

第十二章 全等三角形（知识归纳+题型突破）

课标要求

- 1.了解全等图形与全等三角形的概念与性质.
- 2.掌握三角形全等的判定方法.
- 3.掌握角平分线的性质与判定.

基础知识归纳

一 全等图形

概念：形状、大小相同的图形放在一起能够完全重合.

全等图形特征：

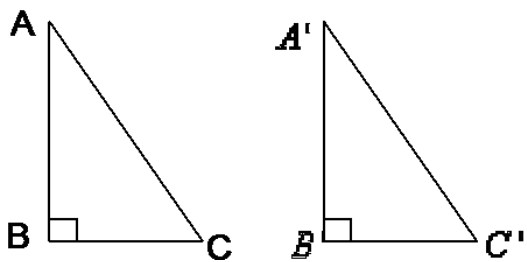
①形状相同. ②大小相等. ③对应边相等、对应角相等.

小结：一个图形经过平移,翻折,旋转后,位置变化了,但大小和形状都没有改变,即平移,翻折,旋转前后的图形全等.

二 全等三角形

概念：两个能完全重合的三角形叫做全等三角形.

记作： $\triangle ABC \cong \triangle A' B' C'$ 读作： $\triangle ABC$ 全等于 $\triangle A' B' C'$



对应顶点： A 和 A' 、 B 和 B' 、 C 和 C' ； 对应边： AB 和 $A' B'$ 、 BC 和 $B' C'$ 、 AC 和 $A' C'$ ；

对应角： $\angle A$ 和 $\angle A'$ 、 $\angle B$ 和 $\angle B'$ 、 $\angle C$ 和 $\angle C'$

对应元素的规律：

(1)有公共边的,公共边是对应边;(2)有公共角的,公共角是对应角;(3)有对顶角的,对顶角是对应角;

三、全等三角形的判定（重点）

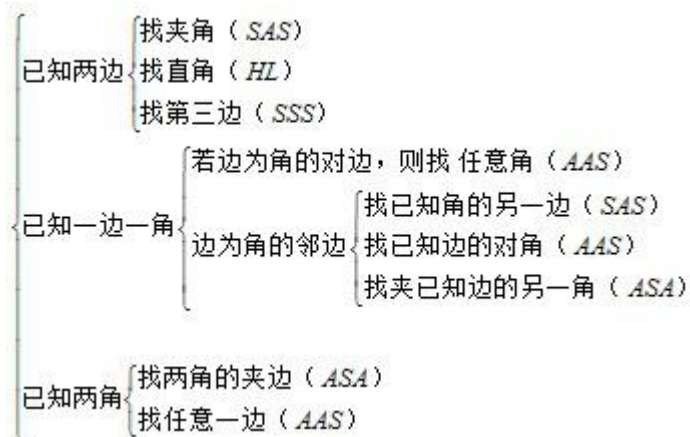
	一般三角形	直角三角形
判定	边角边 (SAS)、角边角 (ASA) 角角边 (AAS)、边边边 (SSS)	具备一般三角形的判定方法 斜边和一条直角边对应相等 (HL)

性质	对应边相等，对应角相等 对应中线相等，对应高相等，对应角平分线相等
----	--------------------------------------

备注：1. 判定两个三角形全等必须有一组边对应相等.

2. 全等三角形周长、面积相等.

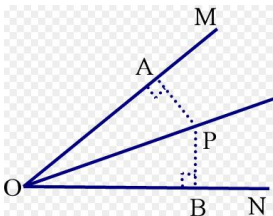
四、证题的思路（难点）



五、角平分线的性质与判定

概念：从一个角的顶点引出一条射线，把这个角分成完全相同的角，这条射线叫做这个角的角平分线.

角平分线的性质：角平分线上的点到角两边的距离相等；



数学语言： $\because \angle MOP = \angle NOP, PA \perp OM, PB \perp ON$

$$\therefore PA = PB$$

判定定理：到角两边距离相等的点在角的平分线上.

数学语言： $\because PA \perp OM, PB \perp ON, PA = PB$

$$\therefore \angle MOP = \angle NOP$$

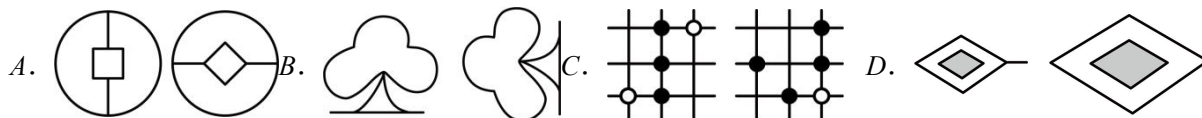
六、角平分线常考四种辅助线：

1. 图中有角平分线，可向两边作垂线.
2. 角平分线加垂线，三线合一试试看.
3. 角平分线平行线，等腰三角形来添.
4. 也可将图对折看，对称以后关系出现.

重要题型

题型一 全等图形识别

例题：（2023 春·全国·七年级专题练习）下列各组中的两个图形属于全等图形的是（ ）



【答案】 B

【分析】 根据全等图形的概念判断即可.

【详解】 解：A、两个图形不能完全重合，不是全等图形，故本选项不符合题意；

B、两个图形能够完全重合，是全等图形，故本选项符合题意；

C、两个图形不能完全重合，不是全等图形，故本选项不符合题意；

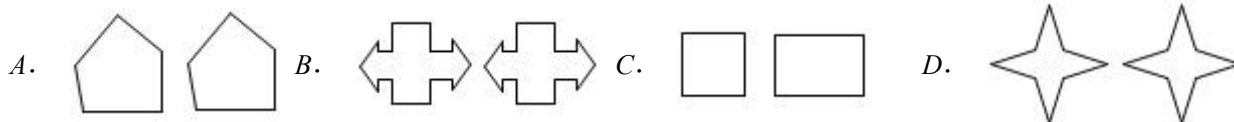
D、两个图形不能完全重合，不是全等图形，故本选项不符合题意；

故选：B.

【点睛】 本题主要考查全等图形的定义，熟练掌握“能完全重合的两个图形是全等图形”是解题的关键.

【巩固训练】

1. （2023 春·广东深圳·七年级北大附中深圳南山分校校考期中）下列四个选项中，不是全等图形的是（ ）



【答案】 C

【分析】 根据全等图形的定义：能够完全重合的两个图形叫做全等图形逐项判断即可.

【详解】 A. 经过平移后可以完全重合，是全等图形，故该选项不符合题意；

B. 经过平移后可以完全重合，是全等图形，故该选项不符合题意；

C. 两个图形形状不同，不能完全重合，不是全等图形，故该选项符合题意；

D. 经过平移后可以完全重合，是全等图形，故该选项不符合题意.

故选 C.

【点睛】 本题考是全等图形的定义，掌握能够完全重合的两个图形叫做全等图形是解题关键.

2. （2023·江苏·八年级假期作业）请观察下图中的 6 组图案，其中是全等形的是_____.



【答案】(1) (4) (5) (6).

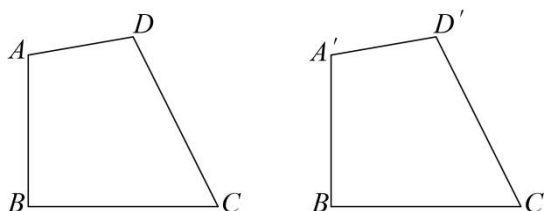
【分析】根据全等的性质：能够完全重合的两个图形叫做全等形，结合所给图形进行判断即可.

【详解】解：(1) (5) 是由其中一个图形旋转一定角度得到另一个图形的，(4) 是将其中一个图形翻折后得到另一个图形的，(6) 是将其中一个图形旋转 180° 再平移得到的，(2) (3) 形状相同，但大小不等.

故答案是：(1) (4) (5) (6).

【点睛】本题考查了全等图形的知识，解答本题的关键是掌握全等图形的定义.

3. (2023 春·七年级课时练习) 如图，四边形 $ABCD \cong$ 四边形 $A'B'C'D'$ ，若 $\angle A = 110^\circ$ ， $\angle C = 60^\circ$ ， $\angle D' = 105^\circ$ ，则 $\angle B =$ _____.



【答案】 85°

【分析】根据全等图形的性质， $\angle D = \angle D'$ ，再根据四边形的内角和为 360° 得到 $\angle B$.

【详解】解：根据题意得： $\angle D = \angle D' = 105^\circ$,

所以 $\angle B = 360^\circ - \angle A - \angle C - \angle D = 360^\circ - 110^\circ - 60^\circ - 105^\circ = 85^\circ$,

故答案为： 85°

【点睛】本题考查了全等图形，熟练掌握全等图形的有关知识是解题的关键.

题型二 全等三角形的概念和性质

例题：(2023 春·江苏盐城·七年级校考期中) 下列说法中，正确的有 ()

①形状相同的两个图形是全等形 ②面积相等的两个图形是全等形 ③全等三角形的周长相等，面积相等 ④

若 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ，则 $\angle A = \angle D$ ， $AB = EF$

A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

【答案】A

【分析】根据全等的定义和性质判断即可.

【详解】①形状大小都相同的两个图形是全等形，故①错误；

②面积相等的两个图形不一定是全等形，故②错误；

③全等三角形的周长相等，面积相等，是对的，故③正确；

④若 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ，则 $\angle A = \angle D$ ， $AB = DE$ ，故④错误；

故正确的有 1 个.

故选：A

【点睛】此题考查全等三角形的定义和性质，解题关键是掌握全等三角形的定义.

【巩固训练】

1. (2023·全国·八年级假期作业) 已知 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ，且 $\angle A$ 与 $\angle D$ 是对应角， $\angle B$ 和 $\angle E$ 是对应角，则下列说法中正确的是 ()

A. AC 与 DF 是对应边

B. AC 与 DE 是对应边

C. AC 与 EF 是对应边

D. 不能确定 AC 的对应边

【答案】A

【分析】根据全等三角形的概念即可得到答案.

【详解】解：∵ $\angle A$ 与 $\angle D$ 是对应角， $\angle B$ 和 $\angle E$ 是对应角，

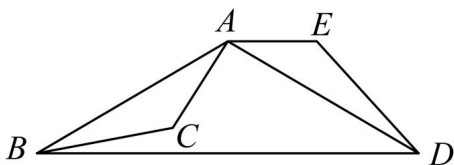
∴ $\angle C$ 和 $\angle F$ 是对应角，

∴ AC 与 DF 是对应边，

故选 A.

【点睛】本题考查了全等三角形，理解全等三角形的概念，准确找出对应边是解题关键.

2. (2023 秋·八年级课时练习) 如图， $\triangle ABC \cong \triangle ADE$ ，且 $AE \parallel BD$ ， $\angle ADB = 25^\circ$ ，则 $\angle BAC$ 的度数为 _____.



【答案】 $25^\circ/25$ 度

【分析】先根据平行线的性质得到 $\angle DAE = \angle ADB = 25^\circ$ ，再由全等三角形的性质即可得到 $\angle BAC = \angle DAE = 25^\circ$.

【详解】解：∵ $AE \parallel BD$ ， $\angle ADB = 25^\circ$ ，

∴ $\angle DAE = \angle ADB = 25^\circ$ ，

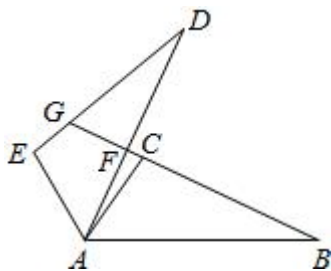
∵ $\triangle ABC \cong \triangle ADE$ ，

$\therefore \angle BAC = \angle DAE = 25^\circ$,

故答案为: 25° .

【点睛】本题主要考查了全等三角形的性质, 平行线的性质, 熟知全等三角形对应角相等是解题的关键.

3. (2023·江苏·八年级假期作业) 如图, $\triangle ABC \cong \triangle ADE$, 且 $\angle CAD = 10^\circ$, $\angle B = \angle D = 25^\circ$, $\angle EAB = 120^\circ$, 求 $\angle DFB$ 和 $\angle DGB$ 的度数.



【答案】 $\angle DFB = 90^\circ$, $\angle DGB = 65^\circ$

【分析】由 $\triangle ABC \cong \triangle ADE$, 可得 $\angle DAE = \angle BAC = \frac{1}{2}(\angle EAB - \angle CAD)$, 根据三角形外角性质可得 $\angle DFB = \angle FAB + \angle B$, 因为 $\angle FAB = \angle FAC + \angle CAB$, 即可求得 $\angle DFB$ 的度数; 根据三角形内角和定理可得 $\angle DGB = \angle DFB - \angle D$, 即可得 $\angle DGB$ 的度数.

【详解】解: $\because \triangle ABC \cong \triangle ADE$,

$$\therefore \angle DAE = \angle BAC = \frac{1}{2}(\angle EAB - \angle CAD) = \frac{1}{2}(120^\circ - 10^\circ) = 55^\circ .$$

$$\therefore \angle DFB = \angle FAB + \angle B = \angle FAC + \angle CAB + \angle B = 10^\circ + 55^\circ + 25^\circ = 90^\circ$$

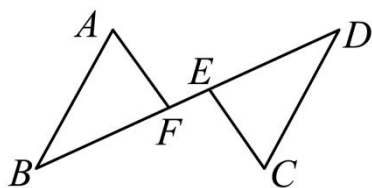
$$\angle DGB = \angle DFB - \angle D = 90^\circ - 25^\circ = 65^\circ .$$

综上所述: $\angle DFB = 90^\circ$, $\angle DGB = 65^\circ$.

【点睛】本题考查了三角形全等的性质对应角相等, 三角形内角和, 角度的转化是解决问题的关键.

题型三 添一个条件使两三角形全等

例题: (2023 春·山西临汾·七年级统考期末) 如图, B, F, E, D 四点共线, $BE = DF$, $\angle A = \angle C$. 若要使 $\triangle ABF \cong \triangle CDE$, 则需要添加的条件是_____ (只需添加一个你认为合适的条件即可).



【答案】 $\angle B = \angle D$ (答案不唯一)

【分析】由题意知，添加的条件为 $\angle B = \angle D$ ，可证 $\triangle ABF \cong \triangle CDE$ (AAS).

【详解】解：由题意知，添加的条件为 $\angle B = \angle D$ ，

$$\because BE = DF,$$

$$\therefore BE - EF = DF - EF, \text{ 即 } BF = DE,$$

$$\because \angle B = \angle D, \angle A = \angle C, BF = DE,$$

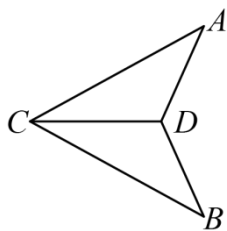
$$\therefore \triangle ABF \cong \triangle CDE (\text{AAS}),$$

故答案为： $\angle B = \angle D$.

【点睛】本题考查了全等三角形的判定. 解题的关键在于确定判定三角形全等的条件.

【巩固训练】

1. (2023 春·广东·七年级统考期末) 如图，已知 $\angle ADC = \angle BDC$ ，要判定 $\triangle ACD \cong \triangle BCD$ ，则需要补充的一个条件为_____ (只需补充一个).



【答案】 $\angle A = \angle B$ (答案不唯一)

【分析】添加条件为 $\angle A = \angle B$ ， $CD = CD$ ，根据 AAS 即可推出两三角形全等.

【详解】解：添加条件为 $\angle A = \angle B$ ，

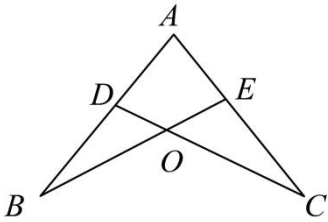
理由是： \because 在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle BCD$ 中，
$$\begin{cases} \angle A = \angle B \\ \angle ADC = \angle BDC, \\ CD = CD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ACD \cong \triangle BCD (\text{AAS}),$$

故答案为： $\angle A = \angle B$ (答案不唯一).

【点睛】本题考查了对全等三角形的判定定理的应用，注意：全等三角形的判定定理有 SAS，ASA，AAS，SSS.

2. (2023 春·广东茂名·七年级统考期末) 如图，点 D, E 分别在线段 AB, AC 上， BE, CD 相交于点 O ， $AB = AC$ ，要使 $\triangle ABE \cong \triangle ACD$ ，需添加一个条件是_____ (只需填一个即可).



【答案】 $AE = AD$ (答案不唯一)

【分析】 根据三角形全等的判定定理求解即可.

【详解】 $\because AB = AC, \angle A = \angle A$

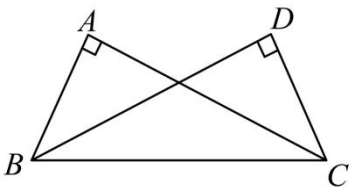
\therefore 当添加的条件为 $AE = AD$ 时,

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ACD$ (SAS).

故答案为: $AE = AD$ (答案不唯一).

【点睛】 此题考查了三角形全等的判定方法, 解题的关键是熟练掌握三角形全等的判定方法. 判定三角形全等的方法有: SSS, SAS, AAS, ASA, HL (直角三角形).

3. (2023 秋·八年级课时练习) 如图, 已知 $\angle A = \angle D = 90^\circ$, 要使用“HL”证明 $\triangle ABC \cong \triangle DCB$, 应添加条件: _____; 要使用“AAS”证明 $\triangle ABC \cong \triangle DCB$, 应添加条件: _____.



【答案】 $AB = DC$ (或 $AC = DB$) $\angle ACB = \angle DBC$ (或 $\angle ABC = \angle DCB$)

【分析】 根据: 斜边与直角边对应相等的两个直角三角形全等, 使 $\triangle ABC \cong \triangle DCB$, 已知 $\angle A = \angle D = 90^\circ$, $BC = BC$, 添加的条件是直角边相等即可; 要使用“AAS”, 需要添加角相等即可.

【详解】 解: 已知 $\angle A = \angle D = 90^\circ$, $BC = BC$,

要使用“HL”, 添加的条件是直角边相等,

故答案为: $AB = DC$ (或 $AC = DB$);

要使用“AAS”, 需要添加角相等, 添加的条件为:

$\angle ACB = \angle DBC$ (或 $\angle ABC = \angle DCB$).

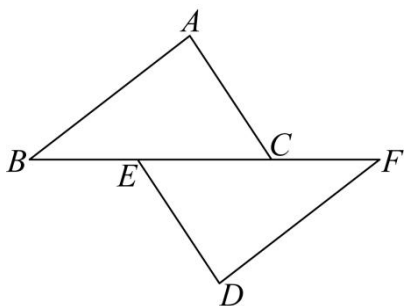
故答案为: $\angle ACB = \angle DBC$ (或 $\angle ABC = \angle DCB$).

【点睛】 本题考查了全等三角形的判定. 本题的关键是, 全等三角形的 5 种判定方法中, 选用哪一种方法, 取决于题目中的已知条件, 若已知两边对应相等, 则找它们的夹角或第三边; 若已知两角对应相等, 则必须再找一组对边对应相等, 且要是两角的夹边, 若已知一边一角, 则找另一组角, 或找这个角的另一组对

应邻边.

题型四 三角形全等的判定方法

例题: (2023·云南玉溪·统考三模) 如图, 点 B, E, C, F 在一条直线上, $AB = DF, AC = DE, BE = CF$, 求证: $\triangle ABC \cong \triangle DFC$.



【答案】 见解析

【分析】 根据题意, 运用“边边边”的方法证明三角形全等.

【详解】 证明: $\because BE = CF$,

$\therefore BE + CE = CF + CE$, 即 $BC = EF$,

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DFE$ 中

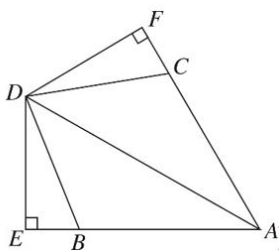
$$\begin{cases} AB = DF \\ AC = DE \\ BC = FE \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DFE$ (SSS).

【点睛】 本题主要考查三角形全等的判定, 掌握全等三角形的判定方法解题的关键.

【巩固训练】

1. (2023 春·全国·七年级专题练习) 如图, 已知 $\angle E = \angle F = 90^\circ$, 点 B, C 分别在 AE, AF 上, $AB = AC$, $BD = CD$.



(1) 求证: $\triangle ABD \cong \triangle ACD$;

(2) 求证: $DE = DF$.

【答案】(1)见解析

(2)见解析

【分析】(1) 直接根据 SSS 证明即可.

(2) 根据 (1) 得 $\angle EAD = \angle FAD$, 然后证明 $\triangle AED \cong \triangle AFD$ 即可.

【详解】(1) 解: 证明: 在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 中,

$$\begin{cases} AB = AC \\ AD = AD \\ BD = CD \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACD (SSS)$.

(2) 解: 由 (1) 知 $\triangle ABD \cong \triangle ACD (SSS)$,

$\therefore \angle EAD = \angle FAD$,

在 $\triangle AED$ 和 $\triangle AFD$ 中,

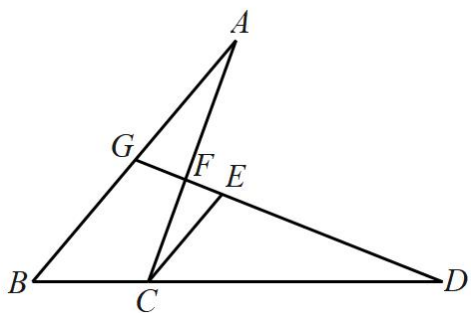
$$\begin{cases} \angle E = \angle F \\ \angle EAD = \angle FAD \\ AD = AD \end{cases}$$

$\therefore \triangle AED \cong \triangle AFD (AAS)$,

$\therefore DE = DF$.

【点睛】 本题考查了全等三角形的性质与判定, 熟记全等三角形的性质与判定是解题关键.

2. (2023 春·全国·七年级期末) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D 是 BC 延长线上一点, 满足 $CD = BA$, 过点 C 作 $CE \parallel AB$, 且 $CE = BC$, 连接 DE 并延长, 分别交 AC , AB 于点 F , G .



(1) 求证: $\triangle ABC \cong \triangle DCE$;

(2) 若 $BD = 12$, $AB = 2CE$, 求 BC 的长度.

【答案】(1)见解析

(2)4

【分析】(1) 根据 SAS 证明 $\triangle ABC \cong \triangle DCE$ 即可;

(2) 根据全等三角形的性质解答即可.

【详解】(1) $\because CE \parallel AB$,

$$\therefore \angle B = \angle ECD,$$

在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DCE$ 中,

$$\begin{cases} AB = CD \\ \angle B = \angle ECD, \\ BC = CE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DCE (\text{SAS});$$

$$(2) \because \triangle ABC \cong \triangle DCE,$$

$$\therefore AB = CD, BC = CE,$$

$$\because AB = 2CE,$$

$$\therefore CD = 2BC,$$

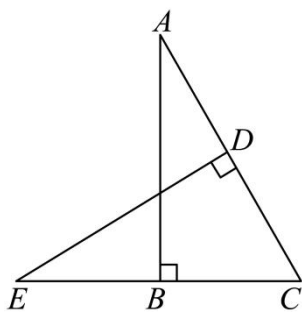
$$\because BD = 12,$$

$$\therefore BD = CD + BC = 3BC = 12$$

$$\therefore BC = 4.$$

【点睛】此题考查全等三角形的判定和性质，关键是掌握全等三角形的判定和性质.

3. (2023·浙江温州·温州市第八中学校考三模) 如图，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ECD$ 中， $\angle ABC = \angle EDC = 90^\circ$ ，点 B 为 CE 中点， $BC = CD$.



(1) 求证: $\triangle ABC \cong \triangle ECD$.

(2) 若 $CD = 2$, 求 AC 的长.

【答案】(1) 见解析

(2) 4, 见解析

【分析】(1) 根据 ASA 判定即可;

(2) 根据 $\triangle ABC \cong \triangle ECD$ (ASA) 和点 B 为 CE 中点即可求出.

【详解】(1) 证明: $\because \angle ABC = \angle EDC = 90^\circ$, $BC = CD$, $\angle C = \angle C$,

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle ECD(\text{ASA})$

(2) 解: $\because CD = 2$, $\triangle ABC \cong \triangle ECD(\text{ASA})$,

$\therefore BC = CD = 2$, $AC = CE$,

\because 点 B 为 CE 中点,

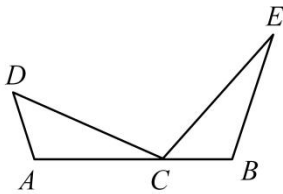
$\therefore BE = BC = CD = 2$,

$\therefore CE = 4$,

$\therefore AC = 4$;

【点睛】 本题考查全等三角形的判定和性质, 掌握全等三角形的判定条件是解答本题的关键.

4. (2023 秋·八年级课时练习) 如图, 已知点 C 是线段 AB 上一点, $\angle DCE = \angle A = \angle B$, $CD = CE$.



(1) 求证: $\triangle ACD \cong \triangle BEC$;

(2) 求证: $AB = AD + BE$.

【答案】(1) 见解析

(2) 见解析

【分析】(1) 由 $\angle DCE = \angle A$ 得 $\angle D + \angle ACD = \angle ACD + \angle BCE$, 即 $\angle D = \angle BCE$, 从而即可证得 $\triangle ACD \cong \triangle BEC$;

(2) 由 $\triangle ACD \cong \triangle BEC$ 可得 $AD = BC$, $AC = BE$, 即可得到 $AC + BC = AD + BE$, 从而即可得证.

【详解】(1) 证明: $\because \angle DCE = \angle A$,

$\therefore \angle D + \angle ACD = \angle ACD + \angle BCE$,

$\therefore \angle D = \angle BCE$,

在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle BEC$ 中,

$$\begin{cases} \angle A = \angle B \\ \angle D = \angle BCE, \\ CD = EC \end{cases}$$

$\therefore \triangle ACD \cong \triangle BEC(\text{AAS})$;

(2) 解: $\because \triangle ACD \cong \triangle BEC$,

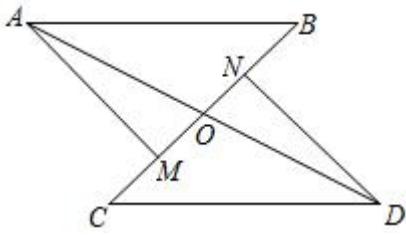
$\therefore AD = BC, AC = BE$,

$\therefore AC + BC = AD + BE$,

$\therefore AB = AD + BE$.

【点睛】 本题主要考查了全等三角形的判定与性质, 熟练掌握全等三角形的判定与性质是解题的关键.

5. (2023 春·七年级单元测试) 如图, 已知 AD 、 BC 相交于点 O , $AB = CD$, $AM \perp BC$ 于点 M , $DN \perp BC$ 于点 N , $BN = CM$.



(1) 求证: $\triangle ABM \cong \triangle DCN$;

(2) 试猜想 OA 与 OD 的大小关系, 并说明理由.

【答案】 (1) 见解析

(2) $OA = OD$, 理由见解析

【分析】 (1) 根据 HL 可证明 $\triangle ABM \cong \triangle DCN$;

(2) 根据 AAS 证明 $\triangle AMO \cong \triangle DNO$ 可得结论.

【详解】 (1) 证明: $\because BN = CM$,

$\therefore BN + MN = MN + CM$,

即 $CN = BM$,

$\because AM \perp BC, DN \perp BC$,

$\therefore \angle AMB = \angle DNC = 90^\circ$,

在 $\text{Rt}\triangle ABM$ 和 $\text{Rt}\triangle DCN$ 中,

$$\begin{cases} AB = CD \\ BM = CN \end{cases}$$

$\therefore \text{Rt}\triangle ABM \cong \text{Rt}\triangle DCN (\text{HL})$;

(2) 解: $OA = OD$, 理由如下:

$\because \triangle ABM \cong \triangle DCN$,

$\therefore AM = DN$,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/258017024126007050>