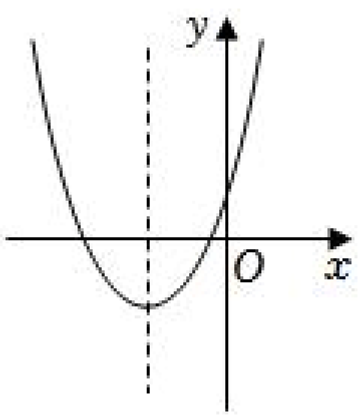
挑战2023年中考数学选择、填空压轴真题汇编

专题05 二次函数函数综合的压轴真题训练

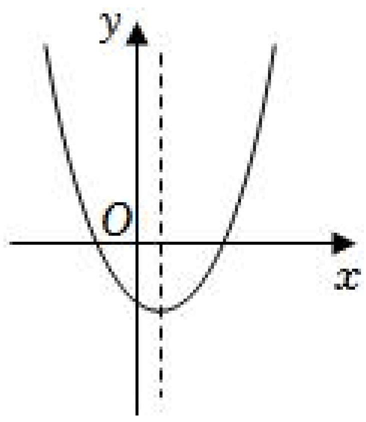
一．二次函数的图象

1．（2022•株洲）已知二次函数 $y=ax^2+bx-c$（$a\neq0$），其中 $b>0$、$c>0$，则该函数的图象可能为（　　）

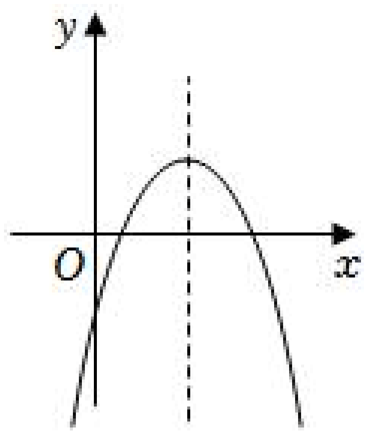
A．



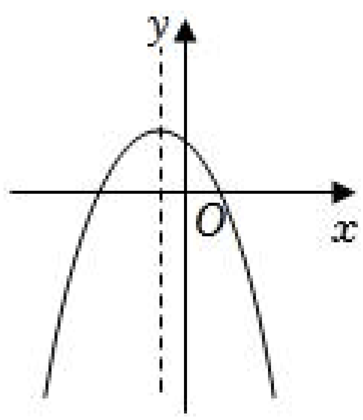
B．



C．



D．



【答案】C

【解答】解：∵ $c>0$，

∴ $-c<0$，

故A，D选项不符合题意；

当 $a>0$ 时，

∵ $b>0$，

∴对称轴 $x=-\frac{b}{2a}<0$，

故B选项不符合题意；

当 $a<0$ 时，$b>0$，

∴对称轴 $x=-\frac{b}{2a}>0$，

故C选项符合题意，

故选：C

二．二次函数的性质

2．（2022•陕西）已知二次函数 $y=x^2-2x-3$ 的自变量 x_1，x_2，x_3 对应的函数值

分别为 y_1，y_2，y_3．当 $-1<x_1<0$，$1<x_2<2$，$x_3>3$ 时，y_1，y_2，y_3 三者之间的大小关系是（　　）

A．$y_1<y_2<y_3$　　B．$y_2<y_3<y_1$　　C．$y_3<y_1<y_2$　　D．$y_2<y_1<y_3$

【答案】D

【解答】解：∵抛物线 $y=x^2-2x-3=(x-1)^2-4$，

∴对称轴 $x=1$，顶点坐标为（1，-4），

当 $y=0$ 时，$(x-1)^2-4=0$，

解得 $x=-1$ 或 $x=3$，

∴抛物线与 x 轴的两个交点坐标为：（-1，0），（3，0），

∴当 $-1<x_1<0$，$1<x_2<2$，$x_3>3$ 时，$y_2<y_1<y_3$，

故选：D．

3．（2022•岳阳）已知二次函数 $y=mx^2-4m^2x-3$（m 为常数，$m\neq0$），点 P（x_p，y_p）是该函数图象上一点，当 $0\leqslant x_p\leqslant4$ 时，$y_p\leqslant-3$，则 m 的取值范围是（　　）

A．$m\geqslant1$ 或 $m<0$　B．$m\geqslant1$　　C．$m\leqslant-1$ 或 $m>0$　D．$m\leqslant-1$

【答案】A

【解答】解：∵二次函数 $y=mx^2-4m^2x-3$，

∴对称轴为 $x=2m$，抛物线与 y 轴的交点为（0，-3），

∵点 P（x_p，y_p）是该函数图象上一点，当 $0\leqslant x_p\leqslant4$ 时，$y_p\leqslant-3$，

∴① 当 $m>0$ 时，对称轴 $x=2m>0$，

此时，当 $x=4$ 时，$y\leqslant-3$，即 $m\cdot4^2-4m^2\cdot4-3\leqslant-3$，

解得 $m\geqslant1$；

② 当 $m<0$ 时，对称轴 $x=2m<0$，

当 $0\leqslant x\leqslant4$ 时，y 随 x 增大而减小，

则当 $0\leqslant x_p\leqslant4$ 时，$y_p\leqslant-3$ 恒成立；

综上，m 的取值范围是：$m\geqslant1$ 或 $m<0$．

故选：A．

4．（2022•衢州）已知二次函数 $y=a(x-1)^2-a$（$a\neq0$），当 $-1\leqslant x\leqslant4$ 时，y 的最小值为 -4，则 a 的值为（　　）

A．$\frac{1}{2}$或 4　　B．$\frac{4}{3}$或 $-\frac{1}{2}$　　C．$-\frac{4}{3}$或 4　　D．$-\frac{1}{2}$或 4

【答案】D

【解答】解：$y=a(x-1)^2-a$ 的对称轴为直线 $x=1$，

顶点坐标为（1，-a），

当 $a>0$ 时，在 $-1\leqslant x\leqslant 4$，函数有最小值 $-a$，

∵y 的最小值为 -4，

∴ $-a=-4$，

∴$a=4$；

当 $a<0$ 时，在 $-1\leqslant x\leqslant 4$，当 $x=4$ 时，函数有最小值，

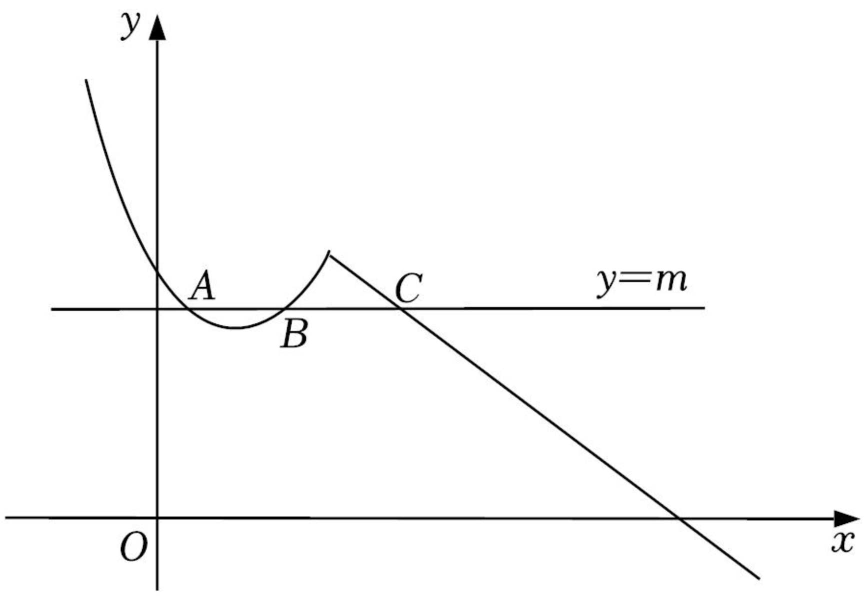
∴$9a-a=-4$，

解得 $a=-\frac{1}{2}$；

综上所述：a 的值为 4 或 $-\frac{1}{2}$，

故选：D．

5．（2022•荆门）如图，函数 $y=\begin{cases}x^2-2x+3\ (x<2)\\ -\frac{3}{4}x+\frac{9}{2}\ (x\geqslant 2)\end{cases}$ 的图象由抛物线的一部分和一条射线组成，且与直线 $y=m$（m 为常数）相交于三个不同的点 A（x_1，y_1），B（x_2，y_2），C（x_3，y_3）（$x_1<x_2<x_3$）．设 $t=\frac{x_1y_1+x_2y_2}{x_3y_3}$，则 t的取值范围是 ______．



【答案】$\frac{3}{5}<t<1$

【解答】解：由二次函数 $y=x^2-2x+3$（$x<2$）可知：图象开口向上，对称轴为 $x=1$，

∴当 $x=1$ 时函数有最小值为 2，$x_1+x_2=2$，

由一次函数 $y=-\frac{3}{4}x+\frac{9}{2}(x\geqslant2)$ 可知当 $x=2$ 时有最大值 3，当 $y=2$ 时 $x=\frac{10}{3}$，

∵直线 $y=m$（m 为常数）相交于三个不同的点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$（$x_1<x_2<x_3$），

∴$y_1=y_2=y_3=m$，$2<m<3$，

∴$2<x_3<\frac{10}{3}$，

∴$t=\frac{x_1+x_2}{x_3}=\frac{2}{x_3}$，

∴$\frac{3}{5}<t<1$.

故答案为：$\frac{3}{5}<t<1$.

三．二次函数图象与系数的关系

6．（2022•南充）已知点 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$ 在抛物线 $y=mx^2-2m^2x+n$（$m\neq0$）上，当 $x_1+x_2>4$ 且 $x_1<x_2$ 时，都有 $y_1<y_2$，则 m 的取值范围为（　　）

A．$0<m\leqslant2$　　B．$-2\leqslant m<0$　　C．$m>2$　　D．$m<-2$

【答案】A

【解答】解：方法一：∵抛物线 $y=mx^2-2m^2x+n$（$m\neq0$），

∴该抛物线的对称轴为直线 $x=-\frac{-2m^2}{2m}=m$，

∵当 $x_1+x_2>4$ 且 $x_1<x_2$ 时，都有 $y_1<y_2$，

∴当 $m>0$ 时，

$0<2m\leqslant4$，

解得 $0<m\leqslant2$；

当 $m<0$ 时，

$2m>4$，

此时 m 无解；

由上可得，m 的取值范围为 $0<m\leqslant2$，

故选：A．

方法二：由 $y_1<y_2$ 可得，

$(mx_2^2-2m^2x_2+n)-(mx_1^2-2m^2x_1+n)>0$，

整理，得：m（x_2﹣x_1）（x_2+x_1﹣2m）＞0，

∵x_1+x_2>4 且 x_1＜x_2，

∴当 m＞0 时，则 x_2+x_1﹣2m＞0，

即 2m≤4，

解得 m≤2，

∴0＜m≤2；

当 m＜0 时，则 x_2+x_1﹣2m＜0，此时无解；

由上可得，0＜m≤2，

故选：A．

7．（2022•凉山州）已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 经过点（1，0）和点（0，﹣3），且对称轴在 y 轴的左侧，则下列结论错误的是（　　）

A．a＞0

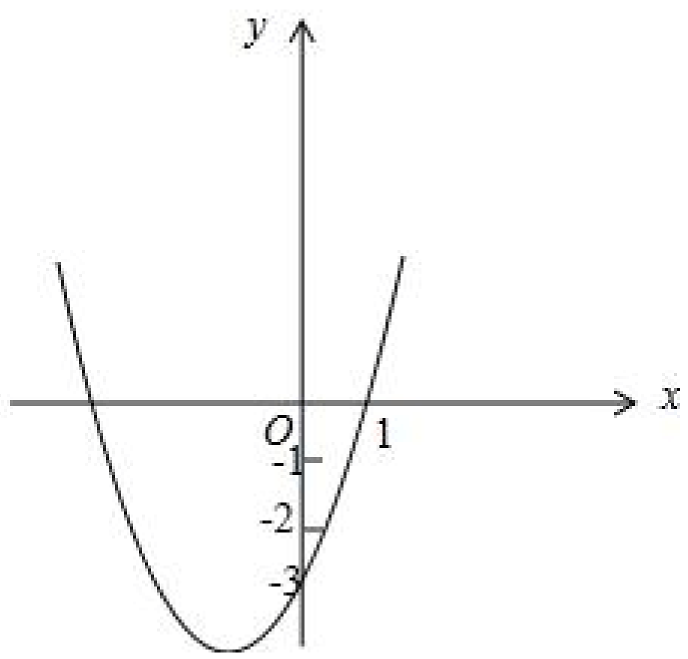
B．a+b＝3

C．抛物线经过点（﹣1，0）

D．关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=-1$ 有两个不相等的实数根

【答案】C

【解答】解：由题意作图如下：



由图知，a＞0，

故 A 选项说法正确，不符合题意，

∵抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 经过点（1，0）和点（0，﹣3），

∴a+b+c＝0，c＝﹣3，

∴$a+b=3$，

故B选项说法正确，不符合题意，

∵对称轴在y轴的左侧，

∴抛物线不经过（－1，0），

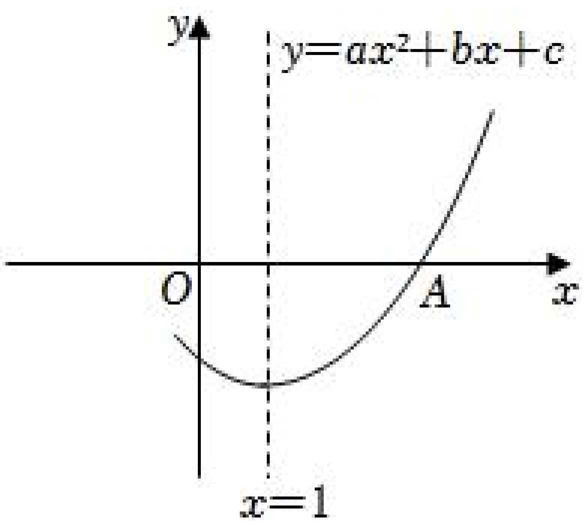
故C选项说法错误，符合题意，

由图知，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与直线 $y=-1$ 有两个交点，故关于x的一元二次方程 $ax^2+bx+c=-1$ 有两个不相等的实数根，

故D选项说法正确，不符合题意，

故选：C．

8．（2022•广安）已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的对称轴为 $x=1$，与x轴正半轴的交点为A（3，0），其部分图象如图所示，有下列结论：① $abc>0$； ② $2c-3b<0$； ③ $5a+b+2c=0$；④ 若B（$\frac{4}{3}$，y_1）、C（$\frac{1}{3}$，y_2）、D（$-\frac{1}{3}$，y_3）是抛物线上的三点，则 $y_1<y_2<y_3$．其中正确结论的个数有（　　）



A．1　　　B．2　　　C．3　　　D．4

【答案】B

【解答】解：∵抛物线开口向上，

∴$a>0$，

∵抛物线的对称轴是直线 $x=1$，

∴$1=-\frac{b}{2a}$，

∴$b=-2a$，

∴$b<0$，

∵抛物线交y轴于负半轴，

∴$c<0$，

∴$abc>0$，故① 正确，

∵抛物线 $y=ax^2-2ax+c$ 经过（3，0），

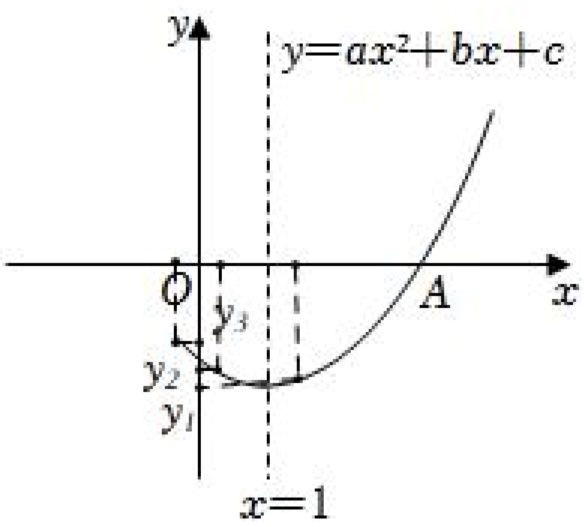
∴$9a-6a+c=0$，

∴$c=-3a$，

∴$2c-3b=-6a+6a=0$，故② 错误，

$5a+b+2c=5a-2a-6a=-3a<0$，故③ 错误，

观察图象可知，$y_1<y_2<y_3$，故④ 正确，



故选：B．

9．（2022•恩施州）已知抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2-bx+c$，当 $x=1$ 时，$y<0$；当 $x=2$ 时，$y<0$．下列判断：

① $b^2>2c$；② 若 $c>1$，则 $b>\frac{3}{2}$；③ 已知点 A（m_1，n_1），B（m_2，n_2）在抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2-bx+c$ 上，当 $m_1<m_2<b$ 时，$n_1>n_2$；④ 若方程 $\frac{1}{2}x^2-bx+c=0$ 的两实数根为 x_1，x_2，则 $x_1+x_2>3$．其中正确的有（　　）个．

A．1　　　B．2　　　C．3　　　D．4

【答案】C

【解答】解：∵ $a=\frac{1}{2}>0$，

∴抛物线开口向上，

当 $x=1$ 时，$y<0$；当 $x=2$ 时，$y<0$，

∴抛物线　与 x 轴有两个不同的交点，

∴ $\Delta=b^2-4ac=b^2-2c>0$，故① 正确；

∵当 $x=1$ 时，$y<0$；当 $x=2$ 时，$y<0$，

∴$\frac{1}{2}-b+c<0$；

$\therefore b>\frac{1}{2}+c$，

当 $c>1$ 时，则 $b>\frac{3}{2}$，故② 正确；

抛物线的对称轴为直线 $x=b$，且开口向上，

当 $x<b$ 时，y 的值随 x 的增大而减小，

$\therefore$ 当 $m_1<m_2<b$ 时，$n_1>n_2$，故③ 正确；

$\because$ 方程 $\frac{1}{2}x^2-bx+c=0$ 的两实数根为 x_1，x_2，

$\therefore x_1+x_2=2b$，

由② 可知，当 $c>1$ 时，则 $b>\frac{3}{2}$，

$\therefore x_1+x_2$ 不一定大于 3，故④ 错误；

综上，正确的有①②③ ，共 3 个，

故选：C．

10．（2022 •呼和浩特）在平面直角坐标系中，点 C 和点 D 的坐标分别为（﹣1，﹣1）和（4，﹣1），抛物线 $y=mx^2-2mx+2$（$m\neq 0$）与线段 CD 只有一个公共点，则 m 的取值范围是 ________．

【答案】$m=3$ 或 $-1<m\leqslant -\frac{3}{8}$

【解答】解：抛物线的对称轴为：$x=-\frac{-2m}{2m}=1$，

当 $x=0$ 时，$y=2$，

$\therefore$ 抛物线与 y 轴的交点坐标为（0，2），顶点坐标为（1，2﹣m），直线 CD 的表达式 $y=-1$，

当 $m>0$ 时，且抛物线过点 D（4，﹣1）时，

$16m-8m+2=-1$，

解得：$m=-\frac{3}{8}$（不符合题意，舍去），

当抛物线经过点（﹣1，﹣1）时，

$m+2m+2=-1$，

解得：$m=-1$（不符合题意，舍去），

当 $m>0$ 且抛物线的顶点在线段 CD 上时，

$2-m=-1$，

解得：m＝3，

当m＜0时，且抛物线过点D（4，－1）时，

16m－8m+2＝－1，

解得：m＝$-\frac{3}{8}$，

当抛物线经过点（－1，－1）时，

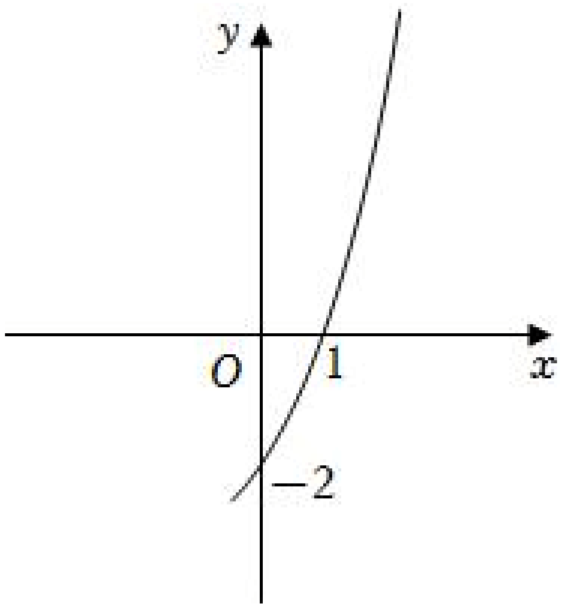
m+2m+2＝－1，

解得：m＝－1，

综上，m的取值范围为m＝3或$-1<m\leqslant-\frac{3}{8}$，

故答案为：m＝3或$-1<m\leqslant-\frac{3}{8}$.

11．（2022•遂宁）抛物线$y=ax^2+bx+c$（a，b，c为常数）的部分图象如图所示，设m＝a－b+c，则m的取值范围是________.



【答案】$-4<m<0$

【解答】解：∵抛物线开口向上，

∴a＞0，

∵抛物线对称轴在y轴左侧，

∴$-\frac{b}{2a}<0$，

∴b＞0，

∵抛物线经过（0，－2），

∴c＝－2，

∵抛物线经过（1，0），

∴a+b+c＝0，

∴$a+b=2$，$b=2-a$，

∴$m=a-b+c=a-(2-a)+(-2)=2a-4$，

∴$y=ax^2+(2-a)x-2$，

当 $x=-1$ 时，$y=a+a-2-2=2a-4$，

∵$b=2-a>0$，

∴$0<a<2$，

∴$-4<2a-4<0$，

故答案为：$-4<m<0$.

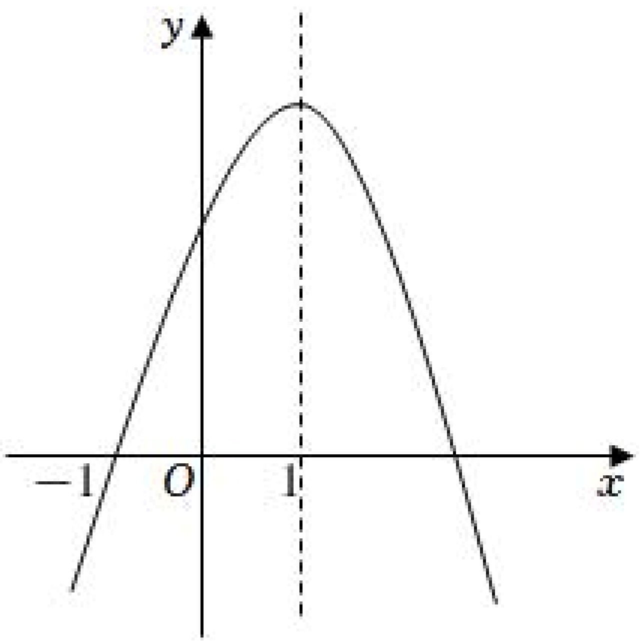
12．（2022•随州）如图，已知开口向下的抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴交于点（-1，0），对称轴为直线 $x=1$．则下列结论正确的有（　　）

① $abc>0$；

② $2a+b=0$；

③ 函数 $y=ax^2+bx+c$ 的最大值为 $-4a$；

④ 若关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=a+1$ 无实数根，则 $-\frac{1}{5}<a<0$.



A．1 个　　B．2 个　　C．3 个　　D．4 个

【答案】C

【解答】解：∵抛物线开口向下，

∴$a<0$，

∵抛物线交 y 轴于正半轴，

∴$c>0$，

∵ $-\frac{b}{2a}>0$，

∴$b>0$，

∴$abc<0$，故① 错误.

∵抛物线的对称轴是直线 $x=1$，

∴$-\frac{b}{2a}=1$，

∴$2a+b=0$，故② 正确.

∵抛物线交 x 轴于点（－1，0），（3，0），

∴可以假设抛物线的解析式为 $y=a(x+1)(x-3)$，

当 $x=1$ 时，y 的值最大，最大值为－4a，故③ 正确.

∵$ax^2+bx+c=a+1$ 无实数根，

∴$a(x+1)(x-3)=a+1$ 无实数根，

∴$ax^2-2ax-4a-1=0$，$\Delta<0$，

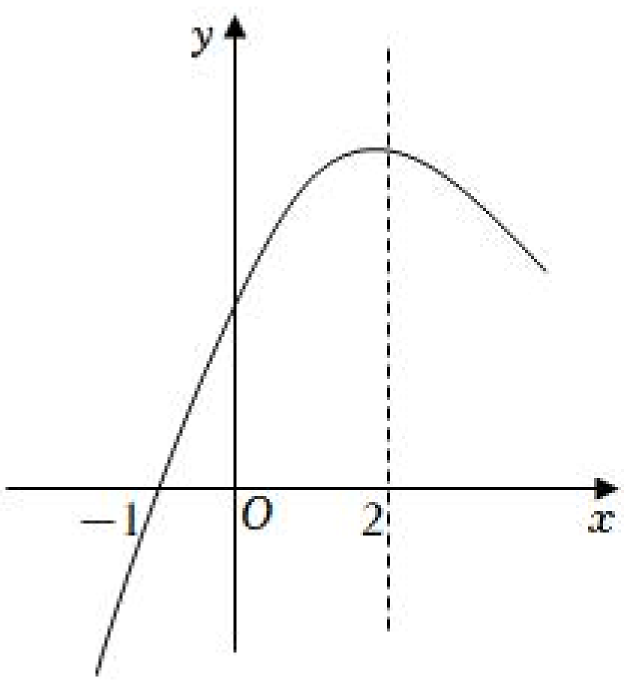
∴$4a^2-4a(-4a-1)<0$，

∴$a(5a+1)<0$，

∴$-\frac{1}{5}<a<0$，故④ 正确，

故选：C．

13．（2022•广元）二次函数 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq0$）的部分图象如图所示，图象过点（－1，0），对称轴为直线 $x=2$，下列结论：（1）$abc<0$；（2）$4a+c>2b$；（3）$3b-2c>0$；（4）若点 A（－2，y_1）、点 B（$-\frac{1}{2}$，y_2）、点 C（$\frac{7}{2}$，y_3）在该函数图象上，则 $y_1<y_3<y_2$；（5）$4a+2b\geq m(am+b)$（m 为常数）．其中正确的结论有（　　）



A．5 个　　　　B．4 个　　　　C．3 个　　　　D．2 个

【答案】C

【解答】解：∵抛物线的开口向下，

∴$a<0$，

∵抛物线的对称轴为直线 $x=-\frac{b}{2a}=2$，

∴$b>0$，

∵抛物线交 y 轴的正半轴，

∴$c>0$，

∴$abc<0$，所以（1）正确；

∵对称轴为直线 $x=2$，

∴ $-\frac{b}{2a}=2$，

∴$b=-4a$，

∴$b+4a=0$，

∴$b=-4a$，

∵经过点（-1，0），

∴$a-b+c=0$，

∴$c=b-a=-4a-a=-5a$，

∴$4a+c-2b=4a-5a+8a=7a$，

∵$a<0$，

∴$4a+c-2b<0$，

∴$4a+c<2b$，故（2）不正确；

∵$3b-2c=-12a+10a=-2a>0$，故（3）正确；

∵$|-2-2|=4$，$|-\frac{1}{2}-2|=\frac{5}{2}$，$|\frac{7}{2}-2|=\frac{3}{2}$，

∴$y_1<y_2<y_3$，故（4）错误；

当 $x=2$ 时，函数有最大值 $4a+2b+c$，

∴$4a+2b+c\geqslant am^2+bm+c$，

$4a+2b\geqslant m(am+b)$（m 为常数），故（5）正确；

综上所述：正确的结论有（1）（3）（5），共 3 个，

故选：C．

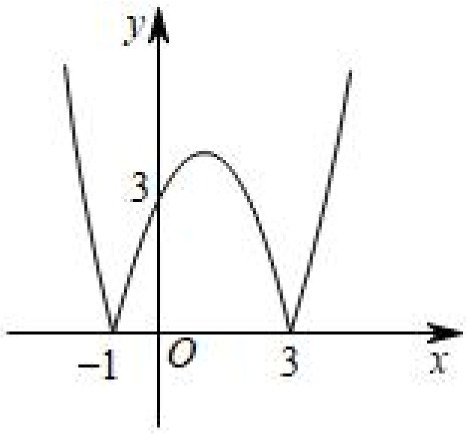
14. （2022•巴中）函数 $y=|ax^2+bx+c|$（$a>0$，$b^2-4ac>0$）的图象是由函数 $y=ax^2+bx+c$（$a>0$，$b^2-4ac>0$）的图象 x 轴上方部分不变，下方部分沿 x 轴向上翻折而成，如图所示，则下列结论正确的是（　　）

① $2a+b=0$；

② $c=3$；

③ $abc>0$；

④ 将图象向上平移 1 个单位后与直线 $y=5$ 有 3 个交点.



A. ①②　　B. ①③　　C. ②③④　　D. ①③④

【答案】D

【解答】解：∵图象经过（-1，0），（3，0），

∴抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的对称轴为直线 $x=1$，

∴ $-\frac{b}{2a}=1$，

∴$b=-2a$，即 $2a+b=0$，① 正确.

由图象可得抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 y 轴交点在 x 轴下方，

∴$c<0$，② 错误.

由抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的开口向上可得 $a>0$，

∴$b=-2a<0$，

∴$abc>0$，③ 正确.

设抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的解析式为 $y=a(x+1)(x-3)$，

代入（0，3）得：$3=-3a$，

解得：$a=-1$，

∴$y=-(x+1)(x-3)=-x^2+2x+3=-(x-1)^2+4$，

∴顶点坐标为（1，4），

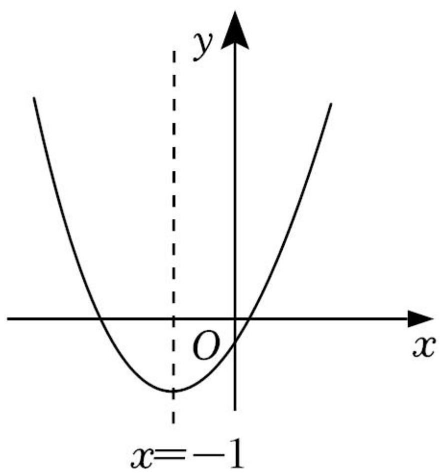
∵点（1，4）向上平移 1 个单位后的坐标为（1，5），

∴将图象向上平移 1 个单位后与直线 $y=5$ 有 3 个交点，故④ 正确；

故选：D．

15．（2022•黄石）已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的部分图象如图所示，对称轴为直线 $x=-1$，有以下结论：

① $abc<0$；② 若 t 为任意实数，则有 $a-bt\leqslant at^2+b$；③ 当图象经过点（1，3）时，方程 $ax^2+bx+c-3=0$ 的两根为 x_1，x_2（$x_1<x_2$），则 $x_1+3x_2=0$，其中，正确结论的个数是（　　）



A．0　　B．1　　C．2　　D．3

【答案】D

【解答】解：∵抛物线开口向上，

∴$a>0$，

∵抛物线的对称轴为直线 $x=-1$，

即 $-\frac{b}{2a}=-1$，

∴$b=2a>0$，

∵抛物线与 y 轴的交点在 x 轴下方，

∴$c<0$，

∴$abc<0$，所以① 正确；

∵$x=-1$ 时，y 有最小值，

∴$a-b+c\leqslant at^2+bt+c$（t 为任意实数），

即 $a-bt\leqslant at^2+b$，所以② 正确；

∵图象经过点（1，3）时，得 $ax^2+bx+c-3=0$ 的两根为 x_1，x_2（$x_1<x_2$），

∴二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 与直线 $y=3$ 的一个交点为（1，3），

∵抛物线的对称轴为直线 $x=-1$，

∴二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 与直线 $y=3$ 的另一个交点为（－3，3），

即 $x_1=-3$，$x_2=1$，

∴$x_1+3x_2=-3+3=0$，所以③ 正确.

故选：D．

16. （2022•济南）抛物线 $y=-x^2+2mx-m^2+2$ 与 y 轴交于点 C，过点 C 作直线 l 垂直于 y 轴，将抛物线在 y 轴右侧的部分沿直线 l 翻折，其余部分保持不变，组成图形 G，点 M（$m-1$，y_1），N（$m+1$，y_2）为图形 G 上两点，若 $y_1<y_2$，则 m 的取值范围是（　　）

A．$m<-1$ 或 $m>0$　B．$-\frac{1}{2}<m<\frac{1}{2}$　C．$0\leqslant m<\sqrt{2}$　D．$-1<m<1$

【答案】D

【解答】解：在 $y=-x^2+2mx-m^2+2$ 中，令 $x=m-1$，得 $y=-(m-1)^2+2m(m-1)-m^2+2=1$，

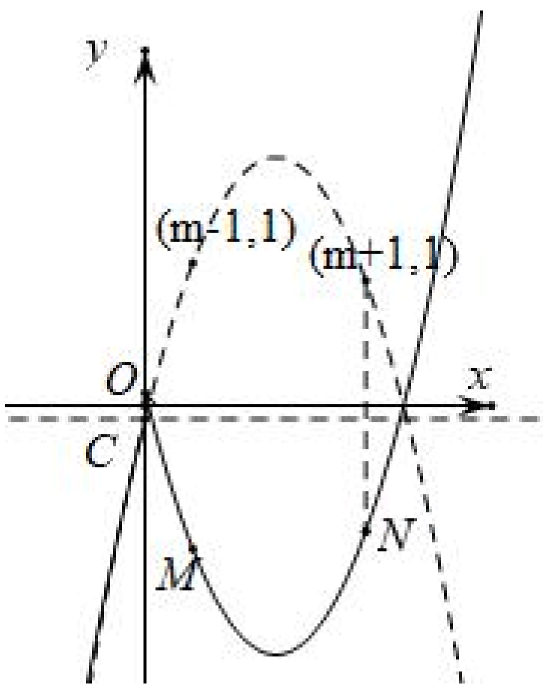
令 $x=m+1$，得 $y=-(m+1)^2+2m(m+1)-m^2+2=1$，

∴（$m-1$，1）和（$m+1$，1）是关于抛物线 $y=-x^2+2mx-m^2+2$ 对称轴对称的两点，

① 若 $m-1\geqslant 0$，即（$m-1$，1）和（$m+1$，1）在 y 轴右侧（包括（$m-1$，1）在 y 轴上），

则点（$m-1$，1）经过翻折得 M（$m-1$，y_1），点（$m+1$，1）经过翻折得 N（$m+1$，y_2），

如图：



由对称性可知，$y_1=y_2$，

∴此时不满足 $y_1<y_2$；

② 当 $m+1\leqslant 0$，即（$m-1$，1）和（$m+1$，1）在 y 轴左侧（包括（$m+1$，1）

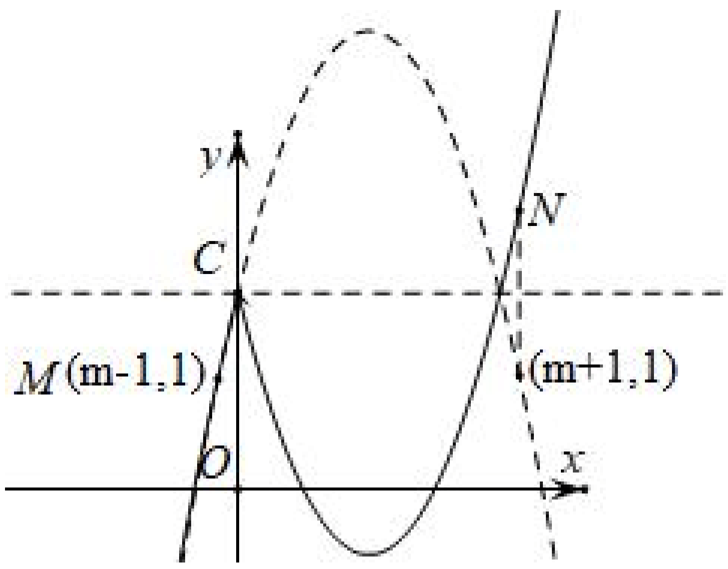
在 y 轴上），

则点（m﹣1，1）即为 M（m﹣1，y_1），点（m+1，1）即为 N（m+1，y_2），

∴$y_1=y_2$，

∴此时不满足 $y_1<y_2$；

③ 当 m﹣1<0<m+1，即（m﹣1，1）在 y 轴左侧，（m+1，1）在 y 轴右侧时，如图：



此时 M（m﹣1，1），（m+1，1）翻折后得 N，满足 $y_1<y_2$；

由 m﹣1<0<m+1 得：﹣1<m<1，

故选：D．

17．（2022•荆门）抛物线 $y=ax^2+bx+c$（a，b，c 为常数）的对称轴为 x=﹣2，过点（1，﹣2）和点（x_0，y_0），且 c>0．有下列结论：① a<0；② 对任意实数 m 都有：$am^2+bm\geqslant 4a-2b$；③ 16a+c>4b；④ 若 $x_0>-4$，则 $y_0>c$．其中正确结论的个数为（　　）

A．1 个　　B．2 个　　C．3 个　　D．4 个

【答案】B

【解答】解：∵抛物线 $y=ax^2+bx+c$（a，b，c 为常数）的对称轴为 x=﹣2，过点（1，﹣2），且 c>0，

∴抛物线开口向下，则 a<0，故① 正确；

∵抛物线开口向下，对称轴为 x=﹣2，

∴函数的最大值为 4a﹣2b+c，

∴对任意实数 m 都有：$am^2+bm+c\leqslant 4a-2b+c$，即 $am^2+bm\leqslant 4a-2b$，故② 错误；

∵对称轴为 x=﹣2，c>0．