

高级中学名校试卷

【解析】函数的定义域为 $\{x|x \neq 0\}$ ，因为 $f(-x) = \lg|x| + \cos x = f(x)$ ，

所以函数为偶函数，故排除 BD，

当 $x \geq 10$ 时， $\lg x \geq 1$ ， $-1 \leq \cos x \leq 1$ ，所以 $f(x) = \lg|x| + \cos x \geq 0$ ，

故排除 A，而 C 满足题意.

故选：C.

4. 设 $a = \lg 5$ ， $b = e^{0.1}$ ， $c = 2^{0.1}$ ，则 ()

A. $a > b > c$

B. $b > c > a$

C. $c > a > b$

D. $b > a > c$

【答案】B

【解析】函数 $y = x^{0.1}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，而 $e > 2 > 1$ ，因此 $e^{0.1} > 2^{0.1} > 1^{0.1} = 1$ ，

而 $a = \lg 5 < \lg 10 = 1$ ，所以 $b > c > a$.

故选：B.

5. 青少年视力是社会普遍关注的问题，视力情况可借助视力表测量.通常用五分记录法和小数记录法记录视力数据，五分记录法的数据 L 和小数记录法的数据 V ，满足 $L = 5 + \lg V$.已知某同学视力的五分记录法的数据为 4.9，则其视力的小数记录法的数据为 ()

$(\sqrt[10]{10} \approx 1.259)$

A. 0.8

B. 1

C. 1.3

D. 1.5

【答案】A

【解析】由题意得 $L = 4.9$ ，所以 $4.9 = 5 + \lg V$ ， $\lg V = -0.1$ ，

所以 $V = 10^{-0.1} = \frac{1}{10^{0.1}} = \frac{1}{10^{\frac{1}{10}}} \approx \frac{1}{1.259} \approx 0.8$.

故选：A.

6. 若 $0 < \alpha < \pi$ ，且 $\sin \alpha, \cos \alpha$ 是方程 $x^2 - \frac{1}{5}x + m = 0$ 的两实根，则 $\sin \alpha - \cos \alpha$ 的值是

()

A. $\frac{12}{25}$

B. $-\frac{12}{25}$

C. $\pm \frac{7}{5}$

D. $\frac{7}{5}$

【答案】D

【解析】由于 $\sin \alpha, \cos \alpha$ 是方程 $x^2 - \frac{1}{5}x + m = 0$ 的两实根，

高级中学名校试卷

所以 $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{5}$, $\sin \alpha \cos \alpha = m$,

又 $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \frac{1}{25} = 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha = 1 + 2m$, 所以 $m = -\frac{12}{25}$,

故 $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{49}{25}$,

由于 $\sin \alpha \cos \alpha = m = -\frac{12}{25} < 0$, $0 < \alpha < \pi$, 所以 $\sin \alpha > 0, \cos \alpha < 0$, 故 $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$,

因此 $\sin \alpha - \cos \alpha > 0$, 所以 $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{7}{5}$.

故选: D.

7. 已知函数 $f(x) = 2^{(a-5)x^2 - (a+1)x - 1}$ 的值域为 $(0, +\infty)$, $g(x) = \log_3(x^2 - 8x + 5b)$ 的值域为 $[2, +\infty)$, 则 $a - b =$ ()

A. 0

B. 1

C. 3

D. 5

【答案】A

【解析】因为函数 $f(x) = 2^{(a-5)x^2 - (a+1)x - 1}$ 的值域为 $(0, +\infty)$,

所以函数 $y = (a-5)x^2 - (a+1)x - 1$ 的值域为 $\mathbb{R}$, 所以 $a-5=0$, 解得 $a=5$,

因为 $g(x) = \log_3(x^2 - 8x + 5b)$ 的值域为 $[2, +\infty)$,

所以 $y = x^2 - 8x + 5b = (x-4)^2 + 5b - 16$ 的最小值为 9, 所以 $5b - 16 = 9$,

解得 $b=5$, 所以 $a-b=0$.

故选: A.

8. 若函数 $y = f(x)$ 与 $y = f(-x)$ 在区间 $[m, n]$ 上的单调性相同, 则称区间 $[m, n]$ 为

$y = f(x)$ 的“稳定区间”, 若区间 $[1, 2023]$ 为函数 $f(x) = \left| \left(\frac{1}{2} \right)^x + a \right|$ 的“稳定区间”, 则实数

a 的取值范围为 ()

A. $[-2, -1]$

B. $\left[-2, -\frac{1}{2}\right]$

C. $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$

D. $[1, 2]$

【答案】B

【解析】根据题意 $f(x) = \left| \left(\frac{1}{2} \right)^x + a \right|$, $f(-x) = \left| \left(\frac{1}{2} \right)^{-x} + a \right| = |2^x + a|$,

函数 $y = f(x)$ 与 $y = f(-x)$ 在区间 $[1, 2023]$ 上的单调性相同,

当 $a \geq 0$ 时, $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + a$ 在 $[1, 2023]$ 上单调递减,

$f(-x) = 2^x + a$ 在 $[1, 2023]$ 上单调递增, 不符合题意;

$$\text{当 } a < 0 \text{ 时, } f(x) = \left| \left(\frac{1}{2}\right)^x + a \right| = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x + a, & x < -\log_2(-a) \\ -\left(\frac{1}{2}\right)^x - a, & x \geq -\log_2(-a) \end{cases},$$

则函数 $y = f(x)$ 在 $(-\infty, -\log_2(-a))$ 上单调递减, 在 $[-\log_2(-a), +\infty)$ 上单调递增,

$$f(-x) = |2^x + a| = \begin{cases} 2^x + a, & x \geq \log_2(-a) \\ -2^x - a, & x < \log_2(-a) \end{cases},$$

则函数 $y = f(-x)$ 在 $(-\infty, \log_2(-a))$ 上单调递减, 在 $[\log_2(-a), +\infty)$ 上单调递增,

$$\text{①在 } [1, 2023] \text{ 上单调递增, 则 } \begin{cases} 1 \geq \log_2(-a) \\ 1 \geq -\log_2(-a) \end{cases}, \text{ 解得 } -2 \leq a \leq -\frac{1}{2},$$

$$\text{②在 } [1, 2023] \text{ 上单调递减, 则 } \begin{cases} \log_2(-a) > 2023 \\ -\log_2(-a) > 2023 \end{cases}, \text{ 不等式组无解,}$$

$$\text{综上所述: } a \in \left[-2, -\frac{1}{2}\right].$$

故选: B.

二、多项选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分, 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 已知幂函数 $f(x)$ 的图象经过点 $\left(2, \frac{1}{2}\right)$, 则 ()

A. 函数 $f(x)$ 为奇函数

B. 函数 $f(x)$ 在定义域上为减函数

C. 函数 $f(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$

D. 当 $x_2 > x_1 > 0$ 时, $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} > f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$

【答案】AD

【解析】设幂函数为 $f(x) = x^\alpha$, 将 $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ 代入解析式得 $\frac{1}{2} = 2^\alpha$, 故 $\alpha = -1$, 所以

$$f(x) = \frac{1}{x},$$

定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ ，因为 $f(-x) = -\frac{1}{x} = -f(x)$ ，故函数为奇函数，故 A 正确；

函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(-\infty, 0), (0, +\infty)$ 上都单调递减，但在定义域上不是减函数，故 B 错误；

显然 $f(x)$ 的值域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ ，故 C 错误；

$$\text{当 } x_2 > x_1 > 0 \text{ 时, } \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} - f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) = \frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}}{2} - \frac{1}{\frac{x_1+x_2}{2}} = \frac{x_1+x_2}{2x_1x_2} - \frac{2}{x_1+x_2} = \frac{(x_1-x_2)^2}{2x_1x_2(x_1+x_2)} > 0,$$

即满足 $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} > f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$ ，故 D 正确.

故选：AD.

10. 已知 a, b, c 是实数，则下列不等关系的表述，一定正确的有 ()

A. $a^2 + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2}$

B. 若 $ab \neq 0$ ，则 $\frac{|a|}{|b|} + \frac{|b|}{|a|} \geq 2$

C. 若 $a < b$ ，则 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

D. 若 $a < b, c < 0$ ，则 $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$

【答案】ABD

【解析】对于 A: $a^2 + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2}$ 等价于 $2a^2 + 2b^2 \geq (a+b)^2$ ，等价于 $a^2 + b^2 \geq 2ab$ ，

当且仅当 $a = b$ 时取等号，对于任意实数 a, b 都成立，故 A 正确；

对于 B: 由于 $ab \neq 0$ ，所以 $\frac{|a|}{|b|} + \frac{|b|}{|a|} \geq 2\sqrt{\frac{|a|}{|b|} \cdot \frac{|b|}{|a|}} = 2$ ，当且仅当 $\frac{|a|}{|b|} = \frac{|b|}{|a|}$ ，

即 $|a| = |b|$ 时取等号，对于任意实数 a, b 都成立，故 B 正确；

对于 C: 由于 $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab}$ ，实数 a, b 的符号不确定，故 ab 的符号也不确定，

故 C 错误；

对于 D: 由于 $c < 0$ ，则 $\frac{1}{c} < 0$ ，又因为 $a < b$ ，所以 $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ ，故 D 正确.

故选：ABD.

11. 已知函数 $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ ，下列四个结论中，正确的有 ()

A. 函数 $f(x)$ 的最小正周期为 π

B. 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{8}$ 对称

- C. 函数 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{3\pi}{8}, 0\right)$ 对称 D. 函数 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}\right]$ 上单调递增

【答案】AD

【解析】函数 $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$, 最小正周期 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$, A 选项正确;

由 $2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$, 解得函数 $f(x)$ 的图象的对称轴方程为 $x = \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$,

当 $k=0$ 时, 得函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{3\pi}{8}$ 对称, BC 选项错误;

$x \in \left[-\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}\right]$ 时, $2x - \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 是正弦函数的单调递增区间,

所以函数 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}\right]$ 上单调递增, D 选项正确.

故选: AD.

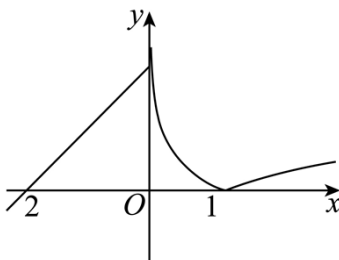
12. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x+2 & x \leq 0 \\ |\lg x| & x > 0 \end{cases}$, 方程 $f^2(x) - mf(x) - 1 = 0$ 有 4 个不同的实数根,

则下列选项正确的为 ()

- A. 函数 $f(x)$ 的零点的个数为 2
B. 实数 m 的取值范围为 $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right]$
C. 函数 $f(x)$ 无最值
D. 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增

【答案】ABC

【解析】因为函数 $f(x) = \begin{cases} x+2 & x \leq 0 \\ |\lg x| & x > 0 \end{cases}$, 可得函数图像如图:



高级中学名校试卷

由图知函数 $f(x)$ 有 2 个零点, 故 A 选项正确;

函数 $f(x)$ 没有最值, 故 C 选项正确;

函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减, 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增, 故 D 选项错误;

由于方程 $f^2(x) - mf(x) - 1 = 0$ 有 4 个不同的实数根,

令 $t = f(x)$ 则 $t^2 - mt - 1 = 0$ 有 4 个不同的实数根,

因为 $\Delta = m^2 + 4 > 0$ 恒成立,

设 $t^2 - mt - 1 = 0$ 两个不等的实根为 t_1, t_2 ,

由韦达定理知: $t_1 + t_2 = m, t_1 t_2 = -1$,

则 t_1, t_2 异号, 由图可知: $t_1 < 0, 0 < t_2 \leq 2$,

所以 $2^2 - 2m - 1 \geq 0$, 解得 $m \leq \frac{3}{2}$, 故 B 选项正确.

故选: ABC.

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 若“ $\exists x \in \mathbf{R}$, 使得 $2x^2 - mx + 1 < 0$ ”是假命题, 则实数 m 的取值范围是_____.

【答案】 $[-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$

【解析】 因为“ $\exists x \in \mathbf{R}$, 使得 $2x^2 - mx + 1 < 0$ ”是假命题,

所以“ $\forall x \in \mathbf{R}$, 使得 $2x^2 - mx + 1 \geq 0$ ”是真命题,

所以 $\Delta = m^2 - 8 \leq 0$, 解得 $m \in [-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$.

故答案为: $[-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$.

14. 若 $x \in (-2, +\infty)$, 则 $x + \frac{4}{x+2}$ 的最小值为_____.

【答案】 2

【解析】 因为 $x \in (2, +\infty)$, 所以 $x+2 \in (0, +\infty)$,

所以 $x + \frac{4}{x+2} = x+2 + \frac{4}{x+2} - 2 \geq 2\sqrt{(x+2)\left(\frac{4}{x+2}\right)} - 2 = 2$,

当且仅当 $x+2 = \frac{4}{x+2}$ 时, 即 $x=0$ 时, 等号成立.

故答案为：2.

15. 若函数 $f(x)$ 满足 $f(x) + f(\lambda x + \lambda) = \lambda$ ，则称函数 $f(x)$ 为“ λ 类期函数”. 已知函数 $g(x)$ 为“ -2 类期函数”，且曲线 $y = g(x)$ 恒过点 P ，则点 P 的坐标为_____.

【答案】 $\left(-\frac{2}{3}, -1\right)$

【解析】由题可知， $g(x) + g(-2x - 2) = -2$ ，

令 $x = -2x - 2$ 得， $x = -\frac{2}{3}$ ，故 $g\left(-\frac{2}{3}\right) + g\left(-\frac{2}{3}\right) = -2$ ， $g\left(-\frac{2}{3}\right) = -1$ ，

所以曲线 $y = g(x)$ 恒过点 $P\left(-\frac{2}{3}, -1\right)$.

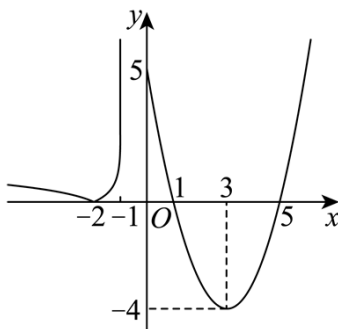
故答案为： $\left(-\frac{2}{3}, -1\right)$.

16. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |\lg(-x-1)|, & x < -1 \\ x^2 - 6x + 5, & x \geq 0 \end{cases}$ ，若函数 $g(x) = [f(x)]^2 - bf(x) + 5$ 有 7 个零点，

则实数 b 的取值范围是_____.

【答案】 $(6, +\infty)$

【解析】函数 $f(x)$ 的图象如下图所示：



令 $f(x) = t$ ，函数 $g(x) = [f(x)]^2 - bf(x) + 5$ 可化为 $y = t^2 - bt + 5$ ，

函数 $g(x) = [f(x)]^2 - bf(x) + 5$ 有 7 个零点，

等价于方程 $g(x) = [f(x)]^2 - bf(x) + 5 = 0$ 有 7 个不相等的实根，

当 $t = 0$ 时， $[f(x)]^2 - bf(x) + 5 = 0$ 可有三个不相等的实根，

高级中学名校试卷

当 $t \in (0, 5]$ 时, $[f(x)]^2 - bf(x) + 5 = 0$ 可有四个不相等的实根,

当 $t \in (5, +\infty)$ 时, $[f(x)]^2 - bf(x) + 5 = 0$ 可有三个不相等的实根,

设 $t^2 - bt + 5 = 0$ 的两根为 t_1, t_2 , 且 $t_1 < t_2$,

若 $t_1 = 0, t_2 \in (0, 5]$, 方程 $t^2 - bt + 5 = 0$ 无零根, 不符合题意,

若 $t_1 \in (0, 5), t_2 \in (5, +\infty)$, $y = g(t) = t^2 - bt + 5$,

$$\text{由题意可知: } \begin{cases} \Delta = (-b)^2 - 20 > 0 \\ g(0) = 5 > 0 \\ g(5) = 25 - 5b + 5 < 0 \end{cases} \Rightarrow b > 6,$$

若 $t_1 = 5, t_2 \in (5, +\infty)$, 则有 $5^2 - 5b + 5 = 0 \Rightarrow b = 6$, 此时 $t^2 - 6t + 5 = 0$,

这时 $t_2 = 1$, 显然不满足 $t_2 \in (5, +\infty)$,

综上所述: 实数 b 的取值范围是 $(6, +\infty)$.

故答案为: $(6, +\infty)$.

四、解答题 本题共 6 小题, 共 70 分. 第 17 题 10 分, 其它每题 12 分, 解答应写出文字说明、证明过程或验算步骤.

17. 已知全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \left\{ x \mid \frac{x-5}{x-2} \leq 0 \right\}$, $B = \{ x \mid a-1 < x < a+1, a \in \mathbf{R} \}$.

(1) 当 $a = 2$ 时, 求 $(\complement_U A) \cap (\complement_U B)$;

(2) 若 $x \in A$ 是 $x \in B$ 的必要不充分条件, 求实数 a 的取值范围.

解: (1) 因为 $A = \left\{ x \mid \frac{x-5}{x-2} \leq 0 \right\} = \{ x \mid 2 < x \leq 5 \}$, 当 $a = 2$ 时, $B = \{ x \mid 1 < x < 3 \}$,

因为全集 $U = \mathbf{R}$, 则 $\complement_U A = \{ x \mid x \leq 2 \text{ 或 } x > 5 \}$, $\complement_U B = \{ x \mid x \leq 1 \text{ 或 } x \geq 3 \}$,

因此, $(\complement_U A) \cap (\complement_U B) = \{ x \mid x \leq 1 \text{ 或 } x > 5 \}$.

(2) 易知集合 $B = \{ x \mid a-1 < x < a+1, a \in \mathbf{R} \}$ 为非空集合,

因为 $x \in A$ 是 $x \in B$ 的必要不充分条件, 则 $B \not\subseteq A$,

所以, $\begin{cases} a-1 \geq 2 \\ a+1 \leq 5 \end{cases}$, 解得 $3 \leq a \leq 4$,

因此, 实数 a 的取值范围是 $\{a | 3 \leq a \leq 4\}$.

$$18. \text{ 已知 } \alpha \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right), f(\alpha) = \frac{\sin\left(-\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \tan(\pi - \alpha)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \tan(2\pi - \alpha)}.$$

(1) 化简 $f(\alpha)$;

(2) 若 $f(\alpha) = \frac{2\sqrt{6}}{5}$, 求 $\cos(\pi + \alpha)$ 的值.

解: (1) 由题意可得: $f(\alpha) = \frac{-\cos \alpha \cdot \sin \alpha \cdot (-\tan \alpha)}{\cos \alpha \cdot (-\tan \alpha)} = -\sin \alpha$.

(2) 因为 $f(\alpha) = -\sin \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$, 则 $\sin \alpha = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$,

且 $\alpha \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, 则 $\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \left(-\frac{2\sqrt{6}}{5}\right)^2} = -\frac{1}{5}$,

所以 $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha = \frac{1}{5}$.

19. 已知 $y = f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 当 $x \leq 0$ 时, $f(x) = x^2 + 2x$.

(1) 求函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的解析式;

(2) 若函数 $f(x)$ 在区间 $[-1, m-1]$ 单调递增, 求实数 m 的取值范围.

解: (1) 设 $x > 0$, 则 $-x < 0$, 所以 $f(-x) = x^2 - 2x$,

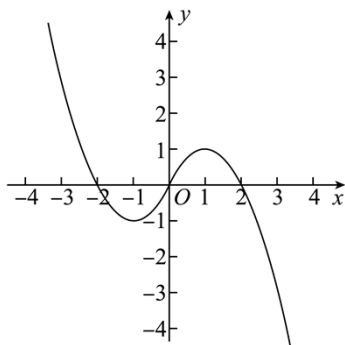
因为函数 $y = f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,

所以 $f(x) = -f(-x) = -x^2 + 2x$,

又因函数 $y = f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 可得 $f(0) = 0$,

所以函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的解析式为 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & x \leq 0 \\ -x^2 + 2x, & x > 0 \end{cases}$.

(2) 作出函数 $y = f(x)$ 的图象, 如图所示:



由函数图象可知, $y = f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上单调递增,

要使函数 $y = f(x)$ 在区间 $[-1, m-1]$ 上单调递增,

则满足 $\begin{cases} m-1 > -1 \\ -1 < m-1 \leq 1 \end{cases}$, 解得 $0 < m \leq 2$,

所以实数 m 的取值范围为 $(0, 2]$.

20. 某工厂产生的废气, 过滤后排放, 过滤过程中废气的污染物含量 P (单位: mg/L)

与时间 t (单位: h) 间的关系为 $P = P_0 e^{-kt}$, 其中 P_0 , k 是正的常数. 如果在前 $5h$ 消除了 10% 的污染物, 请解决下列问题:

(1) $10h$ 后还剩百分之几的污染物?

(2) 污染物减少 50% 需要花多少时间 (精确到 $1h$)? (参考数据: $\lg 2 \approx 0.301$, $\lg 3 \approx 0.477$)

解: (1) 由 $P = P_0 e^{-kt}$ 可知, 当 $t = 0$ 时, $P = P_0$; 当 $t = 5$ 时, $P = (1 - 10\%)P_0$,

于是有 $(1 - 10\%)P_0 = P_0 e^{-5k}$, 解得 $k = -\frac{1}{5} \ln 0.9$, 那么 $P = P_0 0.9^{\frac{t}{5}}$. 所以,

当 $t = 10$ 时, $P = 0.81P_0$, 即 $10h$ 后还剩下 81% 的污染物.

(2) 当 $P = 50\%P_0$ 时, 有 $0.5P_0 = P_0 0.9^{\frac{t}{5}}$,

解得 $t = 5 \log_{0.9} 0.5 = -5 \log_{0.9} 2 = -5 \times \frac{\lg 2}{\lg 0.9} = -5 \times \frac{\lg 2}{2 \lg 3 - \lg 10} \approx 33$,

即污染减少 50% 大约需要花 $33h$.

21. 给出下面两个条件: ①函数 $f(x)$ 的图象与直线 $y = -1$ 只有一个交点; ②函数 $f(x)$ 的

两个零点的差的绝对值为 2 . 在这两个条件中选择一个, 将下面问题补充完整, 使函数 $f(x)$

高级中学名校试卷

的解析式确定.

已知二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 满足 $f(x+1) - f(x) = 2x - 1$, 且_____.

(1) 求 $f(x)$ 的解析式;

(2) 若函数 $g(x) = (2t-1)f(3^x) - 2 \times 3^x - 2$ 有且仅有一个零点, 求实数 t 的取值范围.

解: (1) 因为二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 满足 $f(x+1) - f(x) = 2x - 1$,

$$f(x+1) - f(x) = a(x+1)^2 + b(x+1) + c - ax^2 - bx - c = 2ax + a + b = 2x - 1,$$

$$\text{所以 } \begin{cases} 2a = 2 \\ a + b = -1 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases}, \text{ 所以 } f(x) = x^2 - 2x + c, \text{ 对称轴为 } x = 1,$$

选①, 因为函数 $f(x)$ 的图象与直线 $y = -1$ 只有一个交点, 所以 $f(1) = 1 - 2 + c = -1$,

解得 $c = 0$, 所以 $f(x)$ 的解析式为 $f(x) = x^2 - 2x$.

选②, 设 x_1, x_2 是函数 $f(x)$ 的两个零点, 则 $|x_1 - x_2| = 2$, 且 $\Delta = 4 - 4c > 0$, 可得 $c < 1$,

由根与系数的关系可知 $x_1 + x_2 = 2$, $x_1 x_2 = c$,

$$\text{所以 } |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \sqrt{4 - 4c} = 2, \text{ 解得 } c = 0,$$

所以 $f(x)$ 的解析式为 $f(x) = x^2 - 2x$.

(2) 因为函数 $g(x) = (2t-1)f(3^x) - 2 \times 3^x - 2$ 有且仅有一个零点,

令 $n = 3^x > 0$, 所以关于 n 的方程 $(2t-1)f(n) - 2n - 2 = 0$ 有且仅有一个正实根,

因为 $f(x) = x^2 - 2x$, 所以 $(2t-1)n^2 - 4tn - 2 = 0$ 有且仅有一个正实根,

当 $2t-1=0$, 即 $t = \frac{1}{2}$ 时, 方程可化为 $-2n - 2 = 0$, 解得 $n = -1$, 不符合题意;

当 $2t-1 > 0$, 即 $t > \frac{1}{2}$ 时, 函数 $y = (2t-1)x^2 - 4tx - 2$ 的图象是开口向上的抛物线,

且恒过点 $(0, -2)$, 所以方程 $(2t-1)n^2 - 4tn - 2 = 0$ 恒有一个正实根;

当 $2t-1 < 0$, 即 $t < \frac{1}{2}$ 时, 要使得 $(2t-1)n^2 - 4tn - 2 = 0$ 有且仅有一个正实根,

$$\text{则有} \begin{cases} V=16t^2+8(2t-1)=0 \\ \frac{2t}{2t-1} > 0 \end{cases}, \text{解得 } t = -\frac{\sqrt{3}+1}{2},$$

综上, 实数 t 的取值范围为 $\left\{-\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right\} \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

22. 定义: 若对定义域内任意 x , 都有 $f(x+a) > f(x)$ (a 为正常数), 则称函数 $f(x)$ 为“ a 距”增函数.

(1) 若 $f(x) = 2^x - x$, $x \in (0, +\infty)$, 试判断 $f(x)$ 是否为“1 距”增函数, 并说明理由;

(2) 若 $f(x) = x^3 - \frac{1}{4}x + 4$, $x \in \mathbf{R}$ 是“ a 距”增函数, 求 a 的取值范围;

(3) 若 $f(x) = 2^{x^2+k|x|}$, $x \in (-1, +\infty)$, 其中 $k \in \mathbf{R}$, 且为“2 距”增函数, 求 $f(x)$ 的最小值.

解: (1) 任意 $x > 0$, $f(x+1) - f(x) = [2^{x+1} - (x+1)] - (2^x - x) = 2^x - 1$,

因为 $x > 0$, $2 > 1$, 所以 $2^x > 1$, 所以 $f(x+1) - f(x) > 0$, 即 $f(x)$ 是“1 距”增函数.

$$(2) f(x+a) - f(x) = \left[(x+a)^3 - \frac{1}{4}(x+a) + 4\right] - \left(x^3 - \frac{1}{4}x + 4\right) = 3x^2a + 3xa^2 + a^3 - \frac{1}{4}a,$$

因为 $f(x)$ 是“ a 距”增函数, 所以 $3x^2a + 3xa^2 + a^3 - \frac{1}{4}a > 0$ 恒成立,

因为 $a > 0$, 所以 $3x^2 + 3xa + a^2 - \frac{1}{4} > 0$ 在 $x \in \mathbf{R}$ 上恒成立,

所以 $\Delta = 9a^2 - 12\left(a^2 - \frac{1}{4}\right) < 0$, 解得 $a^2 > 1$, 因为 $a > 0$, 所以 $a > 1$.

(3) 因为 $f(x) = 2^{x^2+k|x|}$, $x \in (-1, +\infty)$, 且为“2 距”增函数,

所以 $x > -1$ 时, $f(x+2) > f(x)$ 恒成立,

即 $x > -1$ 时, $2^{(x+2)^2+k|x+2|} > 2^{x^2+k|x|}$ 恒成立,

所以 $(x+2)^2 + k|x+2| > x^2 + k|x|$,

当 $x \geq 0$ 时, $(x+2)^2 + k(x+2) > x^2 + kx$, 即 $4x + 4 + 2k > 0$ 恒成立,

所以 $4 + 2k > 0$, 得 $k > -2$;

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/258024026116007014>