

重难点突破 04 导数中的取整问题

一. 选择题 (共 6 小题)

1. (2023 春·孝感期中) 已知函数 $f(x) = (kx - 2)e^x - x (x > 0)$, 若 $f(x) < 0$ 的解集为 (m, n) , 且 (m, n) 中恰有一个整数, 则实数 k 的取值范围是 ()

A. $[\frac{1}{e^2} + 1, \frac{1}{e} + 2)$

B. $[\frac{1}{e^3} + \frac{2}{3}, \frac{1}{e^2} + 1)$

C. $(-\infty, \frac{1}{e} + 2)$

D. $(-\infty, \frac{1}{e^2} + 1)$

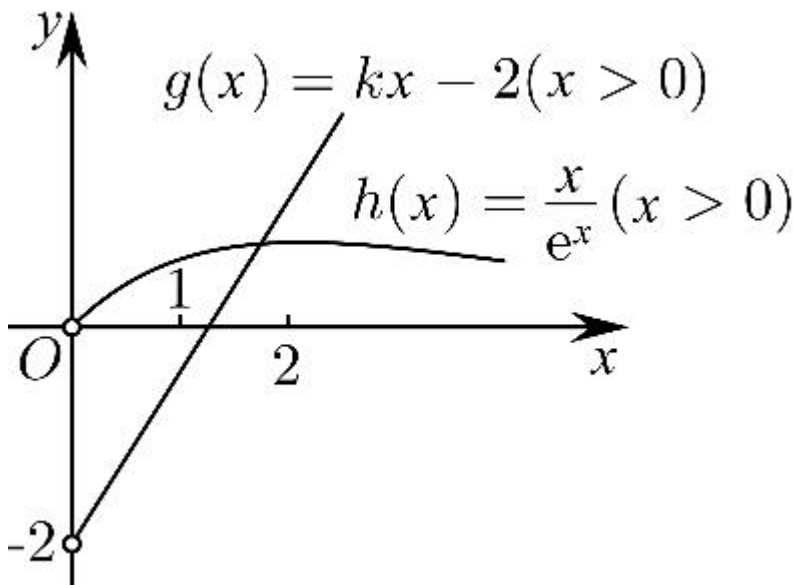
【解答】解: 由 $f(x) < 0$, 得 $kx - 2 < \frac{x}{e^x}$,

令 $h(x) = \frac{x}{e^x} (x > 0)$, 则 $h'(x) = \frac{1-x}{e^x} (x > 0)$,

当 $0 < x < 1$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 上递增,

当 $x > 1$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上递减,

令 $g(x) = kx - 2 (x > 0)$, 画出 $h(x)$, $g(x)$ 的图象如图:



根据条件, 由图象, 可得
$$\begin{cases} k > 0 \\ g(1) < h(1) \\ g(2) \geq h(2) \end{cases}$$
 解得 $k \in [\frac{1}{e^2} + 1, \frac{1}{e} + 2)$.

故选: A.

2. (2023 春·石家庄期中) 已知函数 $f(x) = xe^{x+1} - kx + k$, 有且只有一个负整数 x_0 , 使 $f(x_0) = 0$

成立，则 k 的取值范围是()

A. $(\frac{2}{3e}, \frac{1}{2}]$

B. $(0, \frac{1}{2}]$

C. $[\frac{2}{3e}, \frac{1}{2})$

D. $[0, \frac{1}{2})$

【解答】解：已知函数 $f(x) = xe^{x+1} - kx + k$ ，则 $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow xe^{x+1} \geq kx - k$ 有且只有一个负整数解。

令 $g(x) = xe^{x+1}$ ，则 $g'(x) = (x+1)e^{x+1}$ ，

当 $x < -1$ 时， $g'(x) < 0$ ，

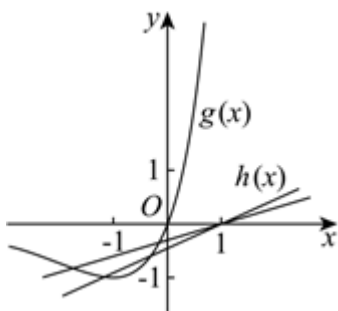
当 $x > -1$ 时， $g'(x) > 0$ ，

所以 $g(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 上递减，在 $(-1, +\infty)$ 上递增，

当 $x = -1$ 时， $g(x)$ 取得最小值为 $g(-1) = (-1) \times e^{-1+1} = -1$ ，

设 $h(x) = kx - k = k(x-1)$ ，则 $h(x)$ 恒过点 $(1, 0)$ ，

在同一坐标系中分别作出 $y = g(x)$ 和 $y = h(x)$ 的图象，如图所示：



显然 $x_0 = -1$ ，依题意得 $g(-1) \geq h(-1)$ 且 $g(-2) > h(-2)$ ，即 $-1 \geq -2k$ 且 $-\frac{2}{e} > -3k$ ，解得

$$\frac{2}{3e} < k \leq \frac{1}{2},$$

所以实数 k 的取值范围是 $(\frac{2}{3e}, \frac{1}{2}]$ 。

故选：A。

3. (2023 春•安徽期中) 已知函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ，直线 $l: y = a(2x-1)$ ，若有且仅有一个整数

x_0 ，使得点 $P(x_0, f(x_0))$ 在直线 l 上方，则实数 a 的取值范围是()

A. $[\ln 2, \ln 3)$

B. $(\ln 2, \ln 3]$

C. $[\frac{\ln 3}{15}, \frac{\ln 2}{6})$

D. $(\frac{\ln 3}{15}, \frac{\ln 2}{6}]$

【解答】解：点 $P(x_0, f(x_0))$ 在直线 l 上方，即 $\frac{\ln x_0}{x_0} > a(2x_0 - 1)$ ，

因为 $x > 0$ ，

所以 $\frac{\ln x}{x} > a(2x - 1)$ 有且仅有一个正整数解。

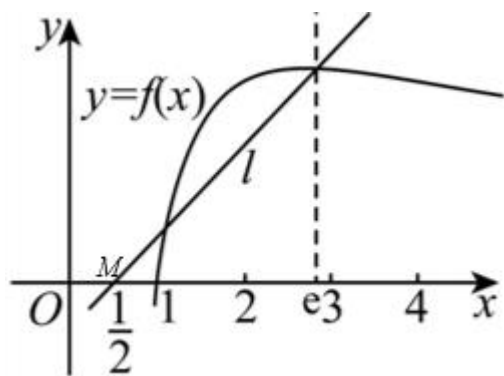
$$f(x) = \frac{\ln x}{x}, f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2},$$

则 $x \in (0, e)$ ， $f'(x) > 0$ ， $f(x)$ 单调递增；

$x \in (e, +\infty)$ ， $f'(x) < 0$ ， $f(x)$ 单调递减，

$$\text{所以 } f(x)_{\max} f(e) = \frac{1}{e}.$$

又 $0 < x < 1$ ， $f(x) < 0$ ； $x = 1$ ， $f(x) = 0$ ； $x > 1$ ， $f(x) > 0$ ，故可得 $f(x)$ 图象如下图，



直线 $l: y = a(2x - 1)$ 过定点 $M(\frac{1}{2}, 0)$ ，

当 $a \leq 0$ ， $\frac{\ln x}{x} > a(2x - 1)$ 有无数个正整数解，不合题意，故 $a > 0$ ，

又 $\frac{\ln x}{x} > a(2x - 1)$ 有且仅有一个正整数解，故 2 是唯一的正整数解，即

$$\begin{cases} \frac{\ln 2}{2} > a(4 - 1) \\ \frac{\ln 3}{3} \leq a(6 - 1) \end{cases} \Rightarrow \frac{\ln 3}{15} \leq a < \frac{\ln 2}{6}.$$

故选：C。

4. (2022 秋·萍乡期末) 已知函数 $f(x) = ax + \ln a$ ， $g(x) = x + e^x - \ln x$ ，若关于 x 的不等式

$f(x) > g(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内有且只有两个整数解，则实数 a 的取值范围为()

- A. $(e, e^2]$ B. $(e, \frac{e^2}{2}]$ C. $(e^2, e^3]$ D. $(\frac{e^2}{2}, \frac{e^3}{3}]$

【解答】解：显然 $a > 0$ ，

由 $f(x) > g(x)$ ，得 $ax + \ln a > x + e^x - \ln x$ ，得 $ax + \ln(ax) > e^x + x$ ，

得 $e^{\ln(ax)} + \ln(ax) > e^x + x$ ，

令 $y = e^x + x$ ， $x > 0$ ，则 $y' = e^x + 1 > 1 > 0$ ，

所以函数 $y = e^x + x$ 区间 $(0, +\infty)$ 内为增函数，

所以 $e^{\ln(ax)} + \ln(ax) > e^x + x$ 可化为 $\ln(ax) > x$ ，即 $ax > e^x$ ，即 $a > \frac{e^x}{x}$ ，

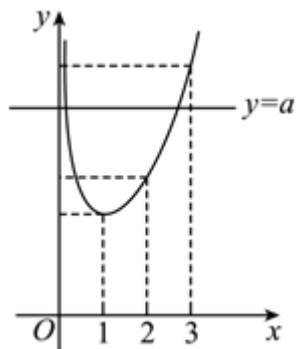
所以关于 x 的不等式 $a > \frac{e^x}{x}$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内有且只有两个整数解，

令 $g(x) = \frac{e^x}{x} (x > 0)$ ，则 $g'(x) = \frac{e^x \cdot x - e^x}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$ ，

令 $g'(x) > 0$ ，得 $x > 1$ ，令 $g'(x) < 0$ ，得 $0 < x < 1$ ，

所以 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上为减函数，在 $(1, +\infty)$ 上为增函数，

因为关于 x 的不等式 $a > \frac{e^x}{x}$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内有且只有两个整数解，



结合图形可知，满足题意的整数解只能是 1 和 2，

所以 $g(2) < a < g(3)$ ，即 $\frac{e^2}{2} < a < \frac{e^3}{3}$ 。

故选：D。

5. (2023·长沙模拟) 已知函数 $f(x) = (mx-1)e^x - x^2$ ，若不等式 $f(x) < 0$ 的解集中恰有两个不同的正整数解，则实数 m 的取值范围()

A. $(\frac{2}{e^2} + \frac{1}{2}, \frac{1}{e} + 1)$

B. $[\frac{2}{e^2} + \frac{1}{2}, \frac{1}{e} + 1)$

C. $[\frac{3}{e^3} + \frac{1}{3}, \frac{2}{e^2} + \frac{1}{2})$

D. $(\frac{3}{e^3} + \frac{1}{3}, \frac{2}{e^2} + \frac{1}{2})$

【解答】解：函数 $f(x) = (mx-1)e^x - x^2$ ，不等式 $f(x) < 0$ 化为： $mx-1 < \frac{x^2}{e^x}$ 。

分别令 $h(x) = mx - 1$, $g(x) = \frac{x^2}{e^x}$.

$$g'(x) = \frac{x(2-x)}{e^x}.$$

可得：函数 $g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减，在 $(0, 2)$ 上单调递增，在 $(2, +\infty)$ 上单调递减.

$$g(0) = 0, \quad g(2) = \frac{4}{e^2}. \text{ 如图所示.}$$

Q 不等式 $f(x) < 0$ 的解集中恰有两个不同的正整数解，

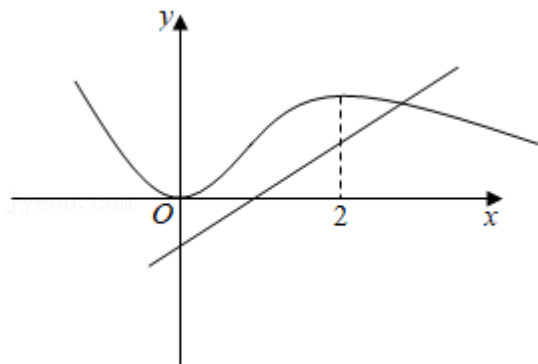
$\therefore$ 正整数解为 1, 2,

$$\therefore \begin{cases} h(2) < g(2) \\ h(3) \leq g(3) \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} 2m-1 < \frac{4}{e^2} \\ 3m-1 \leq \frac{9}{e^3} \end{cases}.$$

$$\text{解得: } \frac{3}{e^3} + \frac{1}{3} \leq m < \frac{2}{e^2} + \frac{1}{2}.$$

$$\therefore \text{数 } m \text{ 的取值范围是 } \left[\frac{3}{e^3} + \frac{1}{3}, \frac{2}{e^2} + \frac{1}{2} \right).$$

故选：C.



6. (2023·浑南区一模) 已知不等式 $x \ln x + (x+1)k < 2x \ln 2$ 的解集中仅有 2 个整数，则实数 k

的取值范围是 ()

A. $(0, \frac{3}{4} \ln \frac{4}{3})$

B. $(\frac{3}{4} \ln \frac{4}{3}, \frac{2}{3} \ln 2)$

C. $[\frac{2}{3} \ln 2, +\infty)$

D. $[\frac{3}{4} \ln \frac{4}{3}, \frac{2}{3} \ln 2)$

【解答】解：法 1°：由 $x \ln x + (x+1)k < 2x \ln 2$ ，得 $k < \frac{x \ln 4 - x \ln x}{x+1}$ ，

$$\text{令 } f(x) = \frac{x \ln 4 - x \ln x}{x+1}, \text{ 则 } f'(x) = \frac{-\ln x - x + \ln 4 - 1}{(x-1)^2},$$

设 $\ln x_0 + x_0 - \ln 4 + 1 = 0$ ，即 $\ln x_0 = -x_0 + \ln 4 - 1$ ，可得 $x_0 \in (0, 1)$ ，

$f(x)$ 在 $(0, x_0)$ 单调递增, 在 $(x_0, +\infty)$ 单调递减,

当 $k < f(x)$ 的解中仅有 2 个整数为 1, 2,

则需满足 $\begin{cases} k < f(2) \\ k \leq f(3) \end{cases}$, 可得 $\frac{3}{4} \ln \frac{4}{3}, k < \frac{2}{3} \ln 2$;

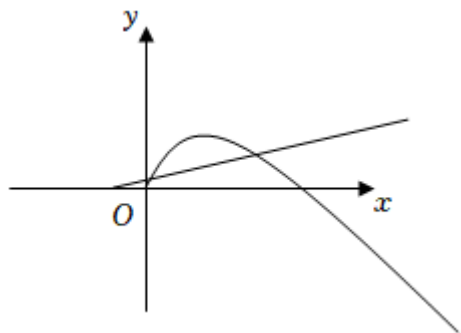
法 2°: 由 $x \ln x + (x+1)k < 2x \ln 2$, 得 $k(x+1) < x \ln 4 - x \ln x$,

设 $f(x) = k(x+1)$, $g(x) = x \ln 4 - x \ln x$, $g'(x) = \ln 4 - \ln x - 1$,

令 $g'(x) = 0$, 得 $x = \frac{4}{e}$, 即 $g(x)$ 在 $(0, \frac{4}{e})$ 单调递增, 在 $(\frac{4}{e}, +\infty)$ 单调递减,

当 $k < 0$ 时, 可以有无数个整数解, 不满足题意;

当 $k > 0$ 时, 如图所示:



需满足 $\begin{cases} f(2) < g(2) \\ f(3) \leq g(3) \end{cases}$, 得 $\frac{3}{4} \ln \frac{4}{3}, k < \frac{2}{3} \ln 2$,

故选: D.

二. 多选题 (共 6 小题)

7. (2023 春·浙江期中) 对于函数 $f(x) = xe^x$, 则下列说法正确的是 ()

A. $f(x)$ 有极大值 $2e^2$, 没有极小值

B. $f(x)$ 有极小值 $-\frac{1}{e}$, 没有极大值

C. 若关于 x 的不等式 $f(x) < a(x-1)$ 有唯一的负整数解, 则实数 a 的取值范围是 $[\frac{2}{3e^2}, \frac{1}{2e})$

D. 若过点 $P(1, m)$ 与曲线 $y = f(x)$ 相切的直线有 3 条, 则实数 m 的取值范围是 $(-\frac{5}{e^2}, 0)$

【解答】解: 对于 A、B: $f'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x$,

令 $f'(x)=0$ 得 $x=-1$,

所以在 $(-\infty, -1)$ 上 $f'(x)<0$, $f(x)$ 单调递减,

在 $(-1, +\infty)$ 上 $f'(x)>0$, $f(x)$ 单调递增,

所以 $f(x)_{\text{极小值}} = f(-1) = -\frac{1}{e}$, 没有极大值, 故 A 错误, B 正确;

对于 C : 由上可知 $f(x)_{\text{极小值}} = f(-1) = -\frac{1}{e}$,

$x \rightarrow -\infty$ 时, $f(x) \rightarrow 0$; $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$,

当 $a=0$ 时, 不等式 $f(x) < a(x-1) = 0$, 有无数个负整数解,

当 $a < 0$ 时, $y = a(x-1)$ 恒过点 $(1, 0)$,

此时 $y = f(x)$ 与 $y = a(x-1)$ 交点的横坐标为正数, 不妨设为 x_0

所以当 $x < x_0$ 时, $f(x) < a(x-1)$,

所以 $f(x) < a(x-1)$ 有无数个负整数解,

当 $a > 0$ 时, 若不等式 $f(x) < a(x-1)$ 有唯一的负整数解,

$$\text{则} \begin{cases} f(0) > a(0-1) \\ f(-1) < a(-1-1) \\ f(-2) \dots a(-2-1) \end{cases}, \text{解得 } \frac{2}{3e^2} < a < \frac{1}{2e},$$

综上所述, a 的取值范围为 $[\frac{2}{3e^2}, \frac{1}{2e})$, 故 C 正确;

对于 D : 设切点的坐标为 (x_0, y_0) ,

所以 $k_{\text{切}} = f'(x_0) = (x_0 + 1)e^{x_0}$, 且 $y_0 = f(x_0) = x_0 e^{x_0}$,

又切线过点 $P(1, m)$,

$$\text{所以 } k_{\text{切}} = \frac{y_0 - m}{x_0 - 1} = \frac{x_0 e^{x_0} - m}{x_0 - 1},$$

$$\text{所以 } (x_0 + 1)e^{x_0} = \frac{x_0 e^{x_0} - m}{x_0 - 1},$$

$$\text{所以 } m = (-x_0^2 + x_0 + 1)e^{x_0},$$

因为过点 $P(1, m)$ 与曲线 $y = f(x)$ 相切的直线有 3 条，

所以方程 $m = (-x_0^2 + x_0 + 1)e^{x_0}$ 有三个解，

令 $h(x) = (-x^2 + x + 1)e^x$ ，

$$h'(x) = (-2x + 1)e^x + (-x^2 + x + 1)e^x = (-x^2 - x + 2)e^x = -(x + 2)(x - 1)e^x，$$

所以在 $(-\infty, -2)$ 上， $h'(x) < 0$ ， $h(x)$ 单调递减，

在 $(-2, 1)$ 上， $h'(x) > 0$ ， $h(x)$ 单调递增，

在 $(1, +\infty)$ 上， $h'(x) < 0$ ， $h(x)$ 单调递减，

所以 $h(x)_{\text{极小值}} = h(-2) = -5e^{-2} < 0$ ， $h(x)_{\text{极大值}} = h(1) = e > 0$ ，

所以 $x \rightarrow -\infty$ 时， $h(x) \rightarrow 0$ ； $x \rightarrow +\infty$ 时， $h(x) \rightarrow -\infty$ ，

所以 $-5e^{-2} < m < 0$ ，故 D 正确，

故选：BCD。

8. (2023·黄州区校级三模) 已知函数 $f(x) = \ln x - a(x^3 - x^2)$ ，若不等式 $f(x) > 0$ 有且只有三个整数解，则实数 a 的取值可以为()

A. $\frac{\ln 5}{100}$

B. $\frac{\ln 2}{25}$

C. $\frac{\ln 2}{24}$

D. $\frac{\ln 5}{24}$

【解答】解：因为 $f(x) = \ln x - a(x^3 - x^2)$ 定义域为 $(0, +\infty)$ ，由 $f(x) > 0$ ，

可得 $\frac{\ln x}{x^2} > a(x - 1)$ ，

即不等式 $\frac{\ln x}{x^2} > a(x - 1)$ 有且只有三个整数解，

令 $g(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ ，则 $g'(x) = \frac{1 - 2\ln x}{x^3}$ ，所以当 $0 < x < \sqrt{e}$ 时 $g'(x) > 0$ ，

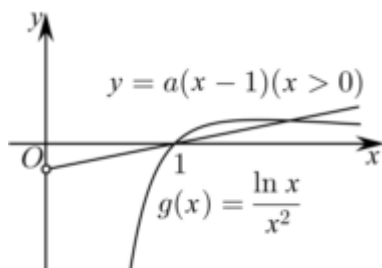
当 $x > \sqrt{e}$ 时 $g'(x) < 0$ ，则 $g(x)$ 在 $(0, \sqrt{e})$ 上单调递增，在 $(\sqrt{e}, +\infty)$ 上单调递减，

又 $g(1) = 0$ ，

所以当 $0 < x < 1$ 时 $g(x) < 0$ ，当 $x > 1$ 时 $g(x) > 0$ ，

易知函数 $y = a(x - 1)(x > 0)$ 的图象恒过点 $(1, 0)$ ，

在同一平面直角坐标系中作出 $y = a(x-1)(x > 0)$ 与 $g(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ 的图象如下图所示：



由题意及图象可知 $a > 0$ ，要使不等式 $\frac{\ln x}{x^2} > a(x-1)$ 有且只有三个整数解，

$$\text{则 } \begin{cases} (4-1)a < g(4) \\ (5-1)a \leq g(5) \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} 3a < \frac{\ln 4}{16} \\ 4a \leq \frac{\ln 5}{25} \end{cases}, \text{ 解得 } \frac{\ln 5}{100} \leq a < \frac{\ln 2}{24},$$

故符合题意的有 A 、 B 。

故选： AB 。

9. (2023·泰安二模) 已知函数 $f(x) = (2x-1)e^x - ax^2 - bx + b$ ， $a, b \in \mathbb{R}$ 。()

A. 若曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程为 $2x - y - 2 = 0$ ，且过点 $(1, e-2)$ ，则 $a = -1, b = 2$

B. 当 $a = b$ 且 $0 < a < \frac{1}{e}$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增

C. 当 $a = b$ 时，若函数 $f(x)$ 有三个零点，则 $a \in (\frac{8\sqrt{e}}{5e}, 1) \cup (e, +\infty)$

D. 当 $a = 0$ 时，若存在唯一的整数 x_0 ，使得 $f(x_0) < 0$ ，则 $b \in [\frac{3}{2e}, 1) \cup (3e^2, \frac{5}{2}e^3]$

【解答】解：A 选项， $f'(x) = (2x+1)e^x - 2ax - b$ ，

则 $f'(0) = e - a = e - 2$ ， $f'(0) = 1 - b = 2$ ，则 $a = 2, b = -1$ ，故 A 错误；

B 选项，当 $a = b$ 时， $f(x) = (2x-1)e^x - ax^2 - ax + a$ ，

$$f'(x) = (2x+1)e^x - 2ax - a = (2x+1)(e^x - a),$$

因为 $0 < a < \frac{1}{e}$ ，则 $\ln a < -1 < -\frac{1}{2}$ ，

$f'(x) > 0 \Rightarrow x < \ln a$ 或 $x > -\frac{1}{2} \Rightarrow f(x)$ 在 $(-\infty, \ln a), (-\frac{1}{2}, +\infty)$ 上单调递增，

则 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，故 B 正确；

C 选项, 当 $a=b$ 时, 令 $f(x)=(2x-1)e^x-ax^2-ax+a=0$,

注意到当 $x^2+x-1=0$ 时, $f(x)\neq 0$, 则 $a=\frac{(2x-1)e^x}{x^2+x-1}$,

则函数 $f(x)$ 有三个零点, 相当于直线 $y=a$ 与函数 $y=\frac{(2x-1)e^x}{x^2+x-1}$ 的图象有三个交点.

令 $g(x)=\frac{(2x-1)e^x}{x^2+x-1}$, 其中 $x\neq\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$,

$$g'(x)=\frac{x(2x+1)(x-1)e^x}{(x^2+x-1)^2}$$

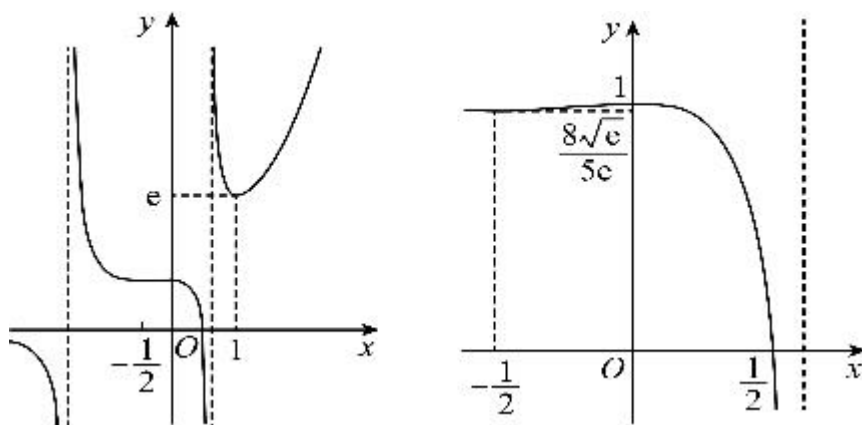
$g'(x)>0\Rightarrow-\frac{1}{2}<x<0$ 或 $x>1$, 则 $g(x)$ 在 $(-\frac{1}{2}, 0)$, $(1, +\infty)$ 上单调递增,

$g'(x)<0\Rightarrow x<\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ 或 $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}<x<-\frac{1}{2}$ 或 $0<x<\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ 或 $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}<x<1$,

则 $g(x)$ 在 $(-\infty, \frac{-1-\sqrt{5}}{2})$, $(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, -\frac{1}{2})$, $(0, \frac{-1+\sqrt{5}}{2})$, $(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, 1)$ 上单调递减,

又 $x\rightarrow-\infty$, $g(x)\rightarrow 0$, $x\rightarrow+\infty$, $g(x)\rightarrow+\infty$,

则可得 $g(x)$ 大致图象如下,



则由图可得, 当 $a\in(\frac{8\sqrt{e}}{5e}, 1)\cup(e, +\infty)$ 时, 直线 $y=a$ 与函数 $y=\frac{(2x-1)e^x}{x^2+x-1}$ 图象有三个交点,

即此时函数 $f(x)$ 有三个零点, 故 C 正确;

D 选项, 由题可得, $e^{x_0}(2x_0-1)<a(x_0-1)$,

即存在唯一整数 x_0 , 使得 $h(x)=e^x(2x-1)$ 的图象在 $n(x)=a(x-1)$ 下方,

则 $h'(x)>0\Rightarrow x>-\frac{1}{2}$, $h'(x)<0\Rightarrow x<-\frac{1}{2}$,

得 $h(x)$ 在 $(-\infty, -\frac{1}{2})$ 上单调递减, 在 $(-\frac{1}{2}, +\infty)$ 上单调递增,

又 $x\rightarrow-\infty$, $h(x)\rightarrow 0$, $x\rightarrow+\infty$, $h(x)\rightarrow+\infty$, $n(x)=a(x-1)$ 过定点 $(1, 0)$,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。

如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/258053102067006130>