专题 12　三角函数与解三角形大题归类

题型盘点·直击高考

目录

题型突围·精准提分

题型一：图像求解析式及性质

指｜点｜迷｜津

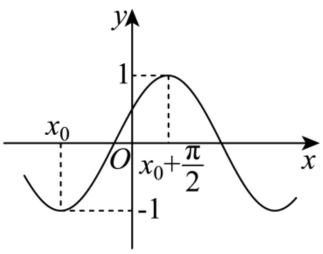
已知 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0，\omega>0)$ 的部分图象求其解析式时

A 比较容易看图得出，困难的是求待定系数 ω 和 φ，常用如下两种方法：

(1)由 $\omega=\dfrac{2\pi}{T}$ 即可求出 ω；确定 φ 时，若能求出离原点最近的右侧图象上升(或下降)的“零点”横坐标 x_0，则令 $\omega x_0+\varphi=0$ (或 $\omega x_0+\varphi=\pi$)，即可求出 φ.

(2)代入点的坐标，利用一些已知点(最高点、最低点或“零点”)坐标代入解析式，再结合图形解出 ω 和 φ，若对 A，ω 的符号或对 φ 的范围有要求，则可用诱导公式变换使其符合要求.

1.（2024·北京东城·二模）已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的部分图象如图所示.



(1)求 ω 的值；

(2)从下列三个条件中选择一个作为已知，使函数 $f(x)$ 存在，并求函数 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值和最小值.

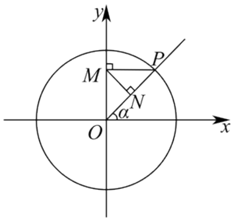
条件①：函数 $f\left(x+\frac{5\pi}{12}\right)$ 是奇函数；

条件②：将函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度后得到 $y=\sin\omega x$ 的图象；

条件③：$f(0)=f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

注：如果选择的条件不符合要求，第（2）问得 0 分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分.

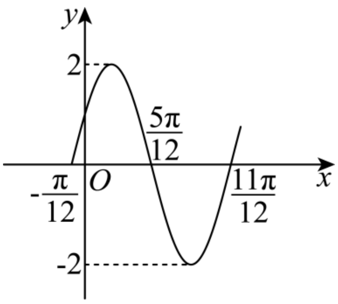
2.（2024·甘肃·一模）如图，角 $\alpha\left(\alpha\in\mathbf{R}\right)$ 的始边为 x 轴非负半轴，终边与单位圆交于点 P，过点 P 作 y 轴的垂线，垂足为 M，M 到直线 OP 的距离为 $|MN|$.若将 $|MN|$ 关于角 α 的函数关系记为 $y=f(x)$.



(1)求 $y=f(x)$ 的解析式；

(2)将 $f(x)$ 图象上所有点的横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$（纵坐标不变），再将所得图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，得到函数 $g(x)$ 的图象，求 $g(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 的单调递增区间.

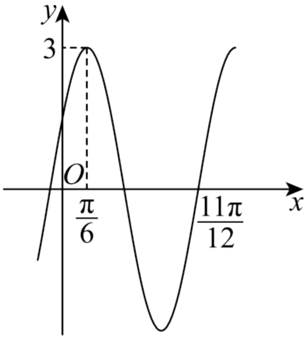
3.（23-24 高三上·安徽·阶段练习）函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的部分图象如图所示.



(1)求函数 $y=f(x)$ 的解析式；

(2)将函数 $y=f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位，再将所得图象上各点的横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$ 倍，纵坐标不变，得到函数 $y=g(x)$ 的图象，求函数 $g(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上的值域.

4．（2023·山西·模拟预测）已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,0<\varphi<\pi)$ 的部分图象如图所示.



(1)求 $f(x)$ 的解析式；

(2)将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，得到函数 $g(x)$ 的图象，求 $g(x)$ 在 $\left[-\frac{7\pi}{12},-\frac{\pi}{12}\right]$ 上的值域.

题型二：“零点”求参

指｜点｜迷｜津

零点处，令 sin(ωx＋φ）＝0，ωx＋φ＝kπ(k∈Z)，或者 cos(ωx＋φ）＝0，ωx＋φ＝$\frac{\pi}{2}$++kπ 可求得对称中心的横坐标；

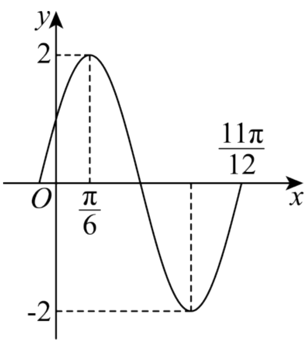
正弦“第一零点”：$x=2k\pi$；

正弦“第二零点”：$x=\pi+2k\pi$

余弦“第一零点”：$x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$；

余弦“第二零点”：$x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$

1．（23-24 广东深圳·阶段练习）函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的部分图象如图所示.



(1)求函数 $f(x)$ 的解析式；

(2)将函数 $f(x)$ 的图象先向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位，再将所有点的横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$（纵坐标不变），得到函数 $g(x)$ 的图象，求 $g(x)$ 在 $x\in\left[-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{6}\right]$ 上的最大值和最小值；

(3)若关于 x 的方程 $g(x)-m=0$ 在 $x\in\left[-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{6}\right]$ 上有两个不等实根，求实数 m 的取值范围.

2．（2024·广东广州·模拟预测）已知函数 $f\left(x\right)=2\sin x\cos x-2\sqrt{3}\sin^{2}x+\sqrt{3}$．

(1)若 $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$时，$m<f\left(x\right)$恒成立，求实数$m$的取值范围；

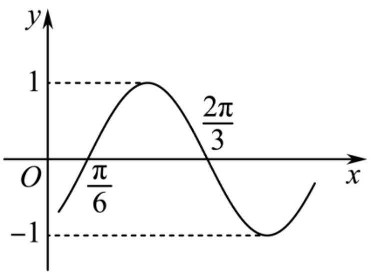
(2)将函数$f\left(x\right)$的图象的横坐标缩小为原来的$\frac{1}{2}$，纵坐标不变，再将其向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位，得到函数$g\left(x\right)$的图象.若$x\in\left[0,t\right]$，函数$g\left(x\right)$有且仅有 4 个零点，求实数t的取值范围.

3．（23-24·安徽蚌埠·期末）已知函数 $f\left(x\right)=\sqrt{3}\sin 2x+2\cos^{2}x+2$．

(1)求$f\left(x\right)$的单调递减区间；

(2)将$y=f(x)$的图象上的各点纵坐标保持不变，横坐标伸长到原来的 2 倍，再向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位得到$y=g(x)$的图象，当$x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right]$时，方程$g\left(x\right)=m$有解，求实数$m$的取值范围.

4．（2023·安徽亳州·模拟预测）已知函数$f\left(x\right)=A\sin\left(\omega x+\varphi\right)\left(A>0,\omega>0,\left|\varphi\right|<\frac{\pi}{2}\right)$的部分图象如图所示.



(1)求函数$f\left(x\right)$的解析式；

(2)将函数$f\left(x\right)$的图象向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位，得到函数$g\left(x\right)$的图象，若方程$g\left(x\right)+k\left(\sin x+\cos x\right)+2=0$在$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上有解，求实数$k$的取值范围.

题型三：“零点”和型性质

指 | 点 | 迷 | 津

零点求和型，多利用三角函数对称轴对称性求解

对称性： 换元思想，将 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$中的“$\omega x+\varphi$”看成 $y=\sin x$ 中的“x”，采用整体代入求解．

对称轴：最值处，令 $\sin(\omega x+\varphi)=1$，则 $\omega x+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，可求得对称轴方程；

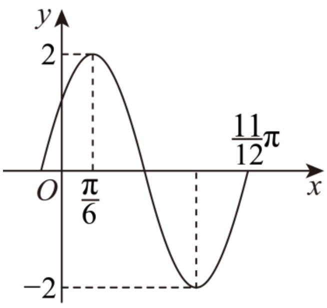
1．（21-22 广东佛山·阶段练习）已知数 $f(x)=\sqrt{3}\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)+2\sin^2\left(\frac{\omega x}{2}+\frac{\pi}{12}\right)-1(\omega>0)$ 的相邻两对称轴间的距离为 $\frac{\pi}{2}$.

(1)求 $f(x)$ 的解析式；

(2)将函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，再把各点的横坐标缩小为原来的 $\frac{1}{2}$（纵坐标不变），得到函数 $y=g(x)$ 的图象，当 $x\in\left[-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{6}\right]$时，求函数 $g(x)$ 的值域；

(3)对于第（2）问中的函数 $g(x)$，记方程 $g(x)=\frac{4}{3}$ 在 $x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{4\pi}{3}\right]$上的根从小到大依次为 $x_1,x_2,\cdots x_n$，若 $m=x_1+2x_2+2x_3+\cdots+2x_{n-1}+x_n$，试求 n 与 m 的值.

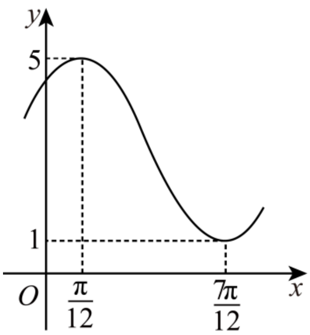
2．（22-23 江西萍乡·期中）函数 $f\left(x\right)=A\sin\left(\omega x+\varphi\right)\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$的部分图象如图所示.



(1)求函数 $f\left(x\right)$ 的解析式；

(2)将函数 $f\left(x\right)$ 的图象先向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位，再将所有点的横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$（纵坐标不变），得到函数 $g\left(x\right)$的图象，若关于 x 的方程 $g\left(x\right)-m=0$ 在 $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上有两个不等实根 x_1,x_2，求实数 m 的取值范围，并求 $g\left(x_1+x_2\right)$ 的值.

3．（2023·陕西安康·一模）已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)+B\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$的部分图象如图所示.



(1)求函数 $f(x)$ 的解析式；

(2)将函数 $y=f(x)$ 图象上所有的点向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度，再将所得图象上每一个点的横坐标变为原来的 2 倍（纵坐标不变），得到函数 $y=g(x)$ 的图象.当 $x\in\left[0,\frac{13\pi}{6}\right]$ 时，方程 $g(x)-a=0$ 恰有三个不相等的实数根，$x_1,x_2,x_3\left(x_1<x_2<x_3\right)$，求实数 a 的取值范围以及 $x_1+2x_2+x_3$ 的值.

4．（23-24 高三上·吉林白城·阶段练习）已知函数 $f\left(x\right)=\sqrt{3}\sin\left(\omega x+\varphi\right)+1-2\cos^2\left(\frac{\omega x+\varphi}{2}\right)\left(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 为奇函数，且 $f\left(x\right)$ 图象的相邻两条对称轴间的距离为 $\frac{\pi}{2}$.

(1)求 $f\left(x\right)$ 的解析式与单调递减区间；

(2)将函数 $f\left(x\right)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，再把横坐标缩小为原来的 $\frac{1}{2}$（纵坐标不变），得到函数 $y=g\left(x\right)$ 的图象，当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，求方程 $2g^2\left(x\right)+\sqrt{3}g\left(x\right)-3=0$ 的所有根的和.

题型四：解三角形：正弦定理边化角型求角

指 | 点 | 迷 | 津

对于 sin（$\alpha+\beta$）与 cos（$\alpha+\beta$） 简称为“**正余余正，余余正正**”

恒等变形和化简求角中，有如下经验：

1、SinC=Sin(A+B)=sinAcosB+cosAsinB:正用。逆用：见 A 与 B 的正余或者余正，不够，找 sinC 拆

2、边的齐次式，正弦定理转为角的正弦；

3、cosC=-cos(A+B)=-[cosAcosB-sinAsinC]

1．（2024·陕西安康·模拟预测）在 $\triangle ABC$ 中，内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，且

$a\left(\sin A-\cos C\sin B\right)-c\left(\cos A\sin B-\sin C\right)=\frac{3}{2}a\sin C$

(1)求 $\cos B$；

(2)设 D 为边 AC 的中点， $AC=2$，求线段 BD 长度的最大值.

2.（2024·四川南充·模拟预测）在$\triangle ABC$中，$\frac{\sin C}{\sin A+\sin B}=\frac{\sin A-\sin B}{\sin B+\sin C}$.

(1)求 A；

(2)若 $BC=3$，求$\triangle ABC$周长的最大值.

3.（2024·辽宁沈阳·模拟预测）在$\triangle ABC$中，内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，且 $\frac{\sin^2 C-\sin C\sin B}{\cos^2 B-\cos^2 A}=1$.

(1)求角 A 的大小；

(2)若$\triangle ABC$为锐角三角形，点 F 为$\triangle ABC$的垂心， $AF=6$，求 $CF+BF$ 的取值范围.

4.（23-24·天津·阶段练习）在$\triangle ABC$中，内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c， 已知 $\frac{\cos A-2\cos C}{\cos B}=\frac{2c-a}{b}$.

(1)求 $\frac{\sin C}{\sin A}$ 的值；(2)若 $\cos B=\frac{1}{4},b=2$.

（i）求$\triangle ABC$的面积；（ii）求 $\sin\left(2B+\frac{\pi}{6}\right)$ 的值.

题型五：解三角形：角化边型余弦定理求角

指 | 点 | 迷 | 津

余弦定理：

1.若式子含有 a,b,c 的 2 次齐次式，优先考虑余弦定理，“角化边”

2.面积和 a,b,c 2 次齐次式，可构造余弦定理

1.（2025·广东·一模）在$\triangle ABC$中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c， 已知 $\cos 2B-\cos 2A=2\sin^2 C-2\sin B\sin C$

(1)求 A；

(2)若 $b=2$，$c=3$，P，Q 分别为边 a，b 上的中点，G 为 $\triangle ABC$ 的重心，求 $\angle PGQ$ 的余弦值.

2.（23-24·陕西咸阳·阶段练习）在$\triangle ABC$中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $\left(\cos B+\cos A\right)\left(\cos B-\cos A\right)=\sin C\left(\sin C-\sqrt{2}\sin B\right)$.

(1)求角 A 的大小；

(2)若 $a=3\sqrt{2}$， $b+c=6$，求$\triangle ABC$的面积；

(3)若 $c=\sqrt{2}$， $a=\sqrt{5}$，D 为 BC 的中点，求 AD 的长.

3．（2024·江西·模拟预测）$\vee ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 b 是 a，c 的等比中项.
(1)求 B 的最大值：
(2)若 C 为钝角，求 $\dfrac{a\cos B+b\cos A}{b\cos C+c\cos B}$ 的取值范围.

4．（2024·江苏盐城·模拟预测）在$\vee ABC$ 中，已知角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，$a\sin^2\dfrac{B}{2}+b\sin^2\dfrac{A}{2}=\dfrac{3ab}{2(a+b+c)}$.
(1)求角 C 的大小；
(2)若$\vee ABC$ 为锐角三角形，求 $\dfrac{a+b}{c}$ 的取值范围.

题型六：最值：不对称型最值

指 | 点 | 迷 | 津

非对称型结构
结构特征：$pa+tb+mc$
“非齐次或者不对称结构”，用正弦定理消角化一，角度范围是否受限，是关键计算点

1．（13-14 高三下·山东东营·阶段练习）在$\vee ABC$ 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，且满足 $\cos 2A-\cos 2B=2\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-A\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+A\right)$.
(1)求角 B 的值；
(2)若 $b=\sqrt{3}$ 且 $b\le a$，求 $a-\dfrac{c}{2}$ 的取值范围.

2．（2024·广东湛江·一模）已知在$\vee ABC$ 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $a\cos(B-C)+a\cos A-2\sqrt{3}c\sin B\cos A=0$.
(1)求 A；
(2)若$\vee ABC$ 外接圆的直径为 $2\sqrt{3}$，求 $2c-b$ 的取值范围.

3．（22-23 河南省直辖县级单位）已知$\vee ABC$ 为锐角三角形，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，且 $\left(b^2+c^2-a^2\right)\tan A=\sqrt{3}bc$.
(1)求角 A 的大小；
(2)若 $a=\sqrt{6}$，求 $2b-c$ 的取值范围.

4．（2021·江苏南通·一模）在①$2\sin A-\sin B=2\sin C\cos B$，②$(a+c)(\sin A-\sin C)=\sin B(a-b)$，③$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}c(a\sin A+b\sin B-c\sin C)$这三个条件中任选一个，补充到下面的问题中并作答．

问题：在ΔABC中，角A，B，C的对边分别为a，b，c，且____．

(1)求角C；

(2)若$c=2$，求$2a-b$的取值范围．

题型七：最值：比值型最值

指 | 点 | 迷 | 津

最值范围：分式比值型

化边为角型

1. 通过正余弦定理，把边转化为角。
2. 利用特殊角，消角，以分母角度为住元，消去分子角度，转化为分母角度的单变量函数形式
3. 对单变量（单角）求最值。

1．（2023·全国·模拟预测）已知$\triangle ABC$的内角A,B,C所对的边分别为$a,b,c,b\sin A=\sqrt{3}(c-a\cos B)$．

(1)求角A的大小；

(2)求$\frac{\sin^2 A}{\sin^2 B+\sin^2 C}$的最小值．

2．（2023·全国·模拟预测）在$\triangle ABC$中，内角A，B，C所对的边分别为a，b，c，设$\triangle ABC$的面积为S，$3a^2=\lambda b^2+c^2$．

(1)当$\lambda=0$时，若$B=\frac{\pi}{6}$，求角A；

(2)当$\lambda=2$时，求$\frac{S}{b^2+2c^2}$的最大值．

3．（2023·浙江·模拟预测）已知$\triangle ABC$中，内角A,B,C所对的边分别为a,b,c，且满足$\frac{\sin A}{\sin B+\sin C}=\frac{c-b}{b}$．

(1)若$C=\frac{\pi}{3}$，求B；

(2)求$\frac{a+c}{b}$的取值范围．

4．（22-23 安徽六安 ）从条件①$b-c\cos A=a\left(\sqrt{3}\sin C-1\right)$；②$\sin\left(A+B\right)\cos\left(C-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{4}$中任选一个，补充在下面问题中，并加以解答.在$\triangle ABC$中：内角$A,B,C$的对边分别为$a,b,c$，______.

(1)求角C的大小；

(2)设D为边AB的中点，求$\frac{CD^2}{a^2+b^2}$的最大值.

题型八：最值：三角函数角度型最值

指 | 点 | 迷 | 津

锐钝角限制型

注意锐角三角形，或者钝角三角形对角的范围的限制，如果有这样限制，要对每个角都要用不等式范围求解

1．（2023·安徽·二模）在$\triangle ABC$中，$\sin^2 A+3\sin^2 C=3\sin^2 B$.

(1)若$\sin B\cos C=\frac{2}{3}$，判断$\triangle ABC$的形状；

(2)求$\tan(B-C)$的最大值.

2．（2023·陕西榆林·三模）已知a,b,c分别为$\triangle ABC$的内角A,B,C所对的边，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=4$，且$ac\sin B=8\sin A$.

(1)求A；

(2)求$\sin A\sin B\sin C$的取值范围.

3．（2023·浙江嘉兴·二模）在$\triangle ABC$中，角A,B,C所对的边分别是a,b,c.已知$b+c=2a\cos B$.

(1)若$B=\frac{\pi}{12}$，求A；

(2)求$\frac{\left(b+c+a\right)\left(b+c-a\right)}{ac}$的取值范围.

4．（2023·云南红河·二模）记$\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知$2\sin B=\sin A+\sin C$.

(1)证明：$0<B\le\frac{\pi}{3}$；

(2)求$\sin B\cdot\cos 2B$的最大值.