第八节　函数连续性与间断点

- 函数连续性(continuity)
- 函数间断点(discontinuous point)
- 小结

在自然界中,许多事物改变是连续,如气温改变很小时,金属棒长改变也很小.时间改变很小时,生物生长也极少.　这种现象在函数关系上反应就是函数连续性.

在高等数学中,主要研究对象就是连续函数.　从直观上不妨这么说, 连续函数特征就是它图形是连续,　也就是说,能够一笔画成.

一、函数连续性

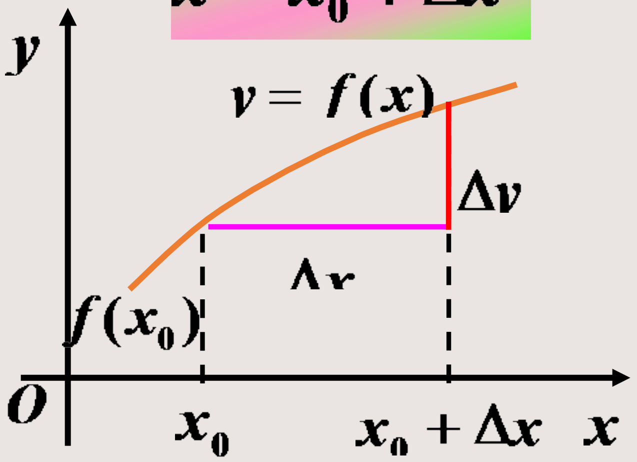
1. 函数增量

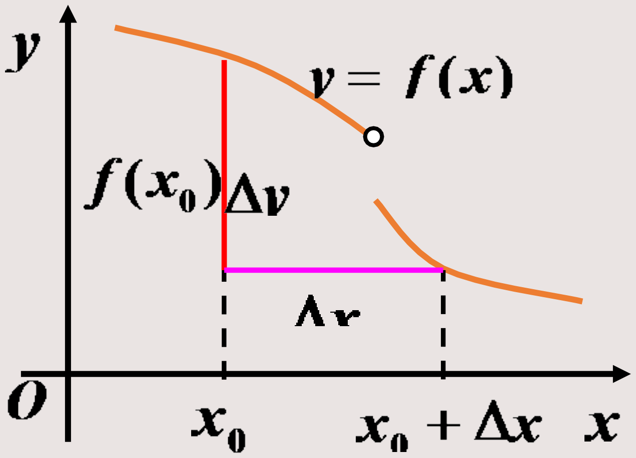
自变量$x_0 \to x$，称差$\Delta x = x - x_0$ 为自变量在 x_0 增量；函数伴随从$f(x_0) \to f(x)$，称差

$\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ 为函数**增量**.

$x = x_0 + \Delta x$

如图:





2. 连续定义

定义1 设函数 $f(x)$在 $U(x_0,\delta)$ 内有定义, 若

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0$$

则称

连续

把极限与连续性联络起来了,且提供了连续函数求极限简便方法——只需求出该点函数值.

采取了无穷小定义法

自变量在x_0点增量为无穷小时,函数增量也为无穷小.形象地表示了连续性特征.

Δ ... x_0).

定 ... 处

连

连续性二种定义形式不一样，但本质相同.

这二种定义中都含有 **三个要素:**

(1) $f(x)$在 $U(x_0,\delta)$ 内有定义;

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在;

(3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$$

例 证明函数$y=\sin x$在区间$(-\infty,+\infty)$内连续

证 任取$x\in(-\infty,+\infty)$,

$$\Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x$$

$$= 2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right| \cdot \left|\cos(x+\frac{\Delta x}{2})\right| \le 2\left|\frac{\Delta x}{2}\right| \cdot 1$$

$$\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right| \le \left|\frac{\Delta x}{2}\right|$$

$$= |\Delta x| \xrightarrow{\Delta x \to 0} 0 \qquad \text{即} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$$

$$\left|\cos(x+\frac{\Delta x}{2})\right| \le 1$$

即函数$y=\sin x$对任意$x\in(-\infty,+\infty)$都是连续.

类似可证,函数$y=\cos x$在区间$(-\infty,+\infty)$内是连续.

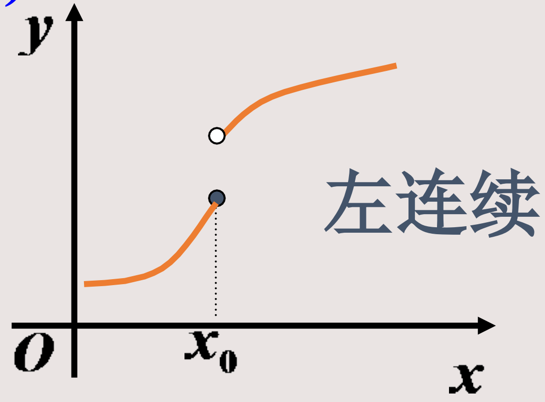
3. 左、右连续

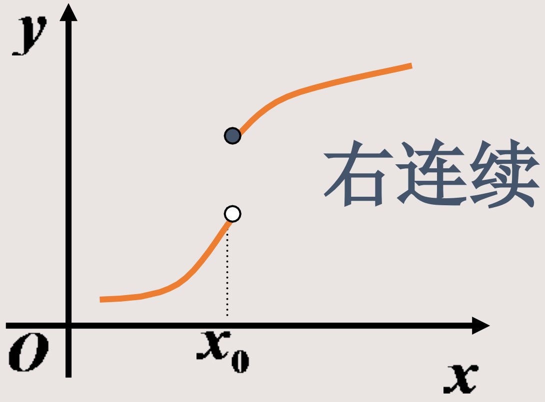
若 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$　$(f(x_0^-) = f(x_0))$

则称 $f(x)$ 在点 x_0 处**左连续(continuity from the left);**

若 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$　$(f(x_0^+) = f(x_0))$

则称 $f(x)$ 在点 x_0 处**右连续(continuity from the right).**





定理1 函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续 $\Leftrightarrow$

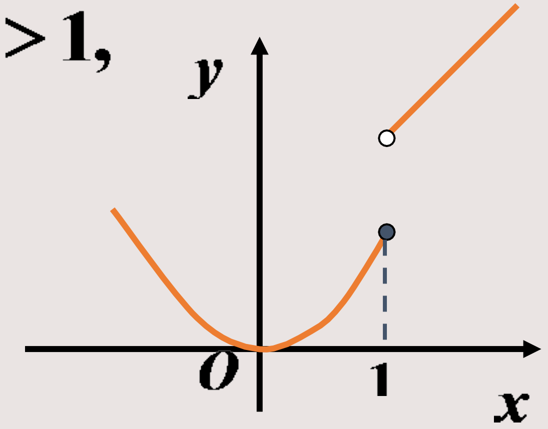
函数 $f(x)$ 在 x_0 处既左连续又右连续

$$\left(f(x_0^-) = f(x_0^+) = f(x_0)\right)$$

此定理惯用于**判定分段函数在分段点**处连续性.

例 讨论函数$f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 1, \\ x+1, & x>1, \end{cases}$

在$x=1$处的连续性



解 $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} x^2=1=f(1),$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x+1)=2\neq f(1),$

所以$f(x)$在$x=1$左连续,在$x=1$右不连续

故函数$f(x)$在点$x=1$处不连续

4. 连续函数(continous function)与连续区间

在区间上每一点都连续函数，称该区间上**连续函数**，或称函数在该区间上连续.

这时也称该区间为**连续区间**.

continuous

$f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续 $f(x)\in C(a,b)$

左端点 $x=a$ **右连续** $(\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a))$

右端点 $x=b$ **左连续** $(\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b))$

$f(x)\in C[a,b]$

连续函数图形

是一条无缝隙连绵而不停曲线.

比如，多项式函数

$$P(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$$

$\forall x_0\in(-\infty,+\infty)$，$\lim\limits_{x\to x_0}P(x)=P(x_0)$ 第六节中已证

所以多项式函数在 $(-\infty,+\infty)$ 内是连续.

有理分式函数 $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$

只要 $Q(x_0)\neq 0$，都有 $\lim\limits_{x\to x_0}R(x)=R(x_0)$

所以有理分式函数在其定义域内每一点

都是连续.

二、函数间断点及其分类

定义4 设函数 $f(x)$在x_0某去心邻域内有定义

若$f(x)$在x_0处出现以下三种情形之一:

(1) $f(x)$在点x_0处无定义;

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$不存在;

(3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

则称x_0为$f(x)$的**间断点**.

间断点分为两类:

第一类间断点

$f(x_0^-)$ 及 $f(x_0^+)$ 均存在,

若 $f(x_0^-) = f(x_0^+)$, 称x_0为可去间断点.

若 $f(x_0^-) \neq f(x_0^+)$, 称x_0为跳跃间断点.

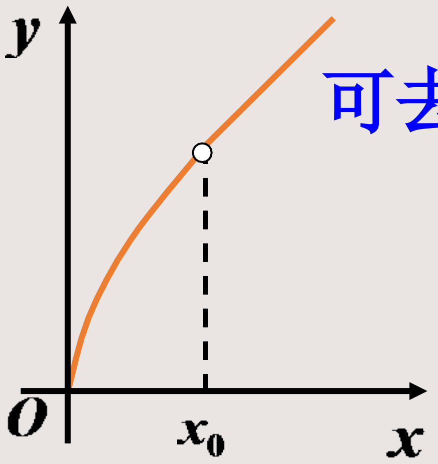
第二类间断点

$f(x_0^-)$ 及 $f(x_0^+)$ 中最少有一个不存在.

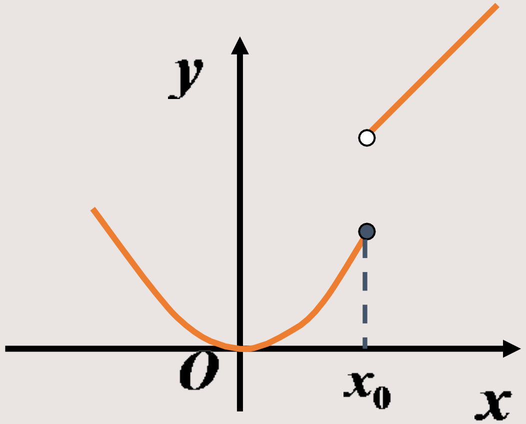
若其中有一个为∞, 称x_0为无穷间断点.

若其中有一个为振荡, 称x_0为振荡间断点.

第一类间断点

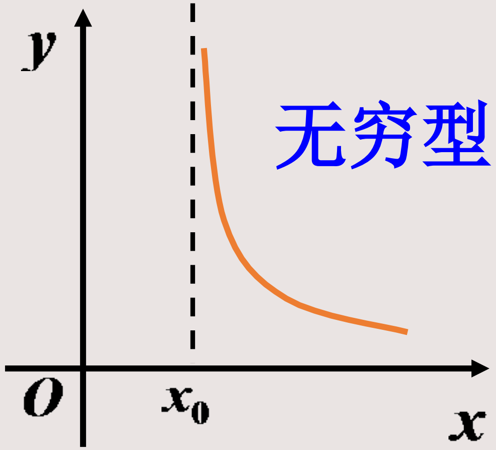


可去型

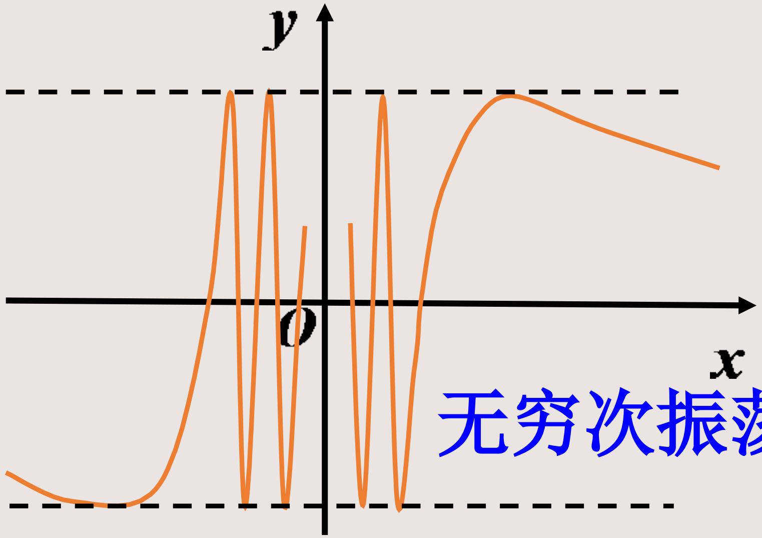


跳跃型

第二类间断点



无穷型



无穷次振荡型