

新疆乌鲁木齐市名校 2024 届数学高三上期末考试模拟试题

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知点 A 是抛物线 $x^2 = 4y$ 的对称轴与准线的交点，点 F 为抛物线的焦点，点 P 在抛物线上且满足 $|PA| = m|PF|$ ，

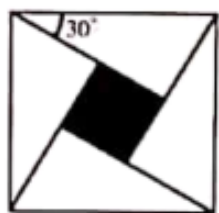
若 m 取得最大值时，点 P 恰好在以 A, F 为焦点的椭圆上，则椭圆的离心率为（ ）

- A. $\sqrt{3} - 1$ B. $\sqrt{2} - 1$ C. $\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{2} - 1}{2}$

2. 已知 α, β 是空间中两个不同的平面， m, n 是空间中两条不同的直线，则下列说法正确的是（ ）

- A. 若 $m \subset \alpha, n \subset \beta$ ，且 $\alpha \perp \beta$ ，则 $m \perp n$
- B. 若 $m \subset \alpha, n \subset \alpha$ ，且 $m \parallel \beta, n \parallel \beta$ ，则 $\alpha \parallel \beta$
- C. 若 $m \perp \alpha, n \parallel \beta$ ，且 $\alpha \perp \beta$ ，则 $m \perp n$
- D. 若 $m \perp \alpha, n \parallel \beta$ ，且 $\alpha \parallel \beta$ ，则 $m \perp n$

3. 如图所示，三国时代数学家赵爽在《周髀算经》中利用弦图，给出了勾股定理的绝妙证明.图中包含四个全等的直角三角形及一个小正方形（阴影），设直角三角形有一内角为 30° ，若向弦图内随机抛掷 500 颗米粒（米粒大小忽略不计，取 $\sqrt{3} \approx 1.732$ ），则落在小正方形（阴影）内的米粒数大约为（ ）



- A. 134 B. 67 C. 182 D. 108

4. 已知三棱锥 $P-ABC$ 的顶点都在球 O 的球面上， $PA = \sqrt{2}$ ， $PB = \sqrt{14}$ ， $AB = 4$ ， $CA = CB = \sqrt{10}$ ，面 $PAB \perp$ 面 ABC ，则球 O 的表面积为（ ）

- A. $\frac{10\pi}{3}$ B. $\frac{25\pi}{6}$ C. $\frac{40\pi}{9}$ D. $\frac{50\pi}{3}$

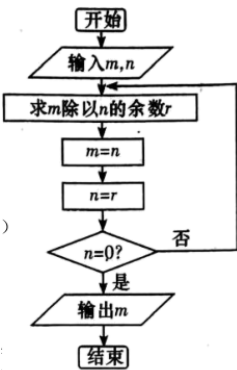
5. 《周易》是我国古代典籍，用“卦”描述了天地世间万象变化。如图是一个八卦图，包含乾、坤、震、巽、坎、离、艮、兑八卦（每一卦由三个爻组成，其中“——”表示一个阳爻，“— —”表示一个阴爻）。

”表示一个阴爻)。若从含有两个及以上阳爻的卦中任取两卦，这两卦的六个爻中都恰有两个阳爻的概率为（ ）



- A. $\frac{1}{3}$
- B. $\frac{1}{2}$
- C. $\frac{2}{3}$
- D. $\frac{3}{4}$

6. 执行下面的程序框图，如果输入 $m=1995$ ， $n=228$ ，则计算机输出的数是（ ）



- A. 58
- B. 57
- C. 56
- D. 55

7. 设 x ， y 满足约束条件 $\begin{cases} x+2y \leq 1 \\ 2x+y \geq -1 \\ x-y \leq 0 \end{cases}$ ，若 $z=-3x+2y$ 的最大值为 n ，则 $\left(2x-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$ 的展开式中 x^2 项的系数为()

- A. 60
- B. 80
- C. 90
- D. 120

8. 《周易》是我国古代典籍，用“卦”描述了天地世间万象变化．如图是一个八卦图，包含乾、坤、震、巽、坎、离、艮、兑八卦（每一卦由三个爻组成，其中“”表示一个阳爻，“”表示一个阴爻）若从八卦中任取两卦，这两卦的六个爻中恰有两个阳爻的概率为（ ）



- A. $\frac{3}{56}$ B. $\frac{3}{28}$ C. $\frac{3}{14}$ D. $\frac{1}{4}$

9. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_2 = 4, a_4 = 8$, 则 $a_7 = ()$

- A. 8 B. 12 C. 14 D. 10

10. 下列命题为真命题的个数是 $()$ (其中 π, e 为无理数)

① $\sqrt{e} > \frac{3}{2}$; ② $\ln \pi < \frac{2}{3}$; ③ $\ln 3 < \frac{3}{e}$.

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

11. 设全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x | x < 2\}$, $B = \{x | x^2 - 3x < 0\}$, 则 $(\complement_U A) \cap B = ()$

- A. $(0, 3)$ B. $[2, 3)$ C. $(0, 2)$ D. $(0, +\infty)$

12. 已知平面向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, 满足 $|\vec{b}| = 2, |\vec{a} + \vec{b}| = 1, \vec{c} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$ 且 $\lambda + 2\mu = 1$, 若对每一个确定的向量 $\vec{a}$, 记 $|\vec{c}|$ 的最小值为 m , 则当 $\vec{a}$ 变化时, m 的最大值为 $()$

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 1

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $2S_n = 3(a_n + 1)$, 若 $a_{10} = ka_8$, 则 $k = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且对任意正整数 n , 都有 $\begin{vmatrix} a_n & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2n & S_n \end{vmatrix} = 0$, 则 $a_1 = \underline{\hspace{2cm}}$

15. 函数 $f(x) = \frac{2 + \ln 2x}{x^2}$ 的图象在 $x = \frac{e}{2}$ 处的切线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

16. 已知复数 $z = (1 + 2i)(a + i)$, 其中 i 是虚数单位. 若 z 的实部与虚部相等, 则实数 a 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 在直角坐标系 l 中, 已知直线 l 的直角坐标方程为 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = \cos \theta \\ y = 1 + \sin \theta \end{cases}$ (θ 为

参数), 以直角坐标系原点为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho = 4 \sin(\theta + \frac{\pi}{3})$.

(1) 求曲线 C_1 和直线 l 的极坐标方程;

(2) 已知直线 l 与曲线 C_1, C_2 相交于异于极点的点 A, B , 若 A, B 的极径分别为 ρ_1, ρ_2 , 求 $|\rho_1 - \rho_2|$ 的值.

18. (12 分) 已知椭圆 $C: 9x^2 + y^2 = m^2 (m > 0)$, 直线 l 不过原点 O 且不平行于坐标轴, l 与 C 有两个交点 A, B , 线段 AB 的中点为 M .

(I) 证明: 直线 OM 的斜率与 l 的斜率的乘积为定值;

(II) 若 l 过点 $(\frac{m}{3}, m)$, 延长线段 OM 与 C 交于点 P , 四边形 $OAPB$ 能否为平行四边形? 若能, 求此时 l 的斜率, 若不能, 说明理由.

19. (12 分) 超级病菌是一种耐药性细菌, 产生超级细菌的主要原因是用于抵抗细菌侵蚀的药物越来越多, 但是由于滥用抗生素的现象不断的发生, 很多致病菌也对相应的抗生素产生了耐药性, 更可怕的是, 抗生素药物对它起不到什么作用, 病人会因为感染而引起可怕的炎症, 高烧、痉挛、昏迷直到最后死亡. 某药物研究所为筛查某种超级细菌, 需要检验血液是否为阳性, 现有 n ($n \in \mathbb{N}^*$) 份血液样本, 每个样本取到的可能性均等, 有以下两种检验方式:

(1) 逐份检验, 则需要检验 n 次;

(2) 混合检验, 将其中 k ($k \in \mathbb{N}^*$ 且 $k \geq 2$) 份血液样本分别取样混合在一起检验, 若检验结果为阴性, 这 k 份的血液全为阴性, 因而这 k 份血液样本只要检验一次就够了, 如果检验结果为阳性, 为了明确这 k 份血液究竟哪几份为阳性, 就要对这 k 份再逐份检验, 此时这 k 份血液的检验次数总共为 $k+1$ 次, 假设在接受检验的血液样本中, 每份样本的检验结果是阳性还是阴性都是独立的, 且每份样本是阳性结果的概率为 p ($0 < p < 1$).

(1) 假设有 5 份血液样本, 其中只有 2 份样本为阳性, 若采用逐份检验方式, 求恰好经过 2 次检验就能把阳性样本全部检验出来的概率;

(2) 现取其中 k ($k \in \mathbb{N}^*$ 且 $k \geq 2$) 份血液样本, 记采用逐份检验方式, 样本需要检验的总次数为 ξ_1 , 采用混合检验方式, 样本需要检验的总次数为 ξ_2 .

(i) 试运用概率统计的知识, 若 $E\xi_1 = E\xi_2$, 试求 p 关于 k 的函数关系式 $p = f(k)$;

(ii) 若 $p = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{e}}$, 采用混合检验方式可以使得样本需要检验的总次数的期望值比逐份检验的总次数期望值更少,

求 k 的最大值.

参考数据: $\ln 2 \approx 0.6931$, $\ln 3 \approx 1.0986$, $\ln 4 \approx 1.3863$, $\ln 5 \approx 1.6094$, $\ln 6 \approx 1.7918$

20. (12 分) 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $8\cos^2 \frac{B+C}{2} - 2\cos 2A = 3$

(1) 求 A ;

(2) 若 $a = 2$, 且 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 $\sqrt{3}$, 求 $\triangle ABC$ 周长的取值范围.

21. (12 分) 某商场举行有奖促销活动, 顾客购买每满 400 元的商品即可抽奖一次. 抽奖规则如下: 抽奖者掷各面标有 1-6 点数的正方体骰子 1 次, 若掷得点数大于 4, 则可继续在抽奖箱中抽奖; 否则获得三等奖, 结束抽奖, 已知抽奖箱中装有 2 个红球与 m ($m \geq 2, m \in \mathbb{N}^*$) 个白球, 抽奖者从箱中任意摸出 2 个球, 若 2 个球均为红球, 则获得一等奖, 若 2 个球为 1 个红球和 1 个白球, 则获得二等奖, 否则, 获得三等奖 (抽奖箱中的所有小球, 除颜色外均相同).

(1) 若 $m=4$ ，求顾客参加一次抽奖活动获得三等奖的概率；

(2) 若一等奖可获奖金 400 元，二等奖可获奖金 300 元，三等奖可获奖金 100 元，记顾客一次抽奖所获得的奖金为 X ，若商场希望 X 的数学期望不超过 150 元，求 m 的最小值.

22. (10 分) 设函数 $f(x) = \sin(\frac{\omega x}{3} - \frac{\pi}{6}) - 2\cos^2 \frac{\omega x}{6} + 1 (\omega > 0)$ ，直线 $y = \sqrt{3}$ 与函数 $f(x)$ 图象相邻两交点的距离为 2π .

(I) 求 ω 的值；

(II) 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c ，若点 $(\frac{B}{2}, 0)$ 是函数 $y = f(x)$ 图象的一个对称中心，且 $b = 5$ ，求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、B

【解析】

设 $P(x, y)$ ，利用两点间的距离公式求出 m 的表达式，结合基本不等式的性质求出 m 的最大值时的 P 点坐标，结合椭圆的定义以及椭圆的离心率公式求解即可.

【详解】

设 $P(x, y)$ ，因为 A 是抛物线 $x^2 = 4y$ 的对称轴与准线的交点，点 F 为抛物线的焦点，

所以 $A(0, -1), F(0, 1)$ ，

$$\begin{aligned} \text{则 } m &= \frac{|PA|}{|PF|} = \frac{\sqrt{(y+1)^2 + x^2}}{\sqrt{(y-1)^2 + x^2}} = \frac{\sqrt{(y+1)^2 + 4y}}{\sqrt{(y-1)^2 + 4y}} \\ &= \sqrt{1 + \frac{4y}{y^2 + 2y + 1}}, \end{aligned}$$

当 $y=0$ 时， $m=1$ ，

$$\text{当 } y > 0 \text{ 时, } m = \sqrt{1 + \frac{4y}{y^2 + 2y + 1}} = \sqrt{1 + \frac{4}{y + \frac{1}{y} + 2}} \leq \sqrt{1 + \frac{4}{2 + 2\sqrt{y \cdot \frac{1}{y}}}} = \sqrt{2},$$

当且仅当 $y = 1$ 时取等号, $\therefore$ 此时 $P(\pm 2, 1)$,

$$|PA| = 2\sqrt{2}, |PF| = 2,$$

Q 点 P 在以 A, F 为焦点的椭圆上, $2c = |AF| = 2$,

$\therefore$ 由椭圆的定义得 $2a = |PA| + |PF| = 2\sqrt{2} + 2$,

所以椭圆的离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{2c}{2a} = \frac{2}{2\sqrt{2} + 2} = \sqrt{2} - 1$, 故选 B.

【点睛】

本题主要考查椭圆的定义及离心率, 属于难题. 离心率的求解在圆锥曲线的考查中是一个重点也是难点, 一般求离心率有以下几种情况: ①直接求出 a, c , 从而求出 e ; ②构造 a, c 的齐次式, 求出 e ; ③采用离心率的定义以及圆锥曲线的定义来求解.

2、D

【解析】

利用线面平行和垂直的判定定理和性质定理, 对选项做出判断, 举出反例排除.

【详解】

解: 对于 A, 当 $m \subset \alpha, n \subset \beta$, 且 $\alpha \perp \beta$, 则 m 与 n 的位置关系不定, 故错;

对于 B, 当 $m \parallel n$ 时, 不能判定 $\alpha \parallel \beta$, 故错;

对于 C, 若 $m \perp \alpha, n \parallel \beta$, 且 $\alpha \perp \beta$, 则 m 与 n 的位置关系不定, 故错;

对于 D, 由 $m \perp \alpha, \alpha \parallel \beta$ 可得 $m \perp \beta$, 又 $n \parallel \beta$, 则 $m \perp n$ 故正确.

故选: D.

【点睛】

本题考查空间线面位置关系. 判断线面位置关系利用好线面平行和垂直的判定定理和性质定理. 一般可借助正方体模型, 以正方体为主线直观感知并准确判断.

3、B

【解析】

根据几何概型的概率公式求出对应面积之比即可得到结论.

【详解】

解：设大正方形的边长为 1，则小直角三角形的边长为 $\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，

则小正方形的边长为 $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$ ，小正方形的面积 $S = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，

则落在小正方形（阴影）内的米粒数大约为

$$\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 \times 1} \times 500 = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times 500 \approx (1 - 0.866) \times 500 = 0.134 \times 500 = 67，$$

故选：B.

【点睛】

本题主要考查几何概型的概率的应用，求出对应的面积之比是解决本题的关键.

4、D

【解析】

由题意画出图形，找出 $\triangle PAB$ 外接圆的圆心及三棱锥 $P-BCD$ 的外接球心 O ，通过求解三角形求出三棱锥 $P-BCD$ 的外接球的半径，则答案可求.

【详解】

如图；设 AB 的中点为 D ；

$$\because PA = \sqrt{2}, PB = \sqrt{14}, AB = 4,$$

$$\therefore \triangle PAB \text{ 为直角三角形，且斜边为 } AB, \text{ 故其外接圆半径为：} r = \frac{1}{2} AB = AD = 2;$$

设外接球球心为 O ；

$$\because CA = CB = \sqrt{10}, \text{ 面 } PAB \perp \text{面 } ABC,$$

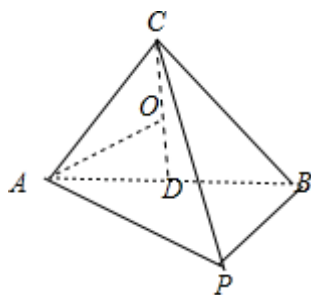
$$\therefore CD \perp AB \text{ 可得 } CD \perp \text{面 } PAB; \text{ 且 } DC = \sqrt{CA^2 - AD^2} = \sqrt{6}.$$

$\therefore O$ 在 CD 上；

$$\text{故有：} AO^2 = OD^2 + AD^2 \Rightarrow R^2 = (\sqrt{6} - R)^2 + r^2 \Rightarrow R = \frac{5}{\sqrt{6}};$$

$$\therefore \text{球 } O \text{ 的表面积为：} 4\pi R^2 = 4\pi \times \left(\frac{5}{\sqrt{6}}\right)^2 = \frac{50\pi}{3}.$$

故选：D.



【点睛】

本题考查多面体外接球面积的求法，考查数形结合的解题思想方法，考查思维能力与计算能力，属于中档题.

5、B

【解析】

基本事件总数为6个，都恰有两个阳爻包含的基本事件个数为3个，由此求出概率.

【详解】

解：由图可知，含有两个及以上阳爻的卦有巽、离、兑、乾四卦，

取出两卦的基本事件有（巽，离），（巽，兑），（巽，乾），（离，兑），（离，乾），（兑，乾）共6个，其中符合条件的基本事件有（巽，离），（巽，兑），（离，兑）共3个，

所以，所求的概率 $P = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

故选：B.

【点睛】

本题渗透传统文化，考查概率、计数原理等基本知识，考查抽象概括能力和应用意识，属于基础题.

6、B

【解析】

先明确该程序框图的功能是计算两个数的最大公约数，再利用辗转相除法计算即可.

【详解】

本程序框图的功能是计算 m ， n 中的最大公约数，所以 $1995 = 228 \times 8 + 171$ ，

$228 = 171 \times 1 + 57$ ， $171 = 3 \times 57 + 0$ ，故当输入 $m = 1995$ ， $n = 228$ ，则计算机输出的数是57.

故选：B.

【点睛】

本题考查程序框图的功能，做此类题一定要注意明确程序框图的功能是什么，本题是一道基础题.

7、B

【解析】

画出可行域和目标函数，根据平移得到 $n = 5$ ，再利用二项式定理计算得到答案.

【详解】

如图所示：画出可行域和目标函数，

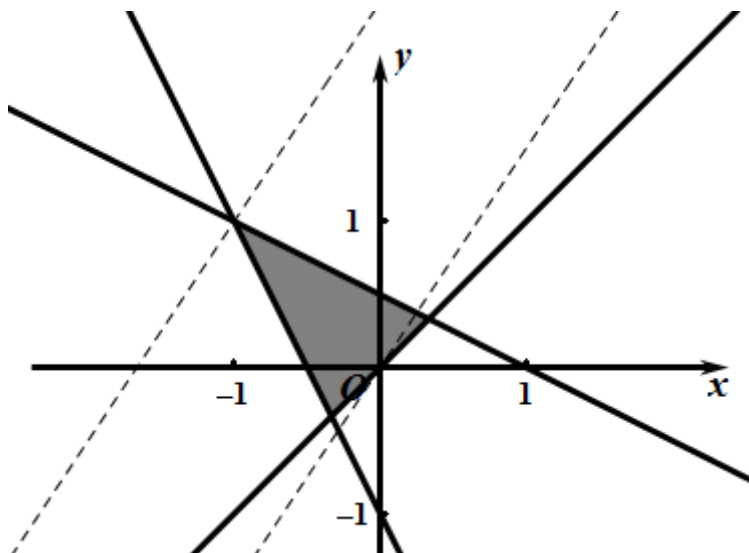
$z = -3x + 2y$ ，即 $y = \frac{3}{2}x + \frac{z}{2}$ ，故 z 表示直线与 y 截距的 2 倍，

根据图像知：当 $x = -1, y = 1$ 时， $z = -3x + 2y$ 的最大值为 5，故 $n = 5$ 。

$\left(2x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^5$ 展开式的通项为： $T_{r+1} = C_5^r \cdot (2x)^{5-r} \left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^r = C_5^r \cdot 2^{5-r} \cdot (-1)^r \cdot x^{5-\frac{3}{2}r}$ ，

取 $r = 2$ 得到 x^2 项的系数为： $C_5^2 \cdot 2^{5-2} \cdot (-1)^2 = 80$ 。

故选：B。



【点睛】

本题考查了线性规划求最值，二项式定理，意在考查学生的计算能力和综合应用能力.

8、C

【解析】

分类讨论，仅有一个阳爻的有坎、艮、震三卦，从中取两卦；从仅有两个阳爻的有巽、离、兑三卦中取一个，再取没有阳爻的坤卦，计算满足条件的种数，利用古典概型即得解.

【详解】

由图可知，仅有一个阳爻的有坎、艮、震三卦，从中取两卦满足条件，其种数是 $C_3^2 = 3$ ；

仅有两个阳爻的有巽、离、兑三卦，没有阳爻的是坤卦，此时取两卦满足条件的种数是 $C_3^1 = 3$ ，于是所求的概率

$$P = \frac{3+3}{C_8^2} = \frac{3}{14}.$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/258073023007006051>