

湖南省岳阳市临湘市2025届高三上学期11月期中考试数学试卷

学校：_____ 姓名：_____ 班级：_____ 考号：_____

一、选择题

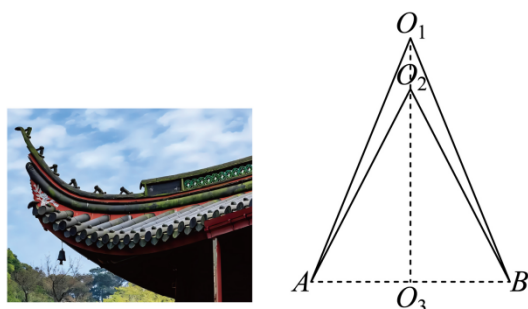
1. 复数 $\frac{2+i}{1-3i}$ 在复平面内对应的点所在的象限为()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

2. 若 $a, b \in \mathbf{R}$, 且 $a > |b|$, 则()

- A. $a < -b$ B. $a > b$ C. $a^2 < b^2$ D. $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

3. 中国古建筑的屋檐下常系挂风铃，风吹铃动，悦耳清脆，亦称惊鸟铃若一个惊鸟铃由铜铸造而成，且可近似看作由一个较大的圆锥挖去一个较小的圆锥，两圆锥的轴在同一条直线上，截面图如下，其中 $O_1O_3 = 20\text{ cm}$ ， $O_1O_2 = 2\text{ cm}$ ， $AB = 16\text{ cm}$ ，若不考虑铃舌，则下列数据比较接近该惊鸟铃质量的是（参考数据： $\pi \approx 3$ ，铜的密度为 8.96 g/cm^3 ）()



- A. 1kg B. 2kg C. 3kg D. 0.5kg

4. 已知 $a > 0, b > 0$, 则“ $a + b > 2$ ”是“ $a^2 + b^2 > 2$ ”的()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

5. 在 $\triangle ABC$ 中， D 为边 BC 上一点， $\angle DAC = \frac{2\pi}{3}$, $AD = 4$, $AB = 2BD$ ，且 $\triangle ADC$ 的面

积为 $4\sqrt{3}$ ，则 $\sin \angle ABD =$ ()

- A. $\frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{8}$ B. $\frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{8}$ C. $\frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{4}$ D. $\frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{4}$

6. 设函数 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right)$ 在区间 $(0, \pi)$ 恰有三个极值点、两个零点，则 ω

的取值范围是()

- A. $\left[\frac{5}{3}, \frac{13}{6}\right)$ B. $\left[\frac{5}{3}, \frac{19}{6}\right)$ C. $\left(\frac{13}{6}, \frac{8}{3}\right]$ D. $\left(\frac{13}{6}, \frac{19}{6}\right]$

7. 直线 l 过双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左顶点 A , 斜率为 $\frac{1}{2}$, 与双曲线的渐近线分别相交于 M, N 两点, 且 $\overrightarrow{3AM} = \overrightarrow{AN}$, 则 E 的离心率为()

- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. $\sqrt{5}$

8. 已知函数 $f(x) = ax + ex - (1 + \ln a)x (a > 0, a \neq 1)$, 对任意 $x_1, x_2 \in [0, 1]$, 不等式

$|f(x_1) - f(x_2)| \leq a \ln a + e^{-4}$ 恒成立, 则 a 的取值范围为()

- A. $\left[\frac{1}{2}, e\right]$ B. $[2, e]$ C. $[e, +\infty)$ D. $(e, +\infty)$

二、多项选择题

9. 已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, $\{b_n\}$ 是等比数列, 则下列说法中正确的是()

- A. 将数列 $\{a_n\}$ 的前 m 项去掉, 其余各项依次构成的数列是等差数列
B. 数列 $a_1 + a_2 + a_3, a_4 + a_5 + a_6, a_7 + a_8 + a_9, \dots$ 是等差数列
C. 将数列 $\{b_n\}$ 的前 m 项去掉, 其余各项依次构成的数列不是等比数列
D. 数列 $b_1b_2, b_2b_3, b_3b_4, b_4b_5, \dots$ 是等比数列

10. 已知函数 $f(x) = a^x$ 和 $g(x) = \log_a x (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$, 若两函数图象相交, 则其交点的个数可能是()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

11. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f(1) = 1$, $f(x+y) = f(x) + f(y) + f(x)f(y)$, 则()

- A. $f(0) = -1$ B. $f(-x)f(x) \leq 0$

- C. $y = \frac{f(x)}{f(x)+2}$ 为奇函数 D. $\sum_{k=1}^5 f\left(\frac{2k-1}{2}\right) < 2^{\frac{11}{2}}$

12. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的可导函数, 其导数为 $g(x)$, 若 $f(3x+1)$ 是奇函数, 且对于任意的 $x \in \mathbf{R}$, $f(4-x) = f(x)$, 则对于任意的 $k \in \mathbf{Z}$, 下列说法正确的是()

- A. $4k$ 都是 $g(x)$ 的周期

B. 曲线 $y = g(x)$ 关于点 $(2k, 0)$ 对称

C. 曲线 $y = g(x)$ 关于直线 $x = 2k + 1$ 对称

D. $g(x + 4k)$ 都是偶函数

三、填空题

13. 已知 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\sin(\alpha - \beta) = -\frac{\sqrt{10}}{10}$, α, β 均为锐角, 则 $\beta =$ _____.

14. 现有7张卡片, 分别写上数字1, 2, 2, 3, 4, 5, 6. 从这7张卡片中随机抽取3张, 记所抽取卡片上数字的最小值为 ξ , 则 $P(\xi = 2) =$ _____.

15. 设函数 $f(x) = (x + a)\ln(x + b)$, 若 $f(x) \geq 0$ 恒成立, 则 $a^2 + b^2$ 的最小值为 _____.

16. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 3x, & 0 \leq x \leq 1, \\ \ln x, & x > 1, \end{cases}$ 若存在实数 x_1, x_2 满足 $0 \leq x_1 < x_2$, 且 $f(x_1) = f(x_2)$, 则 $x_2 - 6x_1$ 的取值范围为 _____.

四、解答题

17. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , D 是 AC 边上的一点, 且满足

$$CD = 2AD, \text{ 若 } c = 3, BD = \sqrt{19}, \frac{b}{2c - a} = \frac{\cos B}{\cos A}.$$

(1) 求 B ;

(2) 求三角形 ABC 的面积

18. 已知向量 $\vec{a} = (\sqrt{3} \sin x, \cos x)$, $\vec{b} = (\cos x, -\cos x)$, 函数 $f(x) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{3}{2}$.

(1) 求函数 $y = f(x)$ 的最小正周期;

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $\angle ACB$ 的角平分线交 AB 于点 D , 若 $f(C)$ 恰好为函数 $f(x)$ 的最大值, 且此时 $CD = f(C)$, 求 $3a + 4b$ 的最小值

19. 已知函数 $f(x) = xe^x - x$.

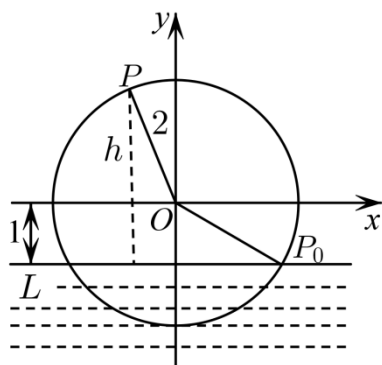
(1) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;

(2) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(3) 设 $t > 0$, 若 $f(e^s) \geq f(s^{\frac{1}{t}})$ 对于 $s \in (0, +\infty)$ 恒成立, 求 t 的最小值

20. 一个半径为2米的水轮如图所示, 水轮圆心 O 距离水面1

米已知水轮按逆时针作匀速转动，每6秒转一圈，如果当水轮上点 P 从水中浮现时（图中点 P_0 ）开始计算时间



(1)以过点 O 且平行于水轮所在平面与水面的交线 L 的直线为 x 轴，以过点 O 且与水面垂直的直线为 y 轴，建立如图所示的直角坐标系，试将点 P 距离水面的高度 h （单位：米）表示为时间 t （单位：秒）的函数；

(2)在水轮转动的任意一圈内，有多长时间点 P 距离水面的高度不低于2米？

21. 已知椭圆 C 的标准方程 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ ，其左右焦点分别为 F_1, F_2 .

(1)过点 $H(-2, 0)$ 的直线交椭圆 C 于 A, B 两点，若 $AF_1 \perp BF_1$ ，求直线 AB 的方程；

(2)直线 l_1, l_2 过右焦点 F_2 ，且它们的斜率乘积为 $-\frac{1}{2}$ ，设 l_1, l_2 分别与椭圆交于点 C, D 和 E, F .若 M, N 分别是线段 CD 和 EF 的中点，证直线 MN 过定点，并求 $\triangle OMN$ 面积的最大值

22. 多元导数在微积分学中有重要的应用设 y 是由 $a, b, c \dots$ 等多个自变量唯一确定的因变量，则当 a 变化为 $a + \Delta a$ 时， y 变化为 $y + \Delta y$ ，记 $\lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta a}$ 为 y 对 a 的导数，其符号为

$\frac{dy}{da}$.和一般导数一样，若在 (a_1, a_2) 上，已知 $\frac{dy}{da} > 0$ ，则 y 随着 a 的增大而增大；反之，

已知 $\frac{dy}{da} < 0$ ，则 y 随着 a 的增大而减小多元导数除满足一般分式的运算性质外，还具有

下列性质：①可加性： $\frac{d(y_1 + y_2)}{da} = \frac{dy_1}{da} + \frac{dy_2}{da}$ ；②乘法法则： $\frac{d(y_1 y_2)}{da} = y_2 \frac{dy_1}{da} + y_1 \frac{dy_2}{da}$

；③除法法则： $\frac{d\left(\frac{y_1}{y_2}\right)}{da} = \frac{\left(y_2 \frac{dy_1}{da} - y_1 \frac{dy_2}{da}\right)}{y_2^2}$ ；④复合法则： $\frac{dy_2}{da} = \frac{dy_2}{dy_1} \cdot \frac{dy_1}{da}$.记

$$y = e^x + \frac{1}{e}x^2 \ln x - \frac{1}{2e}x^2 - ex - a. \quad (e = 2.7182818\text{L 为自然对数的底数}),$$

(1) 写出 $\frac{dy}{dx}$ 和 $\frac{dy}{da}$ 的表达式;

(2) 已知方程 $y = 0$ 有两实根 x_1, x_2 , $x_1 < x_2$.

① 求出 a 的取值范围;

② 证明 $\frac{d(x_1 + x_2)}{da} > 0$, 并写出 $x_1 + x_2$ 随 a 的变化趋势

参考答案

1. 答案: B

解析: 因为 $\frac{2+i}{1-3i} = \frac{(2+i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)} = -\frac{1}{10} + \frac{7}{10}i$,

其在复平面内对应的点为 $\left(-\frac{1}{10}, \frac{7}{10}\right)$, 位于第二象限.

故选: B.

2. 答案: B

解析: 由 $a > |b|$ 得, 当 $b \geq 0$ 时, $a > b$, 此时 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$, $a^2 > b^2$, 故 CD 错误,

当 $b < 0$ 时, $a > -b > b$, 此时 A 错误,

综上所述, 当 $a > |b|$ 时, 则 $a > b$ 成立, 故 B 正确,

故选: B.

3. 答案: A

解析: 由题意可得惊鸟铃的体积约为长 $\frac{1}{3} \times \pi \times 8^2 \times 20 - \frac{1}{3} \times \pi \times 8^2 \times 18 = 128(\text{cm}^3)$,

所以该惊鸟铃的质量约为 $128 \times 8.96 = 1146.88(\text{g}) \approx 1(\text{kg})$.

故选: A.

4. 答案: A

解析: 若 $a > 0, b > 0, a + b > 2$, 则 $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}(a + b)^2 > 2$, 充分性成立;

若 $a^2 + b^2 > 2$, 可能 $a = \sqrt{2}, b = 0.1$, 此时 $a + b < 2$, 所以必要性不成立.

综上所述, “ $a + b > 2$ ”是“ $a^2 + b^2 > 2$ ”的充分不必要条件.

故选: A.

5. 答案: A

解析: 因为 $S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} AD \cdot AC \sin \angle DAC = \frac{1}{2} \times 4 \times AC \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$

解得 $AC = 4$,

所以 $\triangle ADC$ 为等腰三角形, 则 $\angle ADC = \frac{\pi}{6}$,

在 $\triangle ADB$ 中由正弦定理可得 $\frac{AB}{\sin \angle ADB} = \frac{DB}{\sin \angle BAD}$

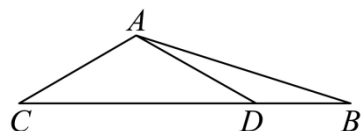
$$\text{即 } \frac{2DB}{\frac{1}{2}} = \frac{DB}{\sin \angle BAD}, \text{ 解得 } \sin \angle BAD = \frac{1}{4},$$

因为 $\angle ADB = \frac{5\pi}{6}$, 所以 $\angle BAD$ 为锐角

$$\text{所以 } \cos \angle BAD = \sqrt{1 - \sin^2 \angle BAD} = \frac{\sqrt{15}}{4},$$

$$\text{所以 } \sin \angle ABD = \sin(\angle ADC - \angle BAD) = \sin\left(\frac{\pi}{6} - \angle BAD\right)$$

$$= \sin \frac{\pi}{6} \cos \angle BAD - \cos \frac{\pi}{6} \sin \angle BAD = \frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{8}.$$



故选: A

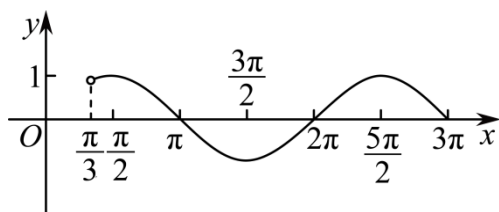
6. 答案: C

解析: 依题意可得 $\omega > 0$, 因为 $x \in (0, \pi)$

$$\text{所以 } \omega x + \frac{\pi}{3} \in \left(\frac{\pi}{3}, \omega\pi + \frac{\pi}{3}\right),$$

要使函数在区间 $(0, \pi)$ 恰有三个极值点、两个零点

又 $y = \sin x$, $x \in \left(\frac{\pi}{3}, 3\pi\right)$ 的图像如下所示:



$$\text{则 } \frac{5\pi}{2} < \omega\pi + \frac{\pi}{3} \leq 3\pi$$

$$\text{解得 } \frac{13}{6} < \omega \leq \frac{8}{3}$$

$$\text{即 } \omega \in \left(\frac{13}{6}, \frac{8}{3}\right].$$

故选：C

7. 答案：A

解析：由题意得直线 l 为 $y = \frac{1}{2}(x+a)$

双曲线的渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x$,

$$\text{由} \begin{cases} y = \frac{1}{2}(x+a) \\ y = -\frac{b}{a}x \end{cases}$$

$$\text{得 } y = \frac{ab}{a+2b}, \text{ 即 } y_M = \frac{ab}{a+2b},$$

$$\text{由} \begin{cases} y = \frac{1}{2}(x+a) \\ y = \frac{b}{a}x \end{cases}$$

$$\text{得 } y = \frac{ab}{2b-a}, \text{ 即 } y_N = \frac{ab}{2b-a},$$

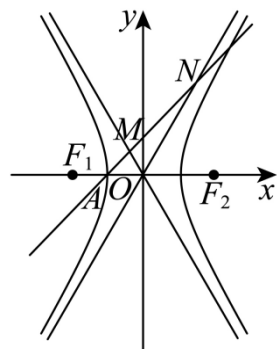
因为 $\overline{3AM} = \overline{AN}$, 所以 $y_N = 3y_M$,

$$\text{所以 } \frac{ab}{2b-a} = \frac{3ab}{a+2b}, \text{ 化简得 } a=b,$$

$$\text{所以 } c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2}a,$$

$$\text{所以双曲线的离心率为 } e = \frac{c}{a} = \sqrt{2}.$$

故选：A



8. 答案：C

解析：依题意， $a \ln a + e - 4 \geq 0$ ①

因为 $f'(x) = a^x \ln a + e^x - 1 - \ln a = (a^x - 1) \ln a + e^x - 1$,

当 $a > 1$ 时, 对任意的 $x \in [0, 1]$, $a^x - 1 \geq 0$, $\ln a > 0$, $e^x - 1 \geq 0$, 恒有 $f'(x) > 0$;

当 $0 < a < 1$ 时, $x \in [0, 1]$, $a^x - 1 \leq 0$, $\ln a < 0$, $e^x - 1 \geq 0$, 恒有 $f'(x) > 0$;

所以 $f(x)$ 在 $x \in [0, 1]$ 是单调递增函数

那么对任意的 $x_1, x_2 \in [0, 1]$

不等式 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq a \ln a + e - 4$ 恒成立,

只需 $f(x)_{\max} - f(x)_{\min} \leq a \ln a + e - 4$, ②

因为 $f(x)_{\max} = f(1) = a + e - 1 - \ln a$

$f(x)_{\min} = f(0) = 1 + 1 = 2$,

所以 $a + e - 1 - \ln a - 2 \leq a \ln a + e - 4$

即 $a - \ln a + 1 - a \ln a \leq 0$

即 $(1 + a)(1 - \ln a) \leq 0$,

所以 $\ln a \geq 1$, 从而有 $a \geq e$

而当 $a \geq e$ 时, ①显然成立

故选:C

9. 答案: ABD

解析: 对于A: 设 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 将数列 $\{a_n\}$ 的前 m 项去掉

其余各项依次为 $a_{m+1}, a_{m+2}, \dots, a_{m+n}$, 则 $a_{m+n} - a_{m+n-1} = d$

故构成的数列依然是等差数列, 正确;

对于B: 因为数列 $\{a_n\}$ 是等差数列

所以数列 $a_1 + a_2 + a_3 = 3a_1 + 3d$, $a_4 + a_5 + a_6 = 3a_1 + 12d$,

$a_7 + a_8 + a_9 = 3a_1 + 21d$, $\dots$, $a_{3n-2} + a_{3n-1} + a_{3n} = 3a_1 + (9n-6)d$

所以构成公差为 $9d$ 的等差数列, 正确;

对于C: 设 $\{b_n\}$ 的公比为 q , 等比数列去掉前 m 项后, 其余各项依次为 $b_{m+1}, b_{m+2}, \dots, b_{m+n}$

$$\frac{b_{m+n}}{b_{m+n-1}} = q$$

所以依然构成等比数列, 错误;

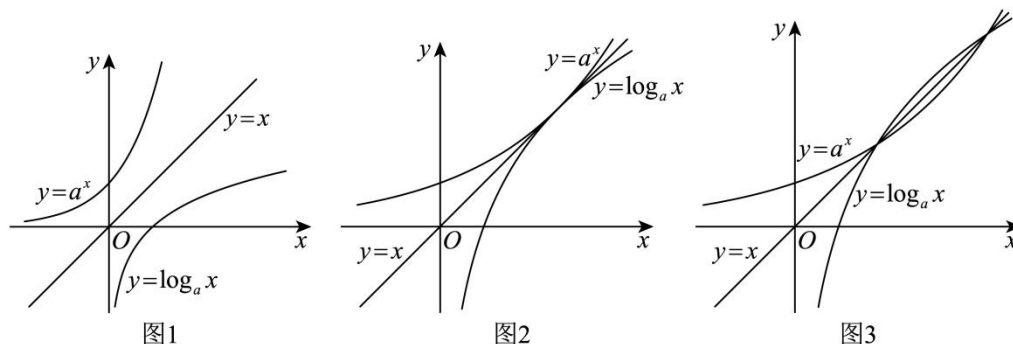
对于D: 设 $\{b_n\}$ 公比为 q , 所以 $\frac{b_{n+1}b_{n+2}}{b_nb_{n+1}} = q^2$

故数列 $b_1b_2, b_2b_3, b_3b_4, b_4b_5, \dots$ 是等比数列, 正确

故选: ABD

10. 答案: ABC

解析: (一) 当 $a > 1$ 时, 函数 $y = a^x$ 和 $y = \log_a x$ 的图像呈现以下三种情况:



如图2, 当函数 $y = a^x$ 和 $y = \log_a x$ 的图像只有一个公共点 (x_0, y_0) 时

此公共点必在直线 $y = x$ 上

且函数图像在此公共点的切线即为直线 $y = x$, $f'(x) = a^x \ln a$,

$$\text{所以有} \begin{cases} a^{x_0} = x_0 \\ a^{x_0} \ln a = 1 \end{cases}$$

$$\text{则 } x_0 \ln a = \ln a^{x_0} = 1, \quad a^{x_0} = e$$

$$\text{所以} \begin{cases} a = e^{\frac{1}{e}} \\ x_0 = e \end{cases}$$

即公共点为 (e, e) ,

结合图像有以下结论:

(1) 当 $a > e^{\frac{1}{e}}$ 时, 函数 $y = a^x$ 和 $y = \log_a x$ 的图像没有公共点 (如图1);

(2) 当 $a = e^{\frac{1}{e}}$ 函数 $y = a^x$ 和 $y = \log_a x$ 的图像只有一个公共点 (如图2);

(3) 当 $1 < a < e^{\frac{1}{e}}$ 函数 $y = a^x$ 和 $y = \log_a x$ 的图像有两个公共点 (如图3).

(二) 当 $0 < a < 1$ 时, 函数 $y = a^x$ 和 $y = \log_a x$ 的图像呈现以下三种情况 (把图像适当放大):

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/257036034026010005>