

6.2 空间向量的坐标表示

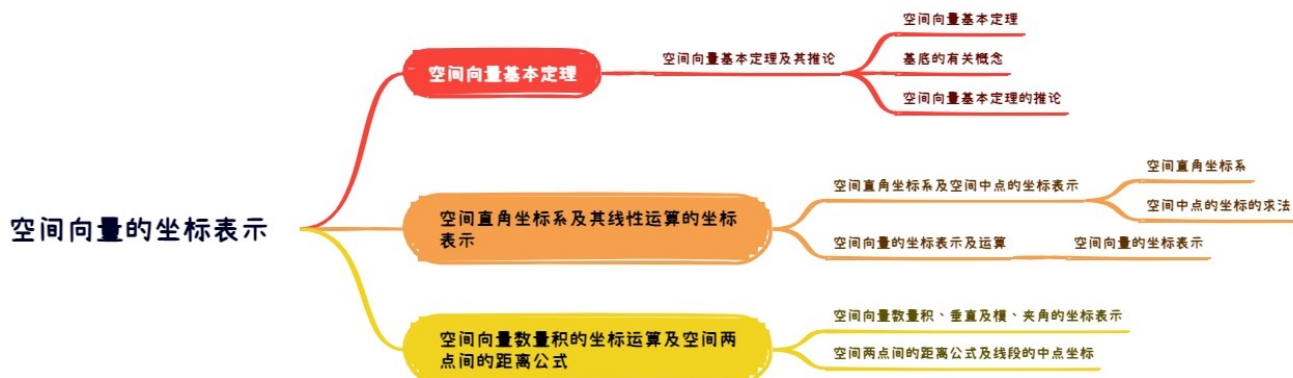
01

学习目标

课程标准	学习目标
(1) 能利用单位正交基的概念,从向量的角度理解平面直角坐标系,会利用空间向量基本定理和空间单位正交基底建立空间直角坐标系. (2) 能借助空间直角坐标系和空间向量基本定理建立空间中点、向量与三维有序实数组 (x, y, z) 之间的一一对应关系,能建立空间向量坐标与点的坐标的联系,并能用坐标表示空间中的点和向量. (3) 能用坐标表示空间向量的线性运算(加法、减法、数乘)和数量积运算;会用向量的坐标运算表示两个向量的平行、垂直的位置关系,会表示空间向量的模长公式、两个向量的夹角公式,推导空间两点间的距离公式. (4) 能利用空间向量的坐标运算解决平行、垂直的位置关系问题,以及简单的距离、夹角相关的度量问题;体会空间向量坐标运算在解决立体几何问题中的作用,建立几何问题代数化的基本思想.	(1) 理解空间直角坐标系,感受建立空间直角坐标系的必要性. (2) 借助空间直角坐标系理解空间中点的坐标和向量的坐标的概念及坐标表示. (3) 会用坐标表示空间向量的线性运算及数量积运算. (4) 会利用空间向量运算的坐标表示解决一些简单的立体几何问题.

02

思维导图

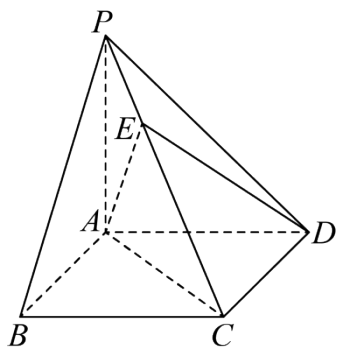


知识点 01 空间向量基本定理及样关概念的理解

空间向量基本定理:

如果空间中的三个向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 不共面, 那么对空间中的任意一个向量 $\vec{p}$, 存在唯一的有序实数组 (x, y, z) , 使得 $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$. 其中, 空间中不共面的三个向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 组成的集合 $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$, 常称为空间向量的一组基底. 此时, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 都称为基向量; 如果 $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$, 则称 $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ 为 $\vec{p}$ 在基底 $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ 下的分解式.

【即学即练 1】(2024·安徽六安·高二六安一中校考) 如图底面为平行四边形的四棱锥 $P-ABCD$, $EC = 2PE$, 若 $\vec{DE} = x\vec{AB} + y\vec{AC} + z\vec{AP}$, 则 $x + y + z =$ ()



A. 1

B. 2

C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{5}{3}$

【答案】A

【解析】由题意, $\vec{DE} = \vec{DC} + \vec{CA} + \vec{AE} = \vec{AB} - \vec{AC} + \vec{AP} + \vec{PE}$
 $= \vec{AB} - \vec{AC} + \vec{AP} + \frac{1}{3}\vec{PC} = \vec{AB} - \vec{AC} + \vec{AP} + \frac{1}{3}(\vec{AC} - \vec{AP})$
 $= \vec{AB} - \frac{2}{3}\vec{AC} + \frac{2}{3}\vec{AP},$

又因为 $\vec{DE} = x\vec{AB} + y\vec{AC} + z\vec{AP},$

所以 $x = 1, y = -\frac{2}{3}, z = \frac{2}{3},$

所以 $x + y + z = 1.$

故选: A.

知识点 02 空间向量的正交分解

单位正交基底: 如果空间的一个基底中的三个基向量两两垂直, 且长度都为 1, 那么这个基底叫做单位正交基底, 常用 $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ 表示.

正交分解：把一个空间向量分解为三个两两垂直的向量，叫做把空间向量进行正交分解。

【即学即练 2】（2024·陕西榆林·高二校考阶段练习）定义：设 $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ 是空间的一个基底，若向量 $\vec{p} = x\vec{a}_1 + y\vec{a}_2 + z\vec{a}_3$ ，则称有序实数组 (x, y, z) 为向量 $\vec{p}$ 在基底 $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ 下的坐标。已知 $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ 是空间的单位正交基底， $\{\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}, \vec{a} + 2\vec{c}\}$ 是空间的另一个基底，若向量 $\vec{p}$ 在基底 $\{\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}, \vec{a} + 2\vec{c}\}$ 下的坐标是 $(1, 2, 3)$ 。则向量 $\vec{p}$ 在基底 $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ 下的坐标是_____。

【答案】 $(6, -1, 6)$

【解析】 因为向量 $\vec{p}$ 在基底 $\{\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}, \vec{a} + 2\vec{c}\}$ 下的坐标是 $(1, 2, 3)$ ，

所以 $\vec{p} = 1(\vec{a} + \vec{b}) + 2(\vec{a} - \vec{b}) + 3(\vec{a} + 2\vec{c}) = 6\vec{a} - \vec{b} + 6\vec{c}$ ，

所以向量 $\vec{p}$ 在基底 $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ 下的坐标是 $(6, -1, 6)$ 。

故答案为： $(6, -1, 6)$

知识点 03 空间直角坐标系

1、空间直角坐标系

从空间某一定点 O 引三条互相垂直且有相同单位长度的数轴，这样就建立了空间直角坐标系 $Oxyz$ ，点 O 叫做坐标原点， x 轴、 y 轴、 z 轴叫做坐标轴，这三条坐标轴中每两条确定一个坐标平面，分别是 xOy 平面、 yOz 平面、 zOx 平面。

2、右手直角坐标系

在空间直角坐标系中，让右手拇指指向 x 轴的正方向，食指指向 y 轴的正方向，如果中指指向 z 轴的正方向，则称这个坐标系为右手直角坐标系。

3、空间点的坐标

空间一点 A 的坐标可以用有序数组 (x, y, z) 来表示，有序数组 (x, y, z) 叫做点 A 的坐标，记作 $A(x, y, z)$ ，其中 x 叫做点 A 的横坐标， y 叫做点 A 的纵坐标， z 叫做点 A 的竖坐标。

【即学即练 3】（2024·海南儋州·高二校考）向量 $\vec{a} = (2, 1, 2)$ ， $\vec{b} = (-1, 2, 1)$ ，则 $2\vec{a} + \vec{b}$ 的坐标是_____。

【答案】 $(3, 4, 5)$

【解析】 向量 $\vec{a} = (2, 1, 2)$ ， $\vec{b} = (-1, 2, 1)$ ，则 $2\vec{a} + \vec{b} = 2(2, 1, 2) + (-1, 2, 1) = (3, 4, 5)$ 。

故答案为： $(3, 4, 5)$

知识点 04 空间直角坐标系中点的坐标

1、空间直角坐标系中点的坐标的求法

通过该点，作两条轴所确定平面的平行平面，此平面交另一轴于一点，交点在这条轴上的坐标就是已知点相应的一个坐标。

特殊点的坐标：原点 $(0,0,0)$ ； x,y,z 轴上的点的坐标分别为 $(x,0,0),(0,y,0),(0,0,z)$ ；坐标平面 xOy,yOz,xOz 上的点的坐标分别为 $(x,y,0),(0,y,z),(x,0,z)$ 。

2、空间直角坐标系中对称点的坐标

在空间直角坐标系中，点 $P(x,y,z)$ ，则有

点 P 关于原点的对称点是 $P_1(-x,-y,-z)$ ；

点 P 关于横轴（ x 轴）的对称点是 $P_2(x,-y,-z)$ ；

点 P 关于纵轴（ y 轴）的对称点是 $P_3(-x,y,-z)$ ；

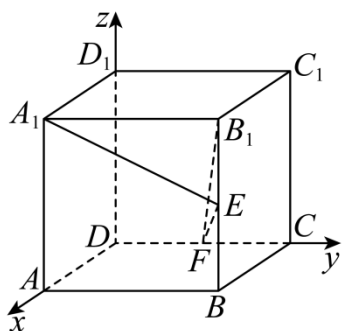
点 P 关于竖轴（ z 轴）的对称点是 $P_4(-x,-y,z)$ ；

点 P 关于坐标平面 xOy 的对称点是 $P_5(x,y,-z)$ ；

点 P 关于坐标平面 yOz 的对称点是 $P_6(-x,y,z)$ ；

点 P 关于坐标平面 xOz 的对称点是 $P_7(x,-y,z)$ 。

【即学即练 4】（2024·甘肃天水·高二秦安县第一中学校考）已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2， E, F 分别为棱 BB_1, DC 的中点，如图所示建立空间直角坐标系. 写出向量 $\vec{EF}, \vec{B_1F}, \vec{A_1E}$ 的坐标.



【解析】根据题意可得 $D(0,0,0), C(0,2,0), B(2,2,0), B_1(2,2,2), A_1(2,0,2)$,

又 E, F 分别为棱 BB_1, DC 的中点，可得 $E(2,2,1), F(0,1,0)$,

利用向量坐标运算法则可得 $\vec{EF} = (0,1,0) - (2,2,1) = (-2,-1,-1)$ ，即 $\vec{EF} = (-2,-1,-1)$ ；

$\vec{B_1F} = (0,1,0) - (2,2,2) = (-2,-1,-2)$ ，即 $\vec{B_1F} = (-2,-1,-2)$ ；

$\vec{A_1E} = (2,2,1) - (2,0,2) = (0,2,-1)$ ，即 $\vec{A_1E} = (0,2,-1)$ ；

所以可得 $\vec{EF} = (-2,-1,-1), \vec{B_1F} = (-2,-1,-2), \vec{A_1E} = (0,2,-1)$ 。

知识点 05 空间向量的坐标运算

(1) 空间两点的距离公式

若 $A(x_1,y_1,z_1), B(x_2,y_2,z_2)$ ，则

$$\textcircled{1} \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (x_2, y_2, z_2) - (x_1, y_1, z_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

即：一个向量在直角坐标系中的坐标等于表示这个向量的有向线段的终点的坐标减去起点的坐标.

$$\textcircled{2} |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{AB^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2},$$

$$\text{或 } d_{A,B} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

知识点诠释：两点间距离公式是模长公式的推广，首先根据向量的减法推出向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标表示，然后再用模长公式推出.

(2) 空间线段中点坐标

空间中有两点 $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$ ，则线段 AB 的中点 C 的坐标为 $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$.

(3) 向量加减法、数乘的坐标运算

若 $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1), \vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ ，则

$$\textcircled{1} \vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2);$$

$$\textcircled{2} \vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2);$$

$$\textcircled{3} \lambda \vec{a} = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1) (\lambda \in R);$$

(4) 向量数量积的坐标运算

若 $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1), \vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ ，则

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

即：空间两个向量的数量积等于他们的对应坐标的乘积之和.

(5) 空间向量长度及两向量夹角的坐标计算公式

若 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ ，则

$$(1) |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}, |\vec{b}| = \sqrt{\vec{b} \cdot \vec{b}} = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}.$$

$$(2) \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} (\vec{a} \neq 0, \vec{b} \neq 0).$$

知识点诠释：

① 夹角公式可以根据数量积的定义推出：

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \Rightarrow \cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}, \text{ 其中 } \theta \text{ 的范围是 } [0, \pi]$$

$$\textcircled{2} \langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD} \rangle = \theta \Rightarrow \langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DB} \rangle = \pi - \theta \Rightarrow \langle \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BD} \rangle = \pi - \theta \Rightarrow \langle \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{DB} \rangle = \theta.$$

③ 用此公式求异面直线所成角等角度时，要注意所求角度与 θ 的关系（相等，互余，互补）.

(6) 空间向量平行和垂直的条件

若 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ ，则

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/257126024144006120>