第4部分　重积分、线、面积分的应用

一、几何应用

1 求曲线弧长 $\int_L \mathbf{1}\cdot ds = s$

2 求平面区域D的面积

$$\sigma = \iint_D d\sigma$$

$$\sigma = \frac{1}{2}\oint_L xdy - ydx$$

(见讲义三十一)

3 求立体Ω的体积v

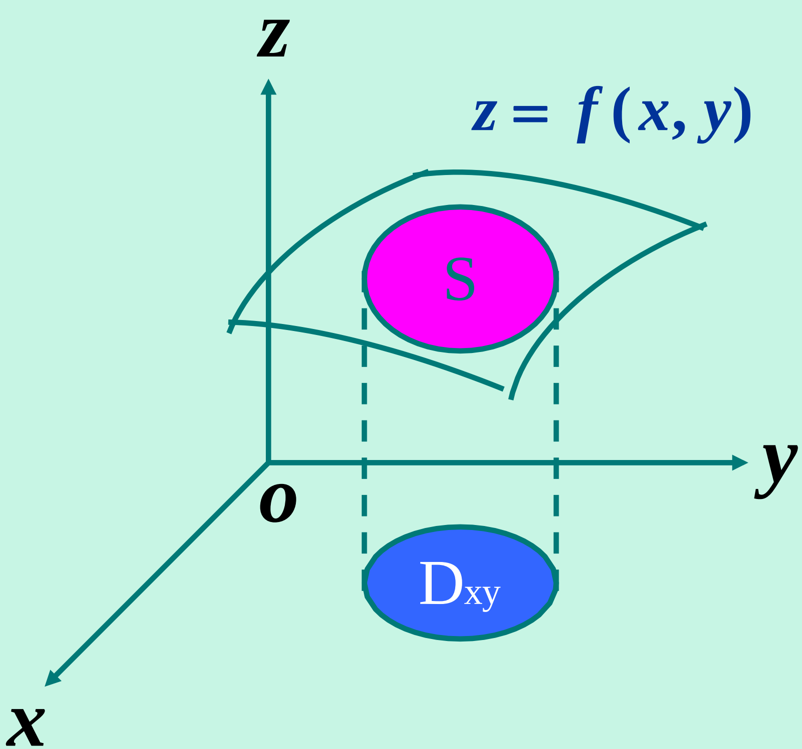
$$v = \iint_D [f_2(x,y) - f\ ($$

(特形：曲顶柱体体积 $v = \iint_D f(x,y)d\sigma$ (顶: $f(x,y) > 0$))

$$v = \iiint_\Omega dv$$

$$v = \frac{1}{3}\oiint_\Sigma xdydz + ydzdx + zdxdy$$

4 求曲面S的面积



$$S = \iint_{\Sigma} dS$$

$$= \iint_{D} \sqrt{1 + z_x^2 + z^2}$$

求立体的体积

求由$(z-1)^2=(x-z-1)^2+\quad{}^2$

解: $$z=\frac{x^2+y^2}{2x}-1 \quad D_{xy}:(x-1)^2+y^2\le 1$$

$$V=\iint_D \frac{2x-(x^2+y^2)}{2x}dxdy$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}(1-\frac{r^2}{2r\cos\theta})rdr=\frac{\pi}{3}$$

证明：抛物面$z = 1 + x^2 + y^2$上任意点处的切平面与抛物面$z = x^2 + y^2$所围立体的体积与切点坐标无关。

解: 设$\forall M(x_0, y_0, z_0) \in S: z = 1 + x_2 + y_2$,则

切平面的方程π:

$$2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

即 $z = 2x_0 x + 2y_0 y - z_0 + 2$

注意：$z_0 = 1 + x_0^2 + y_0^2$

由$\begin{cases} z = 2x_0 x + 2y_0 y - z_0 + 2 \\ z = x^2 + y^2 \end{cases}$消去$z$得

所围立体在xoy面上的投影区域:

$D: (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \le 1$

$$V = \iint_D [(2x_0 x + 2y_0 y - z_0 + 2) - (x^2 + y^2)] d\sigma$$

$$= \iint_D [1 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2] d\sigma$$

$$= \iint_{D'} (1 - u^2 - v^2) |J| du dv = \frac{\pi}{2}$$

其中: $\begin{cases} u = x - x_0 \\ v = y - y_0 \end{cases}$

$|J|^{-1} = \left| \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \right| = 1$

$D \to D': u^2 + v^2 \le 1$

例 已知A（1，0，0）与B(0,1,1),线段AB绕z轴旋转一周所成的旋转曲面为S．求由S及两平面

z=0，z=1所围立体体积。

解: $\overrightarrow{AB}=\{-1,1,1\}$, 直线方程为 $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$

设曲面上任一点坐标为(x,y,z),它是由直线上点(x_0,y_0,z_0)绕z轴旋转而来

且有 $x^2+y^2=x_0{}^2+y_0{}^2=(1-z)^2+z^2$

所以S的方程为 $x^2+y^2=(1-z)^2+z^2$

$$V=\int_0^1 dz\iint_{D(z)}dxdy=\int_0^1\left[(1-z)^2+z^2\right]dz$$

$$=\pi\int_0^1\left[2z^2-2z+1\right]dz=\frac{2}{3}\pi$$

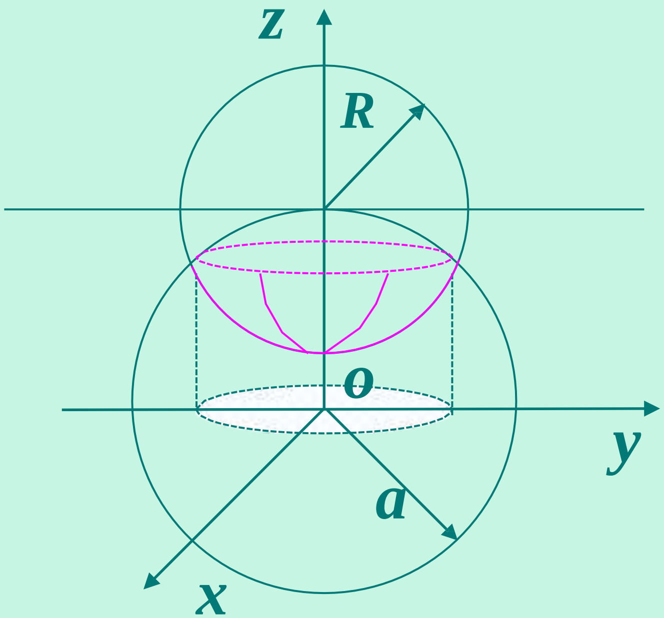
3. 表面积

解 设半径为$\boldsymbol{R}$的球面Σ的球心为$(0,0,a)$, 则

$$\Sigma : x^2 + y^2 + (z-a)^2 = R^2$$

$$由\begin{cases} x^2 + y^2 + (z-a)^2 = R^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$D : x^2 + y^2 \le \frac{R^2}{4a^2}(4a^2 - R^2)$$



$$\Sigma : z = a - \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

$$(x, y) \in D : x^2 + y^2 \le \frac{R^2}{4a^2}(4a^2 - R^2)$$

$$S(R) = \iint_{\Sigma} dS = \iint_{D} \sqrt{1 + z_x^{\ 2} + z_y^{\ 2}}\, dxdy$$

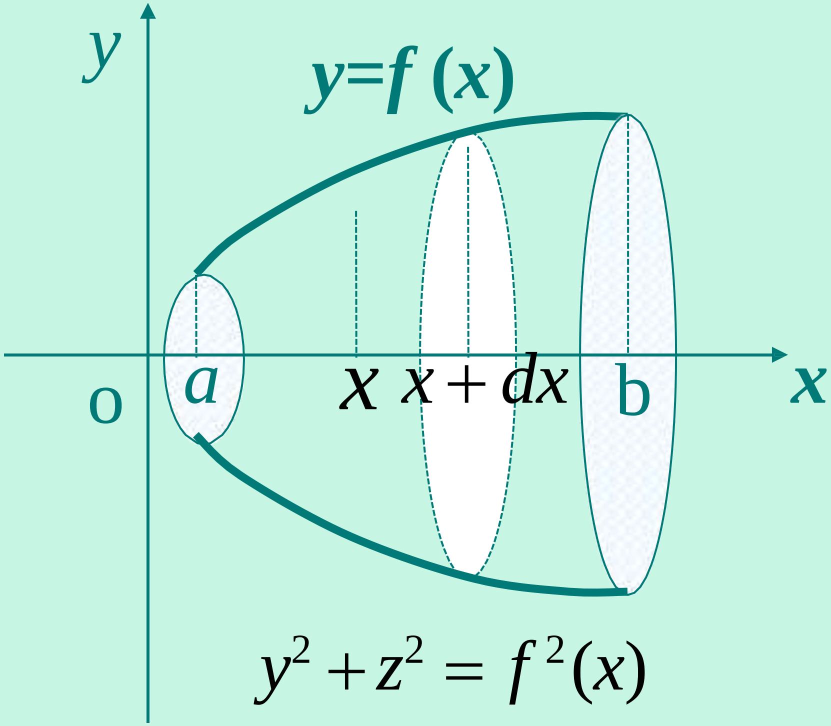
$$= \iint_{D} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\, dxdy = 2\pi R^2 - \frac{\pi R^3}{a}$$

$$\because S'(R) = 4\pi R - \frac{3\pi R^2}{a} \overset{令}{=} 0 \Rightarrow R = 0, R = \frac{4}{3}a$$

$$S''(\frac{4}{3}a) = -4\pi < 0$$

$\therefore$ 当 $R = \dfrac{4}{3}a$ 时，球面 Σ 夹在定球 的表面积最大。

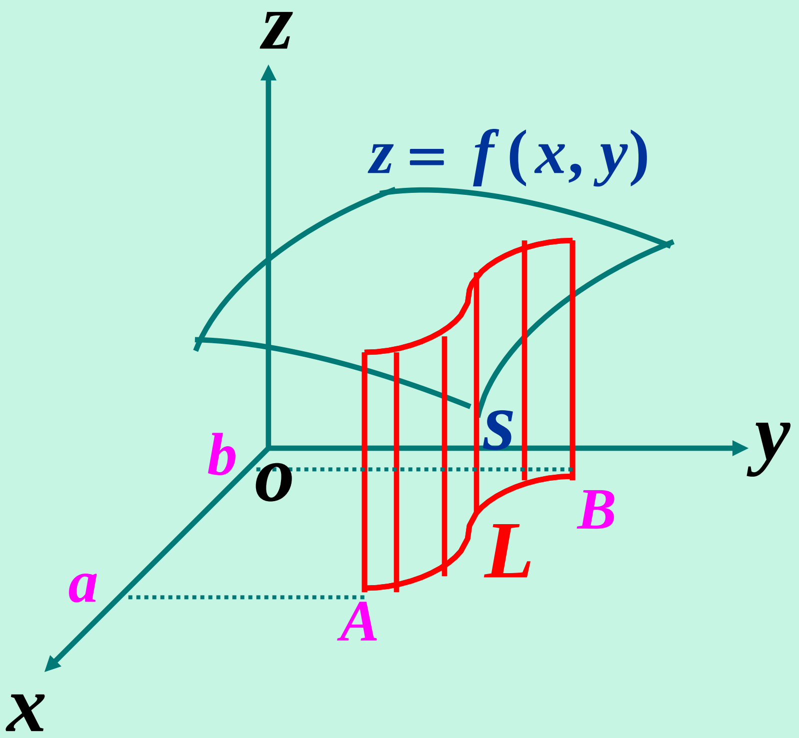
4. 侧面积



$$y^2+z^2=f^2(x)$$

$$y=f(x)\geq 0,\quad a\leq x\leq b$$

$$S_{侧}=\int_{}^{b}2\pi f(x)\sqrt{\qquad}$$

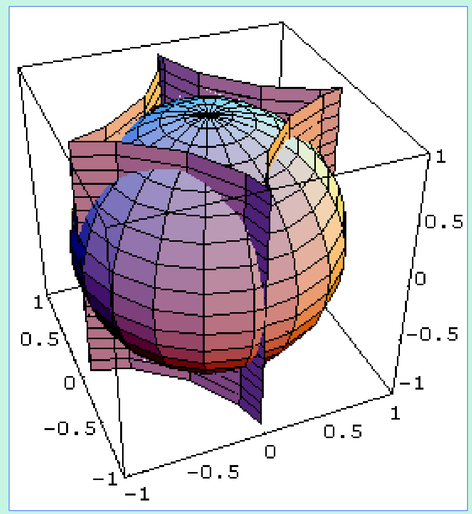


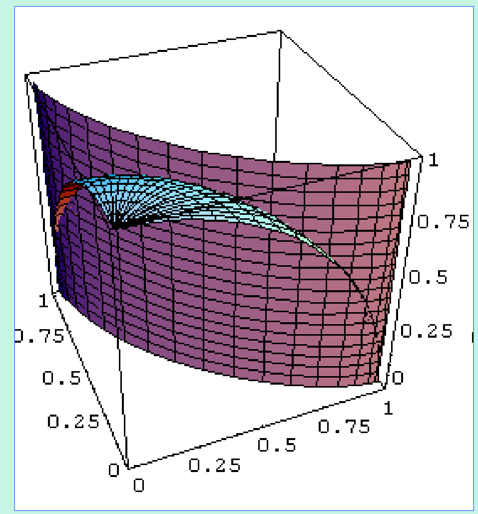
$$S = \int_{L(A,B)} f(x, y)\,ds$$

$$= \int_a^b f(x, y)\sqrt{1 + y'^2}\,dx$$

例

解 由对称性





$$S = 8\int_L z ds$$

$$= \int$$

$\because$ $L: x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$, 参数方程为 $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \end{cases}$ $(0 \le t \le \frac{\pi}{2})$

类似题型三十三1，3

$$ds = \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\,dt = 3\sin t\cos t\,dt,$$

$$S = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\cos^6 t - \sin^6 t}\; 3\sin t\cos t\,dt$$

$$= 24\int^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{3\sin^2 }$$

$$= 24\sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cos^2 t\,dt \quad = \frac{3\sqrt{3}}{2}\pi.$$

二、物理应用

1. 质量

- 平面薄片D的质量 $M=\iint_D \rho(x,y)d\sigma$
- 空间物体Ω的质量 $M=\iiint \rho(x,$
- 平面金属杆*L*的质量 $\boxed{M=\int_L \rho(x,y)ds}$
- 空间金属杆Γ的质量 $\boxed{M=\int_\Gamma \rho(x,y,z)ds}$
- 空间金属曲面片S的质量 $\boxed{M=\iint_S \rho(x,y,z)ds}$

2. 重心

•平面薄片D的重心

•空间物体Ω的重心

$$\bar{x}=\frac{\iiint\limits_{\Omega} x\rho(x,y,z)dv}{M},\ \bar{y}=\frac{\iiint\limits_{\Omega} y\rho(x,y,z)dv}{M},$$

$$\bar{z}=\frac{\iiint\limits_{\Omega} z\rho(x,y,z)dv}{M}$$

•平面金属杆L的重心

$$\bar{x}=\frac{1}{M}\int_L x\rho(x,y)ds \qquad \bar{y}=\frac{1}{M}\int_L y\rho(x,y)ds$$

•空间金属杆Γ的重心

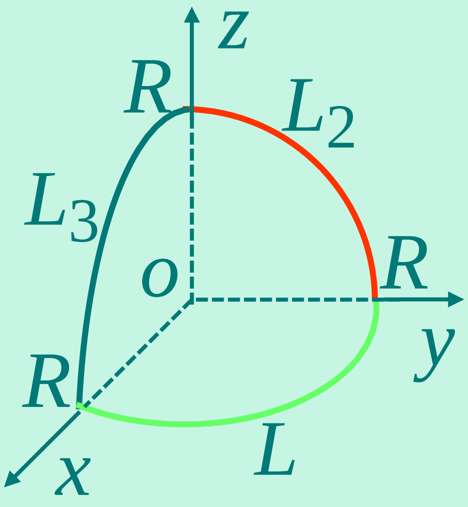
$$\bar{x}=\frac{\int_\Gamma x\rho(x,y,z)ds}{M},\ \bar{y}=\frac{\int_\Gamma y\rho(x,y,z)ds}{M},$$

$$\bar{z}=\frac{\int_\Gamma z\rho(x,y,z)ds}{M}$$

- 空间金属曲面片S的重心

1. 质量、重心/形心

例. L**为球面** $x^2+y^2+z^2=R^2$**在第一卦限与三个坐标面的交线, 求其形心.**



解: 如图所示, 交线长度为

$$l=3\int_{L_1}\mathrm{d}s=3\cdot\frac{2\pi R}{4}=\frac{3\pi R}{2}$$

由对称性, 形心坐标为

$$\bar{z}=\bar{y}=\bar{x}=\frac{1}{l}\int_{L_1+L_2+L_3}x\,\mathrm{d}s$$

$$=\frac{1}{l}\left[\int_{L_1}x\,\mathrm{d}s+\int_{L_2}x\,\mathrm{d}s+\int_{L_3}x\,\mathrm{d}s\right]=\frac{2}{l}\int_{L_1}x\,\mathrm{d}s$$

$$=\frac{2}{l}\int_0^{\frac{\pi}{2}}R\cos\theta\cdot R\,\mathrm{d}\theta=\frac{4R}{3\pi}$$

(1989（二）, 6 分)（2）求八分之一的球面 $x^2+y^2+z^2=R^2, x\geqslant 0$，$y\geqslant 0, z\geqslant 0$ 的边界曲线的重心，设曲线的线密度 $\rho=1$.

本题是上例的同一问题的两种叙述

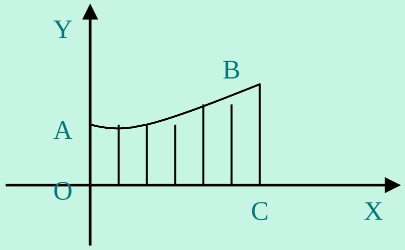
$$(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=(\frac{4R}{3\pi},\frac{4R}{3\pi},\frac{4R}{3\pi})$$

进一步将题目改为：求球面三角形 $x^2+y^2+z^2=R^2, x\geqslant 0$，$y\geqslant 0, z\geqslant 0$ 的形心坐标，设曲线的线密度 $\rho=1$.

$$(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=(\frac{R}{2},\frac{R}{2},\frac{R}{2})$$

求曲线AB的方程，使图形OABC绕x轴旋转一周而得的旋转体的重心横坐标等于曲线上任一点B的横坐标的 $\frac{4}{5}$.

解：设曲线AB的方程为y=f（x），B点的坐标为（x，f（x）），AB绕x轴旋转一周所得的旋转曲面方程：



$$\Sigma : y^2 + z^2 = f^2(x)$$

$$\bar{x} = \frac{\iiint\limits_{\Omega} x\,dxdydz}{\iiint\limits_{\Omega} dxdydz} = \frac{\int_0^x x\,dx \iint\limits_{D(x)} dydz}{\int_0^x dx \iint\limits_{D(x)} dydz}$$

$$\bar{x} = \frac{\int_0^x x f^2(x)\,dx}{\int_0^x f^2(x)\,dx} = \frac{4}{5}x$$

$$\therefore \int_0^x x f^2(x)\,dx = \frac{4}{5}x\int_0^x f^2(x)\,dx$$

两边对 x 求导，得

$$x f^2(x) = 4\int_0^x f^2(x)\,dx$$

再对 x 求导，$x f'(x) = \frac{3}{2} f(x)$

分离变量，$\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{3}{2x}$

两边积分，$\ln f(x) = \frac{3}{2}\ln x + \ln c$

所以 $f(x) = c x^{\frac{3}{2}}$.