人教A版数学课本优质习题总结训练——选择性必修二

P18

1．在等差数列$\{a_n\}$中，$a_n=m$，$a_m=n$，且$n\neq m$，求a_{m+n}.

P23

2．已知一个等差数列的项数为奇数，其中所有奇数项的和为290，所有偶数项的和为261．求此数列中间一项的值以及项数.

P24

3．已知数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=\frac{1}{4}n^2+\frac{2}{3}n+3$．求这个数列的通项公式.

4．已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\dfrac{n-2}{2n-15}$，前n项和为S_n．求S_n取得最小值时n的值.

P25

5．（1）求从小到大排列的前n个正偶数的和.

（2）求从小到大排列的前n个正奇数的和.

（3）在三位正整数的集合中有多少个数是5的倍数？求这些数的和.

（4）在小于100的正整数中，有多少个数被7除余2？这些数的和是多少？

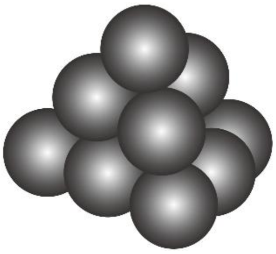
6．已知一个多边形的周长等于158cm，所有各边的长成等差数列，最大的边长为44cm，公差为3cm，求这个多边形的边数.

7．已知两个等差数列2，6，10，…，190及2，8，14，…，200，将这两个等差数列的公共项按从小到大的顺序组成一个新数列．求这个新数列的各项之和.

P26

8．如图的形状出现在南宋数学家杨辉所著的《详解九章算法·商功》中，后人称为“三角垛”“三角垛”的最上层有1个球，第二层有3个球，第三层有6个球……设各层球数构成一个数列$\{a_n\}$.

(1)写出数列$\{a_n\}$的一个递推公式；(2)根据(1)中的递推公式，写出数列$\{a_n\}$的一个通项公式.



P34

9．已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\dfrac{n^3}{3^n}$，求使a_n取得最大值时的n的值.

P37

10．已知$a\neq b$，且$ab\neq 0$．对于$n\in \mathrm{N}^*$，证明：$a^n+a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+\cdots+ab^{n-1}+b^n=\dfrac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}$.

11．如果一个等比数列前 5 项的和等于 10，前 10 项的和等于 50，那么这个数列的公比等于多少？

P40

12．一个乒乓球从1m高的高度自由落下，每次落下后反弹的高度都是原来高度的 0.61 倍．

(1)当它第 6 次着地时，经过的总路程是多少(精确到1cm)

(2)至少在第几次着地后，它经过的总路程能达到400cm？

13．求和：(1)$(2-3\times5^{-1})+(4-3\times5^{-2})+\cdots+(2n-3\times5^{-n})$；　　　(2)$1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}$．

P41

14．已知 S_n 是等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和，S_3，S_9，S_6 成等差数列.求证：a_2，a_8，a_5 成等差数列．

15．求下列数列的一个通项公式和一个前 n 项和公式：1，11，111，1111，11111，….

16．在数列$\{a_n\}$中，已知 $a_{n+1}+a_n=3\cdot n^2$，$a_1=1$．

(1)求证：$\{a_n-2^n\}$是等比数列．(2)求数列$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n．

17．已知数列$\{a_n\}$的首项$a_1=\dfrac{3}{5}$，且满足$a_{n+1}=\dfrac{3a_n}{2a_n+1}$．

(1)求证：数列$\left\{\dfrac{1}{a_n}-1\right\}$为等比数列．(2)若$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}<100$，求满足条件的最大整数 n．

18．已知数列$\{a_n\}$为等差数列，$a_1=1$，$a_3=2\sqrt{2}+1$，前 n 项和为S_n，数列$\{b_n\}$满足$b_n=\dfrac{S_n}{n}$，

求证：(1)数列$\{b_n\}$为等差数列；(2)数列$\{a_n\}$中的任意三项均不能构成等比数列．

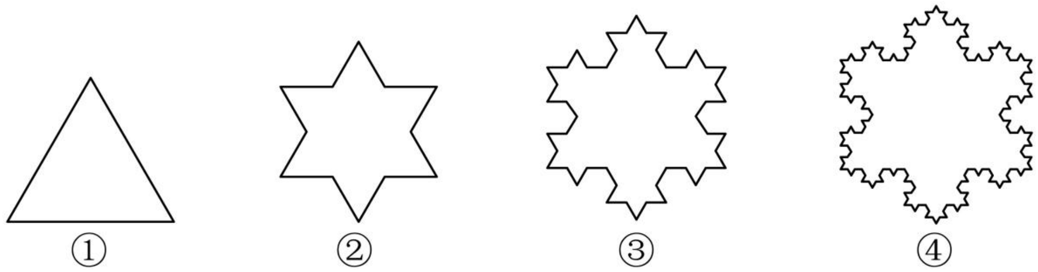
P55

19．已知数列$\{a_n\}$为等比数列，$a_1=1024$，公比$q=\dfrac{1}{2}$．若T_n是数列$\{a_n\}$的前 n 项积，求T_n的最大值．

20．《莱茵德纸草书》是世界上最古老的数学著作之一．书中有这样一道题目：把100个面包分给5个人，使每个人所得成等差数列，且使较大的三份之和的$\dfrac{1}{7}$是较小的两份之和，则最小的一份为(　　)

A．$\dfrac{5}{3}$　　　B．$\dfrac{10}{3}$　　　C．$\dfrac{5}{6}$　　　D．$\dfrac{11}{6}$

21．如图，雪花形状图形的作法是:从一个正三角形开始，把每条边分成三等份，然后以各边的中间一段为底边分别向外作正三角形，再去掉底边.反复进行这一过程，就得到一条“雪花”状的曲线.设原正三角形(图①)的边长为 1，把图①，图②，图③，图④中图形的周长依次记为 C_1，C_2，C_3，C_4，则 C_4=(　　)



A．$\frac{64}{9}$　　B．$\frac{128}{9}$　　C．$\frac{64}{27}$　　D．$\frac{128}{27}$

P56

22．任取一个正整数，若是奇数，就将该数乘 3 再加上 1；若是偶数，就将该数除以 2．反复进行上述两种运算，经过有限次步骤后，必进入循环圈 1→4→2→1．这就是数学史上著名的“冰雹猜想”(又称“角谷猜想”等)．如取正整数 $m=6$，根据上述运算法则得出 6→3→10→5→16→8→4→2→1，共需经过 8 个步骤变成 1(简称为 8 步“雹程”)．现给出冰雹猜想的递推关系如下：已知数列$\left\{a_n\right\}$满足：$a_1=m$ (m 为正整数)，$a_{n+1}=\begin{cases}\frac{a_n}{2},当a_n为偶数时\\3a_n+1,当a_n为奇数时\end{cases}$．

(1)当$m=17$时，试确定使得 $a_n=1$ 需要多少步雹程；

(2)若 $a_8=1$，求 m 所有可能的取值集合 M.

23．已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，且$S_4=4S_2$，$a_{2n}=2a_n+1(n\in N^*)$．

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；(2)若$b_n=3^{n-1}$，令$c_n=a_nb_n$，求数列$\left\{c_n\right\}$的前 n 项和T_n．

24．已知等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，且$a_{n+1}=2S_n+2(n\in N^*)$．

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式.

(2)在 a_n 与 a_{n+1} 之间插入 n 个数，使这 $n+2$ 个数组成一个公差为 d_n 的等差数列，在数列$\{d_n\}$中是否存在 3 项 d_m，d_k，d_p，(其中 m，k，p 成等差数列)成等比数列？若存在，求出这样的 3 项，若不存在，请说明理由.

25．类比等差数列和等比数列的定义、通项公式、常用性质等，发现它们具有如下的对偶关系：只要将等差数列的一个关系式中的运算“＋”改为“×”，“-”改为“÷”，正整数倍改为正整数指数幂，相应地就可得到等比数列中一个形式相同的关系式，反之也成立.

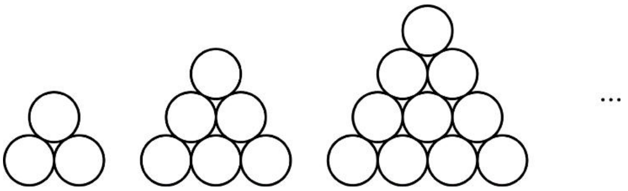
(1)根据上述说法，请你参照下表给出的信息推断出相关的对偶关系式；

名称	等差数列$\{a_n\}$	等比数列$\{b_n\}$
定义	$a_{n+1}-a_n=d$	
通项公式		$b_n=b_1q^{n-1}=b_mq^{n-m}$
常用性质	①$a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=a_3+a_{n-2}=\dots$ ②$a_{n-k}+a_{n+k}=2a_n(n>k)$ ③ ④	① ② ③若$m+n=k+l(m,n,k,l\in N^*)$，则$b_nb_m=b_kb_l$ ④$b_1b_2\cdots\cdots b_n=(b_1b_n)^{\frac{n}{2}}$

(2)在等差数列$\{a_n\}$中，若$a_{2018}=0$，则有$a_1+a_2+\ldots+a_n=a_1+a_2+\ldots+a_{4035-n}(n\in N^*,n<4035)$．相应地，在等比数列$\{b_n\}$中，若$b_{2019}=1$，请你类比推测出对偶的等式，并加以证明.

P57

26．在 2015 年苏州世乒赛期间，某景点用乒乓球堆成若干堆"正三棱锥"形的装饰品，其中第 1 堆只有 1 层，就一个球；第 2，3，4，…堆最底层(第一层)分别按图中所示方式固定摆放，从第二层开始，每层的小球自然垒放在下一层之上，第 n 堆第 n 层就放一个乒乓球．记第 n 堆的乒乓球总数为 $f(n)$．



(1)求出 $f(2)$；(2)试归纳出 $f(n+1)$与 $f(n)$的关系式，并根据你得到的关系式探求 $f(n)$的表达式．

参考公式：$1^2+2^2+\cdots+n^2=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$．

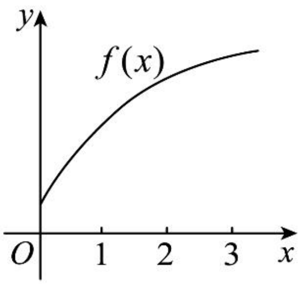
27．有理数都能表示成$\dfrac{m}{n}(m,n\in Z$，且 $n\neq0$，m 与 n 互质)的形式，进而有理数集 Q=$\{\dfrac{m}{n}\,|\,m,n\in Z$ 且 $n\neq0$，m 与 n 互质$\}$．任何有理数$\dfrac{m}{n}$都可以化为有限小数或无限循环小数．反之，任一有限小数也可以化为$\dfrac{m}{n}$的形式，从而是有理数；那么无限循环小数是否为有理数？

思考下列问题：(1)$1.\dot{2}$是有理数吗？请说明理由．(2)$1.\dot{2}\dot{4}$是有理数吗？请说明理由．

28．平面上有 $n(n\in N,n\geq3)$个点，其中任何三点都不在同一条直线上．过这些点中任意两点作直线，这样的直线共有多少条？证明你的结论．

P70

29．函数 $y=f(x)$的图象如图所示，它的导函数为 $y=f'(x)$，下列导数值排序正确的是(　　)



A．$f'(1)>f'(2)>f'(3)>0$　　B．$f'(1)<f'(2)<f'(3)<0$

C．$0<f'(1)<f'(2)<f'(3)$　　D．$f'(1)>f'(2)>0>f'(3)$

P81

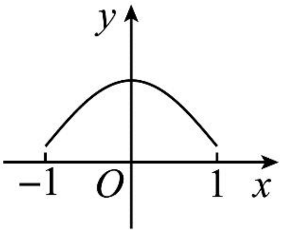
30．已知函数 $f(x)$满足 $f(x)=f'(\dfrac{\pi}{4})\sin x-\cos x$，求 $f(x)$在 $x=\dfrac{\pi}{4}$的导数．

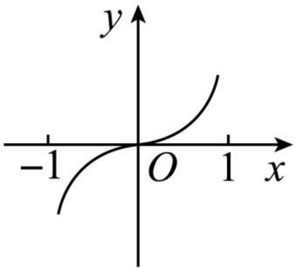
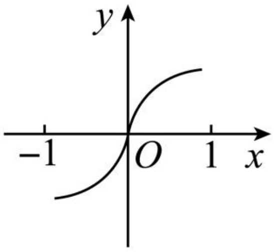
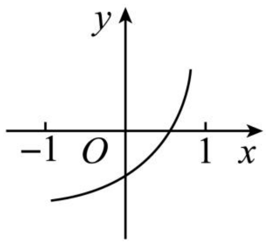
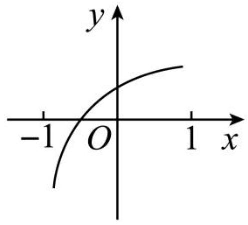
P98

31．用测量工具测量某物体的长度，由于工具的精度以及测量技术的原因，测得 n 个数据 a_1，a_2，a_3，…，a_n．证明：用 n 个数据的平均值 $x=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$ 表示这个物体的长度，能使这 n 个数据的方差 $f(x)=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x-a_i)^2$ 最小．

P103

32．已知函数 $y=f(x)$的图象是下列四个图象之一，且其导函数 $y=f'(x)$的图象如图所示，则该函数的图象是(　　)



A.  B.  C.  D. 

P104

33．已知函数 $f(x)=x(x-c)^2$ 在 $x=2$ 处有极大值，求 c 的值．

34．用总长 14．8m 的钢条制作一个长方体容器的框架，若制作的容器的底面的一边长比另一边长 0．5m．那么高为多少时，容器的容积最大？并求出它的最大容积？

35．用半径为 R 的圆形铁皮剪出一个圆心角为α的扇形，制成一个圆锥形容器，扇形的圆心角α为多大时，容器的容积最大？

36．作函数 $y=\dfrac{e^x(2x-1)}{x-1}$ 的大致图象．

37．1.已知函数 $f\left(x\right)=\mathrm{e}^x-\ln\left(x+m\right)\left(m\in\mathrm{R}\right)$，证明：当 $m\le 2$ 时，$f\left(x\right)>0$．

38．已知函数 $f\left(x\right)=a\mathrm{e}^{2x}+\left(a-2\right)\mathrm{e}^x-x$．

(1)讨论 $f(x)$的单调性；(2)若 $f(x)$有两个零点，求 a 的取值范围.

-选择性必修二结束-

参考答案：

1．$2n$

【分析】利用等差数列的通项公式，解出a_1、d，代入a_{m-n}即可.

【详解】设等差数列$\{a_n\}$的公差为d

则$\begin{cases} a_n = a_1+(n-1)d = m \\ a_m = a_1+(m-1)d = n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = m+n-1 \\ d=-1 \end{cases}$

所以$a_{m-n} = a_1+(m-n-1)d = m+n-1-m+n+1 = 2n$

2．此数列中间一项是29，项数为19.

【分析】设等差数列的项数为$2n-1$，利用等差数列的性质，求出所有奇数和与所有偶数和的比与n的关系，求出n，即可求出项数及中间一项.

【详解】设等差数列的项数为$2n-1$，

设所有的奇数项和为S，则$S=\dfrac{n(a_1+a_{2n-1})}{2}=na_n$，

设所有的偶数项和为T，则$T=\dfrac{(n-1)(a_2+a_{2n-2})}{2}=(n-1)a_n$，

$\dfrac{T}{S}=\dfrac{n-1}{n}=\dfrac{261}{290}=\dfrac{9}{10}$，解得$n=10$，

项数$2n-1=19$，中间项为a_{10}，

由$S=10a_{10}=290, a_{10}=29$，

所以此数列中间一项是29，项数为19.

3．$a_n=\begin{cases} \dfrac{47}{12}, n=1 \\ \dfrac{1}{2}n+\dfrac{5}{12}, n\ge 2 \end{cases}$

【分析】利用公式$a_n=\begin{cases} S_1, n=1 \\ S_n-S_{n-1}, n\ge 2 \end{cases}$

【详解】当$n=1$时，$a_1=S_1=\dfrac{1}{4}+\dfrac{2}{3}+3=\dfrac{47}{12}$，

当$n\ge 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\dfrac{1}{4}n^2+\dfrac{2}{3}n+3-\dfrac{1}{4}(n-1)^2-\dfrac{2}{3}(n-1)-3=\dfrac{1}{2}n+\dfrac{5}{12}$，

当$n=1$时，$a_1=\dfrac{1}{2}+\dfrac{5}{12}=\dfrac{11}{12}\ne\dfrac{47}{12}$，

所以$a_n=\begin{cases} \dfrac{47}{12}, n=1 \\ \dfrac{1}{2}n+\dfrac{5}{12}, n\ge 2 \end{cases}$.

4．$n=7$

【分析】首先求出数列的正负项，再判断S_n取得最小值时 n 的值.

【详解】当$a_n \le 0 \Leftrightarrow (n-2)(2n-15) \le 0$，$n \in \mathbf{N}^*$，

解得：$n=2,3,4,5,6,7$，

当$n=1$和$n \ge 8$时，$a_n > 0$，

所以S_n取得最小值时，$n=7$.

5.（1）$n(n+1)$；（2）n^2；（3）180，98550；（4）13，663.

【分析】根据等差数列的前 n 项和公式求和即可.

【详解】(1）通项公式为$a_n=2n$，所以$S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=n(n+1)$，

（2）通项公式为$a_n=2n-1$，所以$S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=n^2$，

（3）因为末尾数是 0 或者 5 的数均是 5 的倍数，故最小是 100，最大是 995，

所以$n=(995-100)\div 5+1=180$，

故和为$\dfrac{(100+995)\times 180}{2}=98550$，

（4）被 7 整除余 2 的数为$7n+2\left(n \in N^*\right)$，当$n=14$时，这个数等于 100，所以在小于 100 的正整数中共有 13 个数被 7 整除余 2，每相邻两个数之间的差（大数减小数）为 7，

所以$9\times 13+13\times 12\times \dfrac{7}{2}=663$.

6．4

【分析】利用等差数列的通项公式及求和公式，建立方程求得多边形的边数.

【详解】由题意可知：$a_n=44$，$S_n=158$，$d=3$

则$\begin{cases} S_n=\dfrac{n(a_1+44)}{2}=158 \\ a_n=a_1+3(n-1)=44 \end{cases}$，即$\begin{cases} n(a_1+44)=316 \\ a_1=47-3n \end{cases}$，得$3n^2-91\mathrm{n}+316=0$

解得：$n=4$或$n=\dfrac{79}{3}$（舍去）

故这个多边形的边数为 4.

7．1472

【分析】根据题意求出两个数列，相同的项组成的数列，求出项数，然后求出它们的和即可.

【详解】有两个等差数列 2，6，10，…，190 及 2，8，14，…，200，

由这两个等差数列的公共项按从小到大的顺序组成一个新数列，2，14，26，38，50，…，182 是两个数列的相同项.

共有$\dfrac{182-2}{12}+1=16$个，也是等差数列，

它们的和为$\frac{2+182}{2}\times 16=1472$，

这个新数列的各项之和为1472

8．（1）$a_n=a_{n-1}+n$；（2）$a_n=\frac{n(n+1)}{2}$．

【分析】(1）利用每一层的小球的数量找到递推关系得解；

（2）根据递推关系结合等差数列的求和公式即可得解.

【详解】(1）由题意可知，$a_1=1$，$a_2=a_1+2=1+2$，$a_3=a_2+3=1+2+3$，$\cdots$，$a_n=a_{n-1}+n$；所以数列$\{a_n\}$的一个递推公式为$a_n=a_{n-1}+n$；

（2）由题意，$a_n=a_{n-1}+n=1+2+3+\ldots+n$，故$a_n=1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$，

所以数列$\{a_n\}$的一个通项公式为$a_n=\frac{n(n+1)}{2}$.

9．3

【分析】根据已知条件列出前2项比较大小，然后根据a_n最大列出不等式方程组即可得到答案.

【详解】设$n=k$时，a_n最大，因为$a_1=\frac{1}{3}$，$a_2=\frac{8}{9}>a_1$，

所以$k>1$所以$\begin{cases}a_k\ge a_{k-1}\\a_k\ge a_{k+1}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{k^3}{3^k}\ge\frac{(k-1)^3}{3^{k-1}}\\\frac{k^3}{3^k}\ge\frac{(k+1)^3}{3^{k+1}}\end{cases}$，即$\begin{cases}k^3\ge 3(k-1)^3\\3k^3\ge(k+1)^3\end{cases}$，

故$\begin{cases}k\ge\sqrt[3]{3}\left(k-1\right)\\\sqrt[3]{3}k\ge k+1\end{cases}$，$\begin{cases}\left(\sqrt[3]{3}-1\right)k\le\sqrt[3]{3}\\\left(\sqrt[3]{3}-1\right)k\ge 1\end{cases}$，$\begin{cases}k\le\frac{\sqrt[3]{3}}{\left(\sqrt[3]{3}-1\right)}\approx 3.26\\k\ge\frac{1}{\left(\sqrt[3]{3}-1\right)}\approx 2.26\end{cases}$

即$2.26\le k\le 3.26(k\in Z)$，所以$k=3$，故当$a_n$取最大值时，$n=3$

10．证明过程看解析.

【分析】利用错位相减法直接求和.

【详解】证明：记$S_n=a^n+a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+\cdots+ab^{n-1}+b^n$，

因为$a^1\quad b$，且$ab\ne 0$，所以两边同乘以$\frac{a}{b}$，得：

$\frac{a}{b}S_n=\frac{a^{n+1}}{b}+a^n+a^{n-}b\cdots+ab^n$，

所以$\left(1-\frac{a}{b}\right)S_n=b^n-\frac{a^{n+1}}{b}=\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{b}$，

所以$S_n=\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}$.

所以$a^n+a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+\cdots+ab^{n-1}+b^n=\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}$，即证.

11．$4^{\frac{1}{5}}$

【分析】依题意设数列的首项为a_1，公比为$q\left(q\neq 1\right)$，根据等比数列前n项和公式得到方程组，两式作商即可求出q

【详解】解：依题意设数列的首项为a_1，公比为$q\left(q\neq 1\right)$，则$S_5=\dfrac{a_1\left(1-q^5\right)}{1-q}=10$，$S_{10}=\dfrac{a_1\left(1-q^{10}\right)}{1-q}=50$，所以

$\dfrac{\dfrac{a_1\left(1-q^{10}\right)}{1-q}}{\dfrac{a_1\left(1-q^5\right)}{1-q}}=5$，即$\dfrac{1-q^{10}}{1-q^5}=5$，所以$\dfrac{\left(1-q^5\right)\left(1+q^5\right)}{1-q^5}=5$，解得$1+q^5=5$，即$q^5=4$，所求$q=4^{\frac{1}{5}}$

12．(1)386cm (2)8

【分析】（1）利用等比数列的求和公式可得；

（2）利用求和公式列出不等式即可求出.

【详解】（1）由题可知，每次落地的高度形成以 1 为首项，0.61 为公比的等比数列，

则当它第 6 次着地时，经过的总路程为

$1+2\left(0.61+0.61^2+\cdots+0.61^5\right)=1+2\times\dfrac{0.61\left(1-0.61^5\right)}{1-0.61}\approx 3.86\text{m}$ ，

所以当它第 6 次着地时，经过的总路程是 386cm；

（2）由题意得$1+2\left(0.61+0.61^2+\cdots+0.61^{n-1}\right)=1+2\times\dfrac{0.61\left(1-0.61^{n-1}\right)}{1-0.61}\geq 4$，

整理得$0.61^n\leq 0.025$，所以$n\geq 8$，

则至少在第 8 次着地后，它经过的总路程能达到400cm.

13．（1）$n(n+1)-\dfrac{3}{4}(1-5^{-n})$（2）$\begin{cases}\dfrac{(1+n)n}{2}, & x=1\\ \dfrac{1-2x^n-x^{n+1}}{(1-x)^2}, & x\neq 1\end{cases}$

【分析】（1）将式子分组，再分别利用等差数列与等比数列的前n项和公式即可.

（2）讨论x的取值，当$x=1$时，直接利用等差数列的前n项和公式；当$x\neq 1$时，利用错位相减即可求出答案.

【详解】（1）$(2-3\times 5^{-1})+(4-3\times 5^{-2})+\cdots+(2n-3\times 5^{-n})$

$=(2+4+\cdots+2n)-3(5^{-1}+5^{-2}+\cdots+5^{-n})$

$=\dfrac{(2+2n)n}{2}-3\dfrac{5^{-1}(1-5^{-n})}{1-5^{-1}}=n(n+1)-\dfrac{3}{4}(1-5^{-n})$

（2）当$x=1$时：$1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}=1+2+3+\ldots+n=\dfrac{(1+n)n}{2}$

当$x\neq 1$时：记$S_n=1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}$ ①

$①\times x: xS_n = x+2x^2+3x^3+\ldots+nx^n \quad ②$

$①-②: (1-x)S_n = 1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}-x^n = \dfrac{1-x^n}{1-x}-x^n$

化简得：$S_n=\dfrac{1-2x^n-x^{n+1}}{(1-x)^2}$

综上所述：$1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}=\begin{cases}\dfrac{(1+n)n}{2}, & x=1\\ \dfrac{1-2x^n-x^{n+1}}{(1-x)^2}, & x\neq 1\end{cases}$

14．见解析

【分析】根据$\{a_n\}$为等比数列且S_3，S_9，S_6成等差数列，即可解出$q^3=-\dfrac{1}{2}$，将a_8、a_5用a_2表示出来，即可证明之.

【详解】因为S_3，S_9，S_6成等差数列，所以$2S_9=S_3+S_6$

（1）当$q=1$时：$S_9=9a_1, S_3=3a_1, S_6=6a_1$，代入$2S_9=S_3+S_6$解得$a_1=0$.不满足题意.

（2）当$q\neq 1$时：$S_9=\dfrac{a_1(1-q^9)}{1-q}, S_3=\dfrac{a_1(1-q^3)}{1-q}, S_6=\dfrac{a_1(1-q^6)}{1-q}$，代入$2S_9=S_3+S_6$得$2\dfrac{a_1(1-q^9)}{1-q}=\dfrac{a_1(1-q^3)}{1-q}+\dfrac{a_1(1-q^6)}{1-q}$.

化简得$q^3=-\dfrac{1}{2}$.

所以$a_5=a_2\cdot q^3=-\dfrac{1}{2}a_2$,即$a_2+a_5=\dfrac{a_2}{2}$，$a_8=a_2\cdot(q^3)^2=\dfrac{a_2}{4}$，所以$2a_8=a_2+a_5$.

所以a_2，a_8，a_5成等差数列.

15．$a_n=\dfrac{1}{9}\times(10^n-1)(n\in N^*)$，$S_n=\dfrac{10^{n+1}-9n-10}{81}(n\in N^*)$.

【分析】利用$1=\dfrac{1}{9}\times 9=\dfrac{1}{9}\times(10-1)$ 中10^n 实现 1,11,111,1111,1111……，从 1 位数到 *n* 位数.

【详解】设该数列为$\{a_n\}$，其前 *n* 项和为S_n

因为
$$\begin{aligned}&a_1=1=\frac{1}{9}\times(10-1),\\&a_2=11=\frac{1}{9}\times(10^2-1),\\&a_3=111=\frac{1}{9}\times(10^3-1),\\&a_4=1111=\frac{1}{9}\times(10^4-1),\\&a_5=11111=\frac{1}{9}\times(10^5-1),\\&\ldots\ldots\end{aligned}$$
，所以该数列的一个通项公式为$a_n=\dfrac{1}{9}\times(10^n-1)(n\in N^*)$，

$S_n=\frac{1}{9}\times[(10-1)+(10^2-1)+(10^3-1)+\cdots+(10^n-1)]$

$=\frac{1}{9}\times(10+10^2+10^3+\cdots+10^n-n)$

$=\frac{1}{9}[\frac{10(1-10^n)}{1-10}-n]$

$=\frac{10^{n+1}-9n-10}{81}(n\in N^*)$

16．(1)证明详见解析　　(2) $S_n=2^{n+1}+\frac{(-1)^n-5}{2}$

【分析】（1）通过凑配法证得$\left\{a_n-2^n\right\}$是等比数列。（2）利用分组求和法求得S_n.

【详解】（1）由$a_{n+1}+a_n=3\cdot 2^n$，得$a_{n+1}-2^{n+1}+a_n=3\cdot 2^n-2^{n+1}=2^n$，

即$a_{n+1}-2^{n+1}=-\left(a_n-2^n\right)$，

所以$\left\{a_n-2^n\right\}$是首项为$a_1-2^1=-1$，公比为-1的等比数列.

（2）由（1）得$a_n-2^n=(-1)\times(-1)^{n-1}=(-1)^n, a_n=2^n+(-1)^n$.

所以$S_n=2+2^2+\cdots+2^n+(-1)^1+(-1)^2+\cdots+(-1)^n$

$=\frac{2\left(1-2^n\right)}{1-2}+\frac{-\left[1-(-1)^n\right]}{1-(-1)}=2^{n+1}-2+\frac{(-1)^n-1}{2}=2^{n+1}+\frac{(-1)^n-5}{2}$.

17.（1）证明见解析；　（2）99.

【分析】（1）由$a_{n+1}=\frac{3a_n}{2a_n+1}$，化简得到$\frac{1}{a_{n+1}}-1=\frac{1}{3}(\frac{1}{a_n}-1)$，结合等比数列的定义，即可求解；

（2）由（1）求得$\frac{1}{a_n}=\frac{2}{3}\times(\frac{1}{3})^{n-1}=2\cdot(\frac{1}{3})^n+1$，根据等比数列的求和公式和常数列的求和公式，求得$S_n=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}=n+1-\frac{1}{3^n}$，根据$S_n<100$，即可求解.

【详解】（1）由题意，数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=\frac{3a_n}{2a_n+1}$，可得$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{2a_n+1}{3a_n}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{a_n}+\frac{2}{3}$，

可得$\frac{1}{a_{n+1}}-1=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{a_n}+\frac{2}{3}-1=\frac{1}{3}(\frac{1}{a_n}-1)$，即$\frac{\frac{1}{a_{n+1}}-1}{\frac{1}{a_n}-1}=\frac{1}{3}$，

又由$a_1=\frac{3}{5}$，所以$\frac{1}{a_1}-1=\frac{2}{3}$，

所以数列$\left\{\frac{1}{a_n}-1\right\}$表示首项为$\frac{2}{3}$，公比为$\frac{1}{3}$的等比数列.

（2）由（1）可得$\frac{1}{a_n}-1=\frac{2}{3}\times(\frac{1}{3})^{n-1}=2\cdot(\frac{1}{3})^n$，所以$\frac{1}{a_n}=\frac{2}{3}\times(\frac{1}{3})^{n-1}=2\cdot(\frac{1}{3})^n+1$