

河南 2024 年高考备考精准检测联赛

高三数学试题

考试时间：120 分钟

试卷满分:150 分

注意事项:

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、准考证号、考场号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题(本大题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.)

1. 已知集合 $A = \left\{ x \mid \frac{x-2}{x+3} > 0 \right\}$, 则 $\complement_{\mathbb{R}} A =$ ()

- A. $\{x \mid -3 \leq x \leq 2\}$ B. $\{x \mid -2 < x < 3\}$
- C. $\{x \mid x < -2 \text{ 或 } x > 3\}$ D. $\{x \mid x < -3 \text{ 或 } x > 2\}$

【答案】A

【解析】

【分析】先化简集合 A , 进而求得 $\partial_R A$.

【详解】 $A = \left\{ x \left| \frac{x-2}{x+3} > 0 \right. \right\} = \{x | x > 2 \text{ 或 } x < -3\},$

则 $\check{\mathbf{d}}_R A = \{x \mid -3 \leq x \leq 2\}$,

故选：A

2. 设复数 z 满足 $\frac{2-z}{1+z} = i$, 则 $z \cdot \bar{z} =$ ()

- A. $\frac{\sqrt{10}}{2}$ B. $\sqrt{10}$ C. $\frac{5}{2}$ D. 5

【答案】C

【解析】

【分析】由复数四则运算求解出 z 之后，结合共轭复数的概念以及复数乘法运算即可求解.

【详解】因为 $\frac{2-z}{1+z} = i$ ，所以 $z = \frac{2-i}{1+i} = \frac{(2-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$ ，

所以 $\bar{z} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$ ，即 $z \cdot \bar{z} = \frac{5}{2}$ 。

故选：C。

3. 已知向量 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=1, |\vec{b}|=\sqrt{2}, \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，则 $|\vec{a} + 2\vec{b}| = (\quad)$

A. $\sqrt{9-\sqrt{2}}$

B. $\sqrt{9+\sqrt{2}}$

C. $\sqrt{9+2\sqrt{2}}$

D. $1+2\sqrt{2}$

【答案】C

【解析】

【分析】利用向量数量积的运算律结合条件即可求得 $|\vec{a} + 2\vec{b}|$ 的值。

【详解】因为 $|\vec{a}|=1, |\vec{b}|=\sqrt{2}, \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，

所以 $|\vec{a} + 2\vec{b}|^2 = \vec{a}^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4\vec{b}^2 = 9 + 2\sqrt{2}$ ，即 $|\vec{a} + 2\vec{b}| = \sqrt{9+2\sqrt{2}}$ ，

故选：C。

4. 设 $f(x) = x^3 + \log_2(x + \sqrt{x^2 + 1})$ ，则对任意实数 a, b ， $a + b \leq 0$ 是 $f(a) + f(b) \leq 0$ 的 ()

A. 充分必要条件

B. 充分而不必要条件

C. 必要而不充分条件

D. 既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】

【分析】根据奇函数的定义可判断 $f(x) = x^3 + \log_2(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 为奇函数，结合幂函数的单调性以及复合函数的单调性可得 $f(x)$ 为增函数，即可求解。

【 详 解 】 $f(x)$ 的 定 义 域 为 $\mathbf{R}$ ， 且

$$f(-x) = (-x)^3 + \log_2(-x + \sqrt{x^2 + 1}) = f(x) = -x^3 - \log_2(x + \sqrt{x^2 + 1}) = -f(x),$$

因为 $f(x) = x^3 + \log_2(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 为奇函数，

当 $x \geq 0$ 时，函数 $y = x^3, y = x + \sqrt{x^2 + 1}$ 均为单调递增函数，所以 $f(x)$ 在 $x \geq 0$ 单调递增。

进而可得 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, $a+b \leq 0 \Leftrightarrow a \leq -b \Leftrightarrow f(a) \leq f(-b) = -f(b) \Leftrightarrow f(a) + f(b) \leq 0$,
故对任意实数 a, b , $a+b \leq 0$ 是 $f(a) + f(b) \leq 0$ 的充要条件,

故选: A

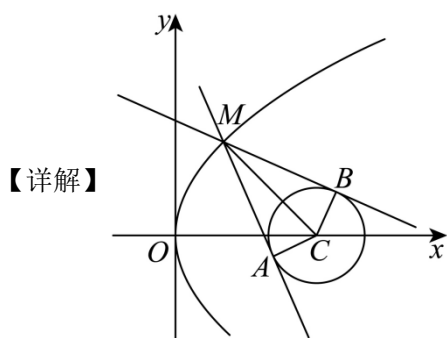
5. 已知点 M 在曲线 $y^2 = 4x$ 上, 过 M 作圆 $C: (x-3)^2 + y^2 = 1$ 的切线, 切点分别为 A, B , 则四边形 $MACB$ 的面积的最小值为 ()

- A. $2\sqrt{2}$ B. $\sqrt{7}$ C. 3 D. 9

【答案】B

【解析】

【分析】作出图象, 利用图象观察, 将四边形 $MACB$ 的面积最小值转化为求 $|MC|$ 的最小值, 而这可以通过设点、消元将其化成一个二次函数的最值问题来解决.



如图, 设点 $M(x, y)$, 连接 MC , 四边形 $MACB$ 的面积为

$$S = 2S_{\triangle MAC} = 2 \times \frac{1}{2} |MA| \times 1 = |MA| = \sqrt{|MC|^2 - 1},$$

而 $|MC| = \sqrt{(x-3)^2 + y^2}$, 又点 $M(x, y)$ 在曲线 $y^2 = 4x$ 上, 则有 $|MC| = \sqrt{(x-3)^2 + 4x} = \sqrt{(x-1)^2 + 8}$,

依题意, $x \geq 0$, 故当且仅当 $x=1$ 时, $|MC|_{\min} = 2\sqrt{2}$, 此时四边形 $MACB$ 的面积取得最小值

$$\sqrt{(2\sqrt{2})^2 - 1} = \sqrt{7}.$$

故选: B.

6. 过三棱柱任意两个顶点的直线中, 其中异面直线有 () 对

- A. 15 B. 24 C. 36 D. 54

【答案】C

【解析】

【分析】依据异面直线定义结合三棱柱的特征性质即可求得异面直线的对数.

【详解】三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中，与 A_1B_1 异面的直线有 C_1C, C_1A, C_1B, CA, CB ,

与 A_1C_1 异面的直线有 B_1C, B_1A, B_1B, BA, BC ,

与 B_1C_1 异面的直线有 A_1C, A_1B, A_1A, AB, AC ,

与 AA_1 异面的直线有 BC, BC_1, C_1B ,

与 BB_1 异面的直线有 AC, AC_1, A_1C ,

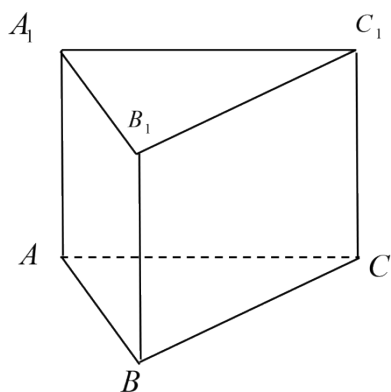
与 CC_1 异面的直线有 AB, AB_1, A_1B ,

与 A_1B 异面的直线有 AC, B_1C, AC_1 , 与 AB_1 异面的直线有 BC, BC_1, CA_1 ,

与 B_1C 异面的直线有 AB, AC_1 , 与 BC_1 异面的直线有 AC, A_1C ,

与 A_1C 异面的直线有 AB , 与 AC_1 异面的直线有 BC ,

所以异面直线有 $5' 3+3' 3+3' 2+2' 2+1' 2=36$ 对，



故选：C.

7. 若 $\sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta) = \frac{1}{4}$, 则 $\cos 2\alpha - \cos 2\beta = (\quad)$

A. $\frac{1}{4}$

B. $-\frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $-\frac{1}{2}$

【答案】D

【解析】

【分析】借助两角和与差的正弦、余弦公式，同角三角函数的基本关系与降幂公式计算，或借助和差化积公式计算即可得.

【详解】法一：

因为 $\sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta) = \frac{1}{4}$, 所以 $\sin^2\alpha\cos^2\beta - \cos^2\alpha\sin^2\beta = \frac{1}{4}$,

$$\text{即 } (1 - \cos^2 \alpha) \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha (1 - \cos^2 \beta) = \frac{1}{4},$$

$$\text{即 } \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha = \frac{1}{4}, \text{ 即 } \frac{1 + \cos 2\beta}{2} - \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} = \frac{1}{4}, \text{ 即 } \cos 2\alpha - \cos 2\beta = -\frac{1}{2}.$$

法二:

$$\cos 2\alpha - \cos 2\beta = -2 \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) = -2 \times \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}.$$

故选: D.

8. 给出下列四个命题: ①垂直于同一直线的两条直线互相平行; ②垂直于同一平面的两个平面互相平行; ③若直线 l_1, l_2 与同一平面所成的角相等, 则 l_1, l_2 互相平行; ④若直线 l_1, l_2 是异面直线, 则与 l_1, l_2 都相交的两条直线是异面直线. 其中真命题的个数是 ()

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

【答案】A

【解析】

【分析】①根据直线垂直的定义判断. ②根据线面垂直的性质判断. ③根据直线和平面所成角的定义判断. ④根据异面直线的位置关系判断.

【详解】垂直于同一直线的两条直线可以相交或异面, 所以①为假命题;

垂直于同一平面的两个平面可以相交, 所以②为假命题;

若直线 l_1, l_2 与同一平面所成的角相等, 则 l_1, l_2 可相交、平行或异面, 所以③为假命题;

若直线 l_1, l_2 是异面直线, 则与 l_1, l_2 都相交的两条直线可相交, 所以④为假命题;

故选: A.

二、选择题 (本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.)

9. 下列说法正确的是 ()

- A. 在经验回归方程 $\hat{y} = -0.65x + 3.6$ 中, 当解释变量 x 每增加 1 个单位时, 响应变量 y 平均减少 3.6 个单位
- B. 在经验回归方程 $\hat{y} = -0.65x + 3.6$ 中, 相对于样本点 $(1, 2.8)$ 的残差为 -0.15
- C. 在残差图中, 残差分布的水平带状区域的宽度越宽, 其模型的拟合效果越差
- D. 若两个变量的决定系数 R^2 越大, 表示残差平方和越小, 即模型的拟合效果越好

【答案】BCD

【解析】

【分析】对 A, 根据经验回归方程的解析式即可判断; 对 B

，根据回归方程计算，由残差定义即可求得结果；对 C，根据残差图的分布情况分析即可；对 D 根据决定系数的意义即可判断.

【详解】对于 A，根据经验回归方程，当解释变量 x 每增加 1 个单位时，响应变量 y 平均减少 0.65 个单位，故 A 错误；

对于 B，当解释变量 $x=1$ 时，响应变量 $\hat{y}=2.95$ ，则样本点 $(1, 2.8)$ 的残差为 -0.15 ，故 B 正确；

对于 C，在残差图中，残差分布的水平带状区域的宽度越宽，说明拟合精度越低，即拟合效果越差，故 C 正确；

对于 D，由决定系数 R^2 的意义可知， R^2 越大，表示残差平方和越小，即模型的拟合效果越好，故 D 正确.

故选：BCD

10. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 1，公差为 $d(d \in \mathbb{N}^*)$ ，若 61 是该数列中的一项，则公差 d 可能的值是 ()

A. 4

B. 5

C. 6

D. 7

【答案】ABC

【解析】

【分析】根据题意，利用等差数列的通项公式，求得 $(n-1)d=60$ ，结合 n 和 d 都是正整数，逐项判定，即可求解.

【详解】由题意，等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 1，公差为 d ，

若 61 是该数列中的一项，可得 $61=1+(n-1)d$ ，所以 $(n-1)d=60$ ，

因为 n 和 d 都是正整数，所以 $d=4$ 时， $n=16$ ，所以 A 正确；

当 $d=5$ 时， $n=13$ ，所以 B 正确；

当 $d=6$ 时， $n=11$ ，所以 C 正确；

当 $d=7$ 时， $n=\frac{67}{7} \notin \mathbb{N}^*$ ，所以 D 不正确.

故选：ABC.

11. 函数 $f(x)=\sin \omega x(\omega>0)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上为单调函数，且图象关于直线 $x=\frac{2\pi}{3}$ 对称，则 ()

A. 将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{4\pi}{3}$ 个单位长度，所得图象关于原点对称

B. 函数 $f(x)$ 在 $[2\pi, \frac{8\pi}{3}]$ 上单调递增

C. 若函数 $f(x)$ 在区间 $\left(a, \frac{14\pi}{9}\right)$ 上没有最小值, 则实数 a 的取值范围是 $\left(-\frac{2\pi}{9}, \frac{14\pi}{9}\right)$

D. 若函数 $f(x)$ 在区间 $\left(a, \frac{14\pi}{9}\right)$ 上有且仅有 2 个零点, 则实数 a 的取值范围是 $\left(-\frac{4\pi}{3}, 0\right)$

【答案】AB

【解析】

【分析】根据题意, 求得 $f(x) = \sin \frac{3}{4}x$, 根据三角函数的图象变换, 以及三角函数的性质, 逐项判定, 即可求解.

【详解】由函数 $f(x) = \sin \omega x (\omega > 0)$, 当 $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, 可得 $\omega x \in \left[-\frac{\omega\pi}{2}, \frac{\omega\pi}{2}\right]$,

因为函数 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 时单调函数, 可得 $-\frac{\pi}{2} \leq -\frac{\pi}{2}\omega$ 且 $\frac{\pi}{2}\omega \leq \frac{\pi}{2}$, 可得 $0 < \omega < 1$,

又由 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{2\pi}{3}$ 对称, 可得 $\frac{2\pi}{3} \cdot \omega = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$,

解得 $\omega = \frac{3k}{2} + \frac{3}{4}, k \in \mathbb{Z}$, 当 $k = 0$ 时, $\omega = \frac{3}{4}$, 所以 $f(x) = \sin \frac{3}{4}x$,

对于 A 中, 将函数 $f(x) = \sin \frac{3}{4}x$ 的图象向左平移 $\frac{4\pi}{3}$ 个单位长度,

可得 $y = \sin\left[\frac{3}{4}\left(x + \frac{4\pi}{3}\right)\right] = \sin\left(\pi + \frac{3}{4}x\right) = -\sin \frac{3}{4}x$,

此时函数 $f(x)$ 的图象关于原点对称, 所以 A 正确;

对于 B 中, 当 $x \in \left[2\pi, \frac{8\pi}{3}\right]$ 时, 可得 $\frac{3}{4}x \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, 可得函数 $f(x) = \sin \frac{3}{4}x$ 单调递增, 所以 B 正确;

对于 C 中, 当 $x \in \left(a, \frac{14\pi}{9}\right)$ 时, 可得 $\frac{3}{4}x \in \left(\frac{3a}{4}, \frac{7\pi}{6}\right)$, 则函数 $f(x)$ 在区间 $\left(a, \frac{14\pi}{9}\right)$ 上没有最小值, 则

需 $-\frac{\pi}{2} \leq \frac{3a}{4} < \frac{7\pi}{6}$, 即 $-\frac{2\pi}{3} \leq a < \frac{14\pi}{9}$, 所以 C 错误;

对于 D 中, 函数 $f(x)$ 在区间 $\left(a, \frac{14\pi}{9}\right)$ 上有且仅有 2 个零点, 则 $-\pi \leq \frac{3a}{4} < 0$,

即 $-\frac{4\pi}{3} \leq a < 0$ 所以 D 错误.

故选: AB.

12. 函数 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbb{R}$ 的非常值函数, 且 $f(2x-1)$ 的图象关于点 $(1, 0)$ 对称, 函数 $y = f(x-1)$ 关于直线 $x = 3$ 对称, 则下列说法正确的是 ()

A. $f(x)$ 为奇函数

B. $f(x+4) = f(x)$

C. $f(4+x)=f(-x)$

D. $f(1-x)=-f(x)$

【答案】BC

【解析】

【分析】根据函数图象的平移可得 $f(x)$ 关于直线 $x=2$ 对称即可判断 C，根据点对称可得 $f(x)+f(2-x)=0$ ，进而可得 $f(x)$ 的周期性，即可结合选项判断 BCD.

【详解】将 $f(x)$ 图象向右平移 1 个单位可得 $y=f(x-1)$ 的图象，由函数 $y=f(x-1)$ 关于直线 $x=3$ 对称，可得函数 $f(x)$ 关于直线 $x=2$ 对称，故 C 正确；

由 $f(2x-1)$ 的图象关于点 $(1,0)$ 对称，可得 $f(2x-1)+f(2(2-x)-1)=0$ ，即 $f(2x-1)+f(3-2x)=0$ ，

以 $2x$ 代换 x ，则 $f(x-1)+f(3-x)=0$ ，所以函数 $f(x)$ 关于点 $(1,0)$ 对称，可得 $f(x)+f(2-x)=0$ ，即 $f(2-x)=-f(x)$ ，

结合 $f(x+2)=f(2-x)$ 可得 $f(x+2)=-f(x)$ ，所以 $f(x+4)=f[(x+2)+2]=-f(x+2)=-[-f(x)]=f(x)$ ，故 B 正确.

所以 $f(x)$ 是周期函数，且周期为 4，其图象不仅关于直线 $x=2$ 对称还关于点 $(1,0)$ 对称，所以不关于点 $(0,0)$ 和 $(\frac{1}{2},0)$ 对称，所以 $f(x)$ 不是奇函数， $f(x)+f(1-x) \neq 0$ ，故选项 AD 错误；

故选：BC.

三、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.）

13. 已知抛物线 $C: x^2=4y$ 的焦点为 F ，过 $P(4,4)$ 作 C 的准线的垂线，垂足为 M ， FM 的中点为 N ，则直线 PN 的斜率为_____.

【答案】2

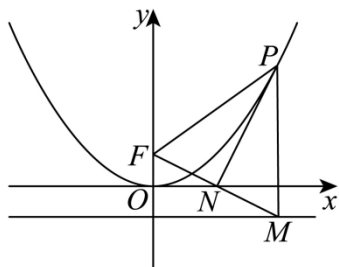
【解析】

【分析】根据已知条件作出图形，利用抛物线的定义及等腰三角形的三线合一定理，结合直线的斜率公式及两直线垂直的条件即可求解.

【详解】由 $x^2=4y$ ，得 $2p=4$ ，解得 $p=2$ ，

所以抛物线 C 的焦点为 $F(0,1)$ ，准线方程为 $y=-1$ ，

由 $4^2 = 4 \times 4 = 16$ ，得 P 在抛物线上，如图所示



由抛物线定义可得 $|PF| = |PM|$ ，

又 FM 的中点为 N ，所以 $PN \perp FM$ 。

由题意可知， $M(4, -1)$ ，

设直线 PN 的斜率为 k ，则 $\frac{1 - (-1)}{0 - 4} \times k = -1$ ，解得 $k = 2$ 。

所以直线 PN 的斜率为 2。

故答案为：2。

14. 直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的各顶点都在同一球面上，若 $AB = 1$ ， $AC = AA_1 = 2$ ， $\angle BAC = \frac{2\pi}{3}$ ，则此球的表面积等于_____。

【答案】 $\frac{40}{3}\pi$

【解析】

【分析】由余弦定理求得 $|BC| = \sqrt{7}$ ，根据正弦定理求出 $\triangle ABC$ 的外接圆半径，结合勾股定理和球的表面积公式计算即可求解。

【详解】在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得 $|BC|^2 = 1^2 + 2^2 - 2 \times 1 \times 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 7$ ，

由 $|BC| > 0$ ，得 $|BC| = \sqrt{7}$ ，设 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 r ，

由正弦定理得 $2r = \frac{|BC|}{\sin \angle BAC} = \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$ ，则 $r = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$ ，

设三棱柱的外接球半径为 R ，则 $R^2 = r^2 + \left(\frac{|AA_1|}{2}\right)^2 = \frac{10}{3}$ ，

所以此球 O 的表面积等于 $S = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot \frac{10}{3} = \frac{40}{3}\pi$ 。

故答案为： $\frac{40}{3}\pi$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/258110074026006063>