迹时的旋转方式则是 $P \rightarrow P'$ ，注意区分。



解析

策略一：找从动点轨迹

连接 BP' ，



由旋转可得， $CP=CP'$ ， $\angle P'CP=60^\circ$ ，

$\because \triangle ABC$ 是等边三角形，

$\therefore AC=BC$ ， $\angle ACB=60^\circ$ ，

$\therefore \angle ACB = \angle PCP'$ ，

$\therefore \triangle ACP \cong \triangle BCP'$ (SAS)，

$\therefore \angle CBP' = \angle CAP$ ，

\because 边长为 4 的等边三角形 ABC 中， P 是对称轴 AD 上的一个动点，

$\therefore \angle CAP = 30^\circ$ ， $BD = 2$ ，

$\therefore \angle CBP' = 30^\circ$ ，

即点 P' 的运动轨迹为直线 BP' ，

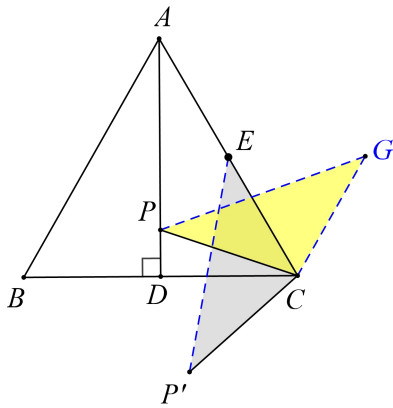
\therefore 当 $DP' \perp BP'$ 时， EP' 最短，

此时， $EP' = \frac{1}{2}BD + ED = \frac{1}{2} \times 2 + 2 = 3$

$\therefore EP'$ 的最小值是 3

策略二：反向旋转关键点构造手拉手代换所求线段

将点 E 绕 C 点顺时针旋转 60° 得到点 G , 连接 PG , CG , EP'



由旋转可得 $EC = CG$, $CP = CP'$, $\angle P'CP = 60^\circ$, $\angle ECG = 60^\circ$,

$\therefore \triangle ECG$ 是等边三角形, $EG = 2$

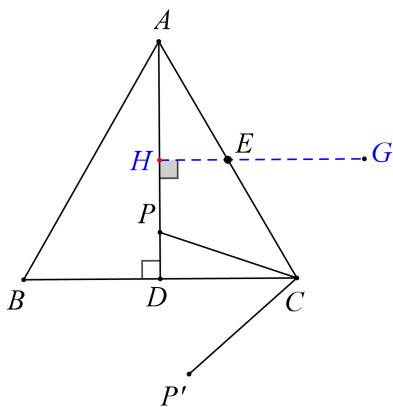
$\because \angle PCP' = \angle ECG$

$\therefore \angle PCG = \angle ECP'$

$\therefore \triangle GCP \cong \triangle ECP'$ (SAS),

$\therefore EP' = GP$,

过点 G 作 AD 的垂线 GH 垂足为 H , GH 即为所求.



$\because \angle GEC = \angle ACD$

$\therefore HE \parallel DC$

$\because \angle GHD = \angle ADC$

$\therefore HG \parallel DC$

故 G, E, H 三点共线, 则有 $HE \parallel DC$

又 E 是 AC 中点, 分线段成比例可知 H 是 AD 中点

$$\therefore HE = \frac{1}{2}DC = 1$$

$$EP' = GP = HE + EG = 2 + 1 = 3$$

$\therefore EP'$ 的最小值是 3

总共提到了 3 种处理方式:

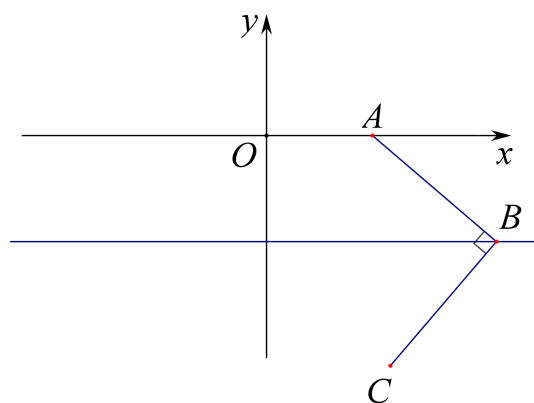
1. 找始末, 定轨迹
2. 在轨迹上找一点旋转, 构造手拉手模型, 再通过角度相等得到从动点轨迹.
3. 反向旋转相关定点, 构造手拉手模型, 代换所求线段, 即逆向构造.

【例题 2】饮马类瓜豆与加权线段和问题

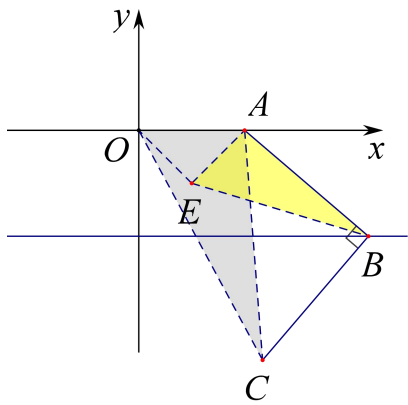
已知点 $A(2,0)$, 点 B 是直线 $y=-2$ 上一个动点, 将线段 AB 绕点 B 逆时针旋转 90° 得到线段 BC .

角度 1: 反向旋转构造手拉手 (不用求从动点轨迹, 直接转换为垂线段最短)

(1) 求 OC 的最小值

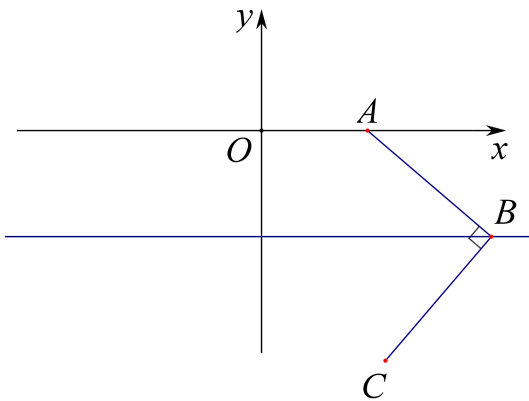


【简析】如图, 构造等腰直角 $\triangle AOE$, $E(1,-1)$ 由旋转相似可知 $OC = \sqrt{2}BE \leq \sqrt{2}$

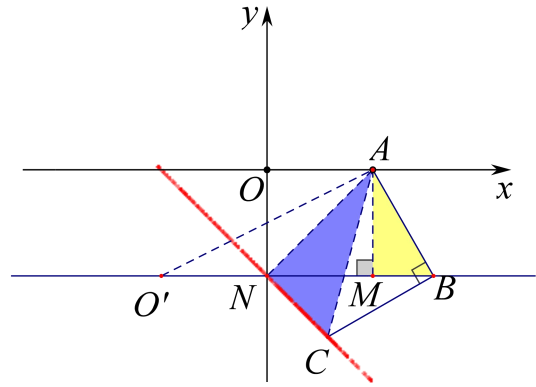
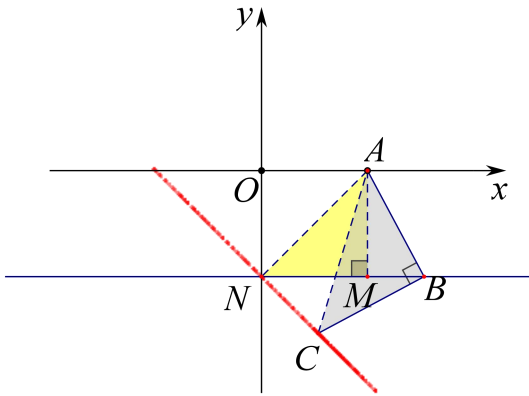


角度 2：构造手拉手求从动点轨迹

(2) 求 $\sqrt{2}BC + OC$ 的最小值

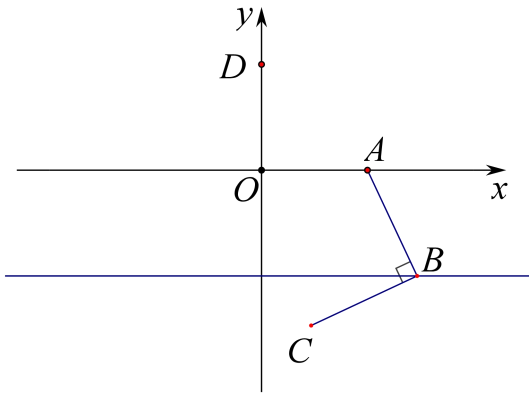


【简析】 $\sqrt{2}BC + OC = AC + OC$ ，求出 C 点轨迹，再将军饮马，如图，在 B 点轨迹上取一点 $M(2, -2)$ ，构造旋转相似，易知 $\angle CAN = 90^\circ$ ，可知 C 点轨迹为 $y = -x - 2$ ，作 $O'(-2, -2)$ ， $AC + OC = AC + O'C \geq AO' = 2\sqrt{5}$ ，补充：此时加权线段和对应三边之比



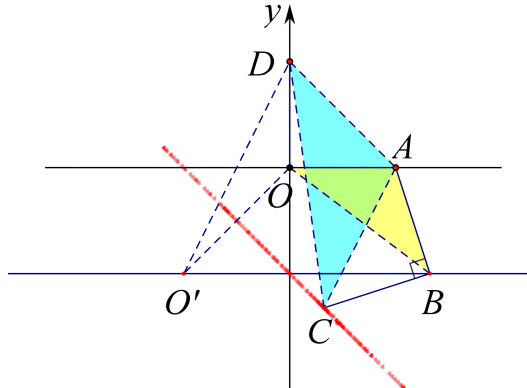
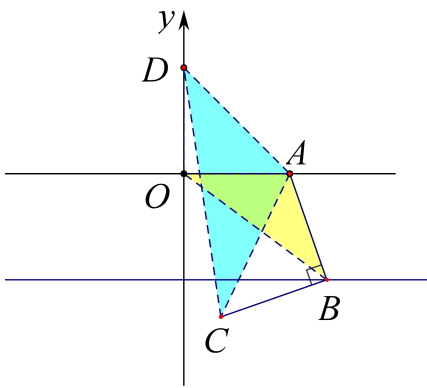
角度 3: 构造旋转相似求加权线段和

(3) 记 $D(0,2)$, ①求 $DC + OB$ 的最小值; ②求 $\sqrt{2}OB + OC$ 的最小值



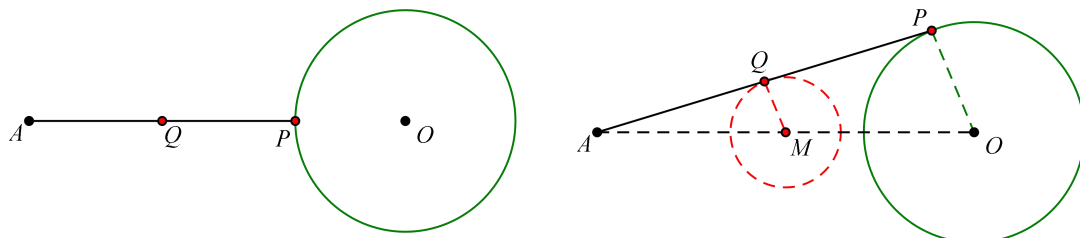
【简析】①由旋转相似可知 $DC = \sqrt{2}OB$, 则 $DC + OB = (\sqrt{2} + 1)OB \leq 2\sqrt{2} + 2$

② $\sqrt{2}OB + OC = DC + OC = DC + O'C \geq DO' = 2\sqrt{5}$, 补充: 此时加权线段和对应相似比



【瓜豆圆介绍】

如图，P 是圆 O 上一个动点，A 为定点，连接 AP，Q 为 AP 中点。当点 P 在圆 O 上运动时，Q 点轨迹是？



【分析】观察动图可知点 Q 轨迹是个圆，而我们还需确定的是此圆与圆 O 有什么关系？

考虑到 Q 点始终为 AP 中点，连接 AO，取 AO 中点 M，则 M 点即为 Q 点轨迹圆圆心，半径 MQ 是 OP 一半，任意时刻，均有 $\triangle AMQ \sim \triangle AOP$ ， $QM:PO=AQ:AP=1:2$

【小结】

确定 Q 点轨迹圆即确定其圆心与半径，

由 A、Q、P 始终共线可得：A、M、O 三点共线，

由 Q 为 AP 中点可得： $AM = \frac{1}{2}AO$ 。

Q 点轨迹相当于是 P 点轨迹成比例缩放。

根据动点之间的相对位置关系分析圆心的相对位置关系；

根据动点之间的数量关系分析轨迹圆半径数量关系。

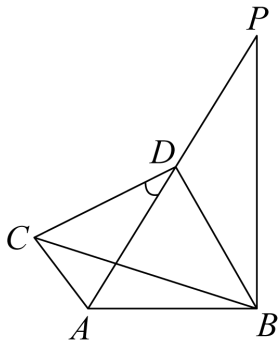
03

核心·题型

题型一 轨迹为直线型·构造中位线求

2023·广东深圳·统考三模

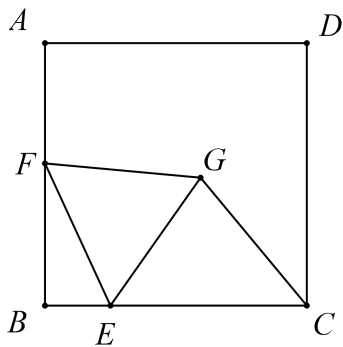
1. 如图所示， $AB = 4$ ， $AC = 2$ ，以 BC 为底边向上构造等腰直角三角形 BCD，连接 AD 并延长至点 P，使 $AD = PD$ ，则 PB 长的取值范围为 _____。



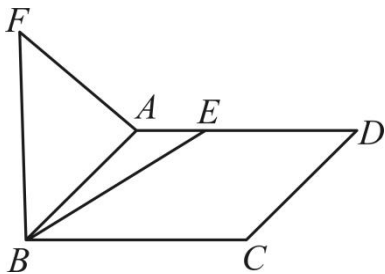
题型二 轨迹为直线型·构造手拉手

经典例题·宿迁中考

2. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 4， E 为 BC 上一点，且 $BE=1$ ， F 为 AB 边上的一个动点，连接 EF ，以 EF 为边向右侧作等边 $\triangle EFG$ ，连接 CG ，则 CG 的最小值为_____.

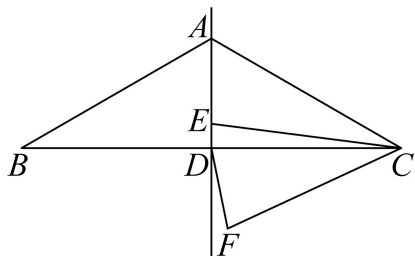


3. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，点 E 为射线 AD 上一动点，连接 BE ，将 BE 绕点 B 逆时针旋转 60° 得到 BF ，连接 AF ， $AB=12$ ， $\angle ABC=45^\circ$ ，求 AF 的最小值.

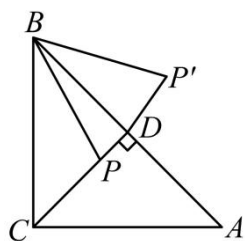


【思路点拨】 将 AB 顺时针旋转 60° ，作等边 $\triangle ABK$ ，根据手拉手模型可知 $AF=EK$ ，根据垂线段最短可知，当 $EK \perp AD$ 时， KE 的值最小，利用勾股定理求解 EK 即可求解.

4. (2023·洛阳·二模) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 2$, $\angle BAC = 120^\circ$, 对称轴 AD 交 BC 于点 D , 点 E 是直线 AD 上的一个动点, 连接 EC , 将线段 EC 绕点 C 逆时针旋转 30° 得 FC , 连接 DF , 则 DF 长的最小值为 _____.

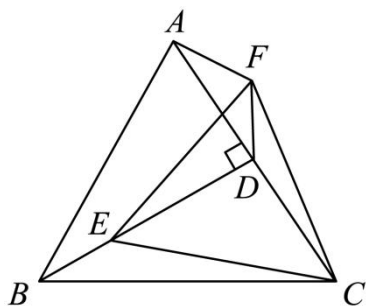


5. (2023·广东深圳·校考模拟预测) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = BC = 4$, P 是 $\triangle ABC$ 的高 CD 上一个动点, 以 B 点为旋转中心把线段 BP 逆时针旋转 45° 得到 BP' , 连接 DP' , 则 DP' 的最小值是 _____.



2023·黑龙江绥化·中考真题

6. 如图, $\triangle ABC$ 是边长为 6 的等边三角形, 点 E 为高 BD 上的动点. 连接 CE , 将 CE 绕点 C 顺时针旋转 60° 得到 CF . 连接 AF , EF , DF , 则 $\triangle CDF$ 周长的最小值是 _____.



7. (2022·山东日照·统考中考真题) 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 点 A 的坐标为 $(0, 4)$, P 是 x 轴上一动点, 把线段 PA 绕点 P 顺时针旋转 60° 得到线段 PF , 连接 OF , 则线段 OF 长的最小值是 _____.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/256201242025011002>