

4.3.1 等比数列的概念

情景导入

1. 两河流域发掘的古巴比伦时期的泥板上记录了下面的数列：

$9, 92, 93, \dots, 910;$ ①

$100, 100^2, 100^3, \dots, 10010;$ ②

$5, 52, 53, \dots, 510;$ ③



情景导入

2. 《庄子·天下》中提到：“一尺之棰，日取其半，万世不竭。”如果把“一尺之棰”的长度看成单位“1”，那么从第1天开始，各天得到的“棰”的长度依次是：

设 木 棰 长 度 为	第 一 天 取 半	第 二 天 取 半	第 三 天 取 半	第 四 天 取 半	·	第 n 天 取 半	
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	+	$\frac{1}{32}$	+
木棰长度	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	8	16	...	$\frac{1}{2^n}$	”

情景导入

3. 在营养和生存空间没有限制的情况下，某种细菌每20 min 就通过分裂繁殖一代，那么一个这种细菌从第1次分裂开始，各次分裂产生的后代个数依次是：

分裂次数	细菌个数
第一次	2
第二次	4
第三次	8
第 n 次	2^n

2, 4, 8, 16, 32, 64, ...⑤

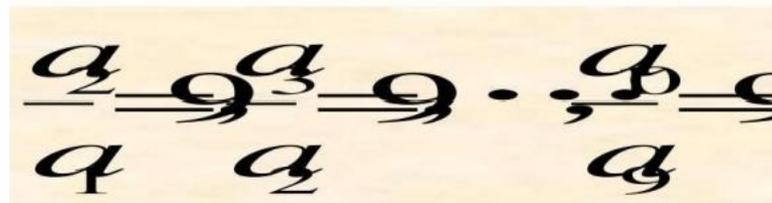
探究新知

思考：请同学们仔细观察以下五个数列，类比等差数列的研究，你认为可以通过**怎样的运算**发现以下数列的取值规律？你发现了什么规律？

$9, 9^2, 9^3, \dots, 9^{10};$ ①

如果用 $\{a_n\}$ 表示数列①, 那么有

$100, 100^2, 100^3, \dots, 100^{10};$ ②


$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q$$

$5, 5^2, 5^3, \dots, 5^{10};$ ③

取值规律：从第2项起，每一项与它的前一项的比都等于9.

$2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots$ ④

$2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots$ ⑤

共同特点：从第二项起，每一项与前一项的比都等于同一个常数.

探究新知

探究1: 类比等差数列的概念，你能抽象出等比数列的概念吗？

等差数列

定义

如果一个数列从第二项起，每一项与它的前一项的差都等于同一个常数，那么这个数列就叫做等差数列。

常数叫做等差数列的公差。

公差通常用字母d表示

符号

$$a_n - a_{n-1} = d \quad (n \in \mathbb{N}^* \text{ 且 } n \geq 2)$$

等比数列

如果一个数列从第二项起，每一项与它的前一项的比都等于同一个常数，那么这个数列就叫做等比数列。

常数叫做等比数列的公比

公比通常用字母q表示 ($q \neq 0$)

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q \quad (n \geq 2)$$

小试牛刀

1. 观察并判断下列数列是否是等比数列，是的话，指出公比，不是的话请说明理由：

(1) $1, 2, 4, 8, \dots$;

(2) $4, -8, 16, -32, 64, \dots$;

(3) $5, 5, 5, 5, 5, 5, \dots$

(4) $0, 1, 2, 4, 8, \dots$

(5) $2, 0, 2, 0, 2, \dots$

(6) $1, a, a^2, a^3, a^4, \dots$

探究新知

思考1: 等差数列的项、公差均可以是0吗?等比数列呢?

等差数列的项、公差均可以是0,
但等比数列的项和公比均不可以是0

思考2: 常数列是等差数列吗?是等比数列吗?

常数列一定是等差数列,公差为0;
非零常数列是等比数列,公比为1.

思考3: 是否存在既是等差数列又是等比数列的数列?

非零常数列既是等差数列又是等比数列,
公差为0,公比为1.

探究新知

探究2: 类比等差中项的概念, 你能抽象出等比中项的概念吗?

等差中项

如果三个数 a, A, b 组成等差数列, 那么 A 叫做 a 和 b 的等差中项.

a, A, b 成
等差数列

$$A = \frac{a+b}{2}$$

等比中项

如果三个数 a, G, b 组成等比数列, 那么 G 叫做 a 和 b 的等比中项.

a, G, b 成
等比数列

$$G^2 = a \cdot b$$

$$\text{即 } G = \pm \sqrt{ab}$$

注意: 若 a, b 同号, 则有两个等比中项; 若 a, b 异号, 则无等比中项.

探究新知

探究3: 类比等差数列的通项公式，你能根据等比数列的定义推导它的通项公式吗？

等差数列

$$\because a_2 = a_1 + d,$$

$$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d,$$

$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d,$$

...

$$\therefore a_n = a_1 + (n-1)d$$

等比数列

$$\because a_2 = a_1 q,$$

$$a_3 = a_2 q = a_1 q^2,$$

$$a_4 = a_3 q = a_1 q^3,$$

$$\therefore a_n = a_1 q^{n-1}$$

不完全归纳法

探究新知

等差数列

$$\left. \begin{array}{l} a_2 - a_1 = d \\ a_3 - a_2 = d \\ a_4 - a_3 = d \\ \dots \\ a_n - a_{n-1} = d \end{array} \right\} (n-1) \text{个}$$

累加法

累加，得 $a_n - a_1 = (n-1)d$

$$\therefore a_n = a_1 + (n-1)d$$

等比数列

$$\left. \begin{array}{l} a_2 = qa_1 \\ a_3 = qa_2 \\ \dots \\ a_n = qa_{n-1} \end{array} \right\} (n-1) \text{个}$$

累乘法

累乘，得 $\frac{a_n}{a_1} = q^{n-1}$

$$\therefore a_n = a_1 q^{n-1}$$

探究新知

等比数列的通项公式: $a = a_1 q^{n-1}$

思考: 已知等比数列的第 m 项 a_m , 公比为 q , 求通项公式 a_n .

$$\therefore a_n = a_m q^{n-m}$$

等比数列的任意一项都可以由该数列的某一项和公比表示

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：
<https://d.book118.com/258056013127006075>