自测题

自测题一

1．已知 $a^2+4a+1=0$，并且

$$\frac{a^4+ma^2+1}{2a^3+ma^2+2a}=3,$$

求 m 的值.

2．已知不等式 $ax+3\geqslant 0$ 的正整数解为 1,2,3，求 a 的取值范围.

3．已知方程组

$$\begin{cases}x+y=5,\\3x^2+y^2=23\end{cases}$$

的两组解是 (x_1,y_2) 与 (x^2,y_2)，求 $x_1y_2+x_2y_1$ 的值.

4．设 $a+b+c=a^2+b^2+c^2=2$，证明：

$$a(1-a)^2=b(1-b)^2=c(1-c)^2.$$

5．在△ABC 中，AC=24，BC=10，AB=26，则它的内切圆半径等于多少?

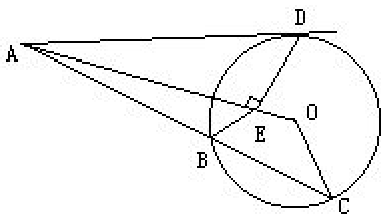

图 3-169

6．如图 3-169．AD 是⊙O 的切线，D 是切点，ABC 是⊙O 的割线，交⊙O 于 B，C，DE⊥AO 于 E，求证：∠AEB=∠ACO.

7．过△ABC 内部任一点 P 分别作 BC，CA，AB 边的平行线，设它们与另外两边的交点分别是 D，E，F，G，H，I，则 $\frac{DE}{BC}+\frac{FG}{CA}+\frac{HI}{AB}$ 的值为定值.

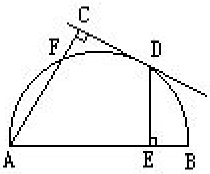

图 3-170

8, 如图 3-170．AB 是半圆的直径, CD 是半圆的切线, 切点为 D, AC⊥CD 于 C, 交半圆于 F, DE⊥AB 于 E．求证：$DE^2=AC\cdot FC$.

9．城市 A 位于一条铁路线上而附近的一个小镇 B 需要从 A 市购进大量生活、生产用品．如果铁路运费是公路运费的一半, 试问该如何从 B 修筑一条公路到铁路边, 使从 A 到 B 的运费最低?

自测题二

1．已知 $3a+b+2c=3$, 且 $a+3b+2c=1$, 求 $2a+c$ 的值.

2．84 能否表示成若干个连续正整数的和的形式?如果不能, 请给出证明．如果能, 则给出所有的表示方法.

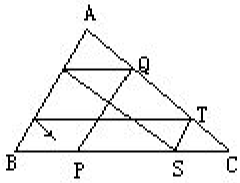

图 3-171

3．(1)有△ABC, 过边 BC 上一点 P 作 PQ∥AB 交 AC 于 Q, 作 QR∥BC 交 AB 于 R, 作 RS∥AC 交 BC 于 S, 作 ST∥AB 交 AC 于 T, 作 TU∥BC 交 AB 于 U, 如果过 U 作 AC 的平行线是否过 P(图 3-171)?

(2)如果通过 P, 设△ABC 中, BC=a, CA=b, AB=c, 试用 a, b, c 表示折线 PQRSTUP 的长度.

4．圆 O 内有 AB, l_1, l_2 分别是以 A, B 为切点的⊙O 的切线，P是 $\overset{\frown}{AB}$ 上的任一点．如果PS⊥AB于S，PN⊥l_1；于N，PM⊥l_2于 M．求证：$PS^2=PN\cdot PM$(图 3-172).

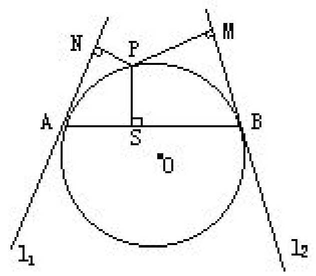

图 3-172

5．证明不存在两个这样的既约分数,它们的和与积均为整数.

6．若正整数 p,q,r 使得二次方程

$$px^2-qx+r=0$$

的两个根 α，β 满足 0＜α＜β＜1,求 p 的最小值.

7．已知半径为 r 的圆上有一个定点 P,过 P 作圆的切线 l,过圆上一动点 R 引 RQ⊥l 于 Q,求△PQR 面积的最大值.

8．在△ABC 中,∠BAC≥120°,求证：b+c≤2R(其中 R 为△ABC 外接圆半径).

9．在 12 小时内,时针与分针有多少个时刻在一条直线上?

自测题三

1．已知实数 a,b,c 满足

$$a^2-a-bc+1=0, ①$$

$$2a^2-2bc-b-c+2=0, ②$$

求证：a≥1.

2．若 a＞0,且 b＞a＋c,求证：方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个不相等的实根.

3．一元二次方程 $x^2+px=19=0$ 的两个根恰好比方程 $x^2-Ax+B=0$ 的两个根分别大 1,其中 A,B,p 都是整数,求 A+B 的值.

4．已知实数 x_0,y_0 是方程组

$$\begin{cases} y=\dfrac{1}{x}, \\ y=|x|+1 \end{cases}$$

的解,求 x_0+y_0 的值.

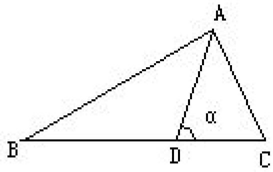

图 3-173

5．如图 3-173．AD 是△ABC 的角平分线,∠ADC=α,AD^2=BD·DC．求证：cosA=$\cos^2$α．

6．设 α 为锐角,且 α≠45°,若

$$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\frac{1}{3}\sin\alpha-\frac{1}{3}\cos\alpha=1,$$

试写出 tgα,ctgα 为两根的一元二次方程.

7．在△ABC 中,∠A 是直角,AD⊥BC 于 D,AT 是∠A 的平分线,O_1,O_2 分别是△ABD 和△ACD 的内心．求证：AT⊥O_1O_2(图 3-174)．

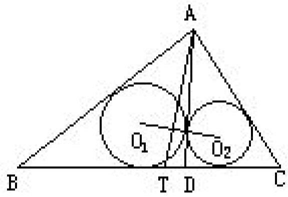

图 3-174

8．已知⊙O 为定圆,△ABC 内接于圆,且 AB=AC,AD 为底边 BC 上的高．试问 BC 为何值时,AD+BC 的值最大(图 3-175)？

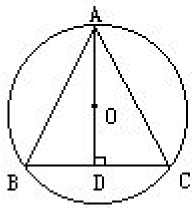

图 3-175

9．从不同地区的甲、乙和丙三个工厂分别运出某种设备 12 套、10 套和 12 套,给 A 市 20 套,B 市 14 套．已知从甲厂调运一套设备到 A 市、B 市的运费分别为 200 元和 600 元;从乙厂调运一套设备到 A 市、B 市的运费分别为 300 元和 700 元;从丙厂调运一套设备到 A 市、B 市的运费都是 400 元．试问从甲、乙、丙各工厂向 A 市、B 市分别调运多少套设备时,使总运费最省?

自测题四

1．已知a，b，k是有理数，并且$b=ak+\frac{c}{k}$，证明方程$ax^2+bx+c=0$的两根都是有理数.

2．已知方程｜$x^4-a-1=0$ 有 4 个实根,求实数 a 的取值范围.

3．有一张平行四边形纸片ABCD，$AD=\frac{7\sqrt{5}}{5}$厘米，DC＝7厘米，

DC＝7厘米，ADC为钝角，且$\sin\angle ADC=\frac{\sqrt{5}}{5}$．将此平行四边形纸片折叠,使 A 点与 C 点重合,折痕为 PG,P 在 AB 边上,G 在 CD 边上,求 PG 的长.

4．使 n^3+100 能被 $n+10$ 整除的正整数 n 的最大值是多少?

5．过⊙O 的 O 点引割线 PQ,使 PO=OQ,过 P 引⊙O 的割线交⊙O 于 C,D,过 Q 引⊙O 的切线,切点为 B,连 BC 交 PQ 于 E,连 BD 交 PQ 于 F．求证:OE=OF(图 3-176).

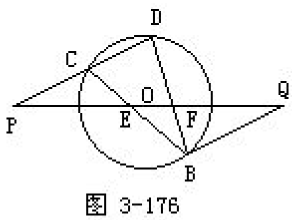

图 3-176

6．已知实数x，y分别满足$\frac{4}{x^4}-\frac{2}{x^2}-3=0$和$y^4+y^2-3=0$，求代数式$\frac{x^4y^4+4}{x^4}$的值.

7．直角△ABC 中，AC+BC=144 厘米，CD⊥AB，CD=4.8 厘米(3-177)．求△ABC 内切圆半径和外接圆半径．

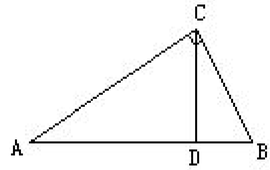

图 3-177

8．如图 3-178，I 是△ABC 的内心，IA=l，IB=m，IC=n，求证：$al^2+bm^2+cn^2=abc$．

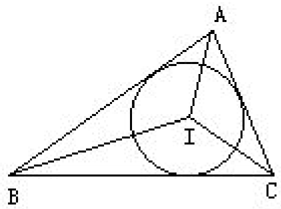

图 3-178

9．有一批长为 60 厘米的铝合金材料，现要截成 24 厘米和 7 厘米的两种规格的短材备用．那么，

(1)怎样截材可使原材料的利用率最高?并求利用率是多少?

(2)若要截成 24 厘米和 17 厘米的材料各 40 根备用，试问怎样截法可使原材料利用率最高?

自测题五

1. 当$x=\sqrt{3}-\sqrt{2}$时，求代数式$x^4-9x^2+2\sqrt{2}x+1$的值.

2．解方程组

$$\begin{cases}2xy-5\sqrt{xy+1}=10,\\ x^2+y^2=34.\end{cases}$$

3. a，b都是正实数，且$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-\frac{1}{a+b}$，求$\left(\frac{b}{a}\right)^2+\left(\frac{a}{b}\right)^2$的值.

4．如图 3-179．一个圆交等边三角形 ABC 于 D,E,F,G,H,I 六点．如果 AG=2,GF=13,FC=1,HI=7,那么 DE 的长等于多少?

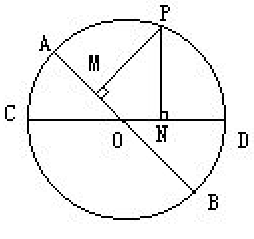

图 3-161

5．设△ABC 的∠A 的平分线交 BC 于 D,l 是过 A 的△ABC 外接圆的切线,CE∥AD 交 l 于 E．求证：DE∥AB(图 3-180)．

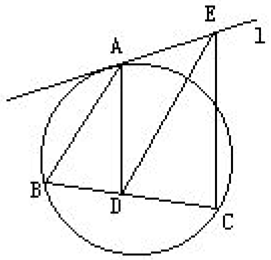

图 3-180

6．证明：如果整系数二次方程

$$ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$$

有有理根,那么 a,b,c 中至少有一个是偶数．

7．正三角形 ABC 的内切圆 I 与 BC,CA,AB 分别切于 D,E,F，P为⊙I的劣弧$\overset{\frown}{EF}$上任意一点，P在BC，CA，AB上的射影分别为L，M，N．求证：$\sqrt{PL}=\sqrt{PM}+\sqrt{PN}$.

8．实数 a 为何值时,方程组

$$\begin{cases} ax+2y=a, & ① \\ x+(a+1)y=a+3 & ② \end{cases}$$

的解适合 xy＜0?

9．图 3-181 是一张折叠的钢丝床简图．这是展开后放在地面的情景,如果折起来,床头部分便折到了床下面,由于 A,B,C,D 各点是活动的,当折叠时,△ACD(B 在 AC 上)就变化为四边形 ABCD(图 3-182),进而 B,A,C,D 在

一条直线上．如果在四边形ABCD中,AB=a,CD=b,那么BC,AD各为多少时,这张叠折床就设计成功了?

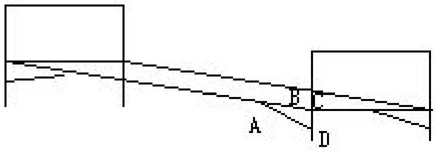

图 3-181

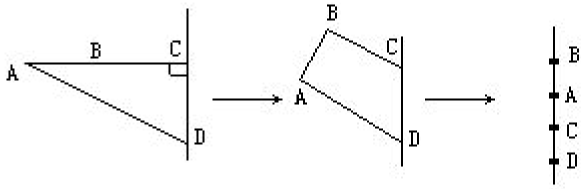

图 3-182

自测题解答

自测题一

1．因为$a^2+4a+1=0$，所以$a\neq 0$，且$a+\frac{1}{a}=-4$，所以

$$a^2+\frac{1}{a^2}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2=14.$$

又由题设知

$$\frac{a^2+\frac{1}{a^2}+m}{2\left(a+\frac{1}{a}\right)+m}=3，即\frac{14+m}{-8+m}=3,$$

所以 m=19.

2．因为 ax≥-3 的正整数解只有 1,2,3,所以 a＜0,x≤$-\frac{3}{a}$，且$3\leqslant -\frac{3}{a}<4$，即$-1\leqslant a<-\frac{3}{4}$.

3．消去 y,得 $2x^2-5x+1-0$,所以

$$x_1+x_2=\frac{5}{2}，x_1x_2=\frac{1}{2}.$$

所以

$$\begin{aligned}x_1y_2+x_2y_1&=x_1(5-x_2)+x_2(5-x_1)\\&=5(x_1+x_2)-2x_1x_2=\frac{23}{2}.\end{aligned}$$

4．由题设有

$$ab+bc+ca=\frac{1}{2}[(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)]=1.$$

构造辅助函数 $f(x)=x(1-x)^2$,只需证 fA．=fB．=fC．．

因为

$$\begin{aligned}&(x-a)(x-b)(x-c)\\&=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc\\&=x^3-2x^2+x-abc=f(x)-abc,\end{aligned}$$

所以

$$f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)+abc.$$

令 x=a,b,c,得 fA．=fB．=fC．,从而

$$a(1-a)^2=b(1-b)^2=c(1-c)^2=abc.$$

5．由 AC=24,BC=10,AB=26,可得 $AC^2+BC^2=AB^2$,所以∠C=90°,即△ABC为直角三角形.

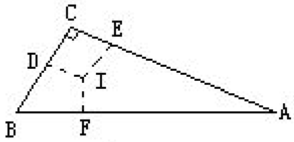

图 3-228

设 I 为△ABC 内心,过 I 向△ABC 三边作垂线,垂足分别为 D,E,F(如图 3－228)．由切线长定理可得

$$CD=CE=\frac{1}{2}(CB+CA-AB)=4.$$

因为∠IDC=∠C=∠IEC=90°,且 ID=IE,所以四边形 IDCE 为正方形,所以内切圆半径=IE=CE=4.

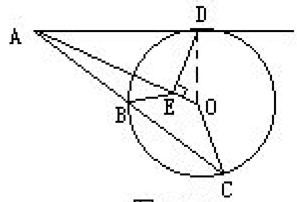

图 3-229

6．如图 3－229．连结 OD,因为 AD 切⊙O 于 D,所以 OD⊥AD．又因为 DE⊥AO,所以△ADE∽△AOD,所以

$$\frac{AD}{AE}=\frac{AO}{AD},\ AD^2=AE\cdot AO.$$

又因为 $AD^2=AB\cdot AC$,所以

$$AE\cdot AO=AB\cdot AC,\ 即\ \frac{AE}{AB}=\frac{AC}{AO}.$$

所以 $\triangle ABE\backsim\triangle AOC$,

所以 $\angle AEB=\angle ACO$.

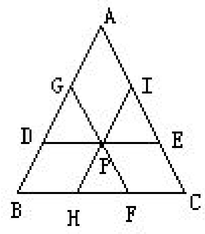

图 3-230

7．如图 3－230．由于 DE∥BC,HI∥AB,FG∥AC,所以四边形 DBHP 和 PFCE 为平行四边形,所以

$$DP=BH,PE=FC.$$

又

$$\frac{DE}{BC}=\frac{DP+PE}{BC}=\frac{BH+FC}{BC},$$

而

$$\frac{FG}{AC}=\frac{BF}{BC},\quad \frac{HI}{AB}=\frac{HC}{BC},$$

所以

$$\frac{DE}{BC}+\frac{FG}{AC}+\frac{HI}{AB}=\frac{BH+FC+BF+HC}{BC}=\frac{2BC}{BC}=2(定值).$$

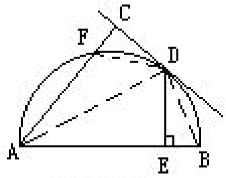

图 3-231

8．连DF，BD，AD(图3－231)，因为$\overset{\frown}{ADB}$为半圆，所以∠ADB＝90°．又因为DE⊥AB,所以

$$DE^2=AE\cdot EB.\quad ①$$

又由于CD是切线,所以∠CDA=∠ABD,而∠DBA=∠ADE,所以∠CDA=∠ADE,所以△ADC≌△AED,所以AE=AC,②

$$CD=DE.$$

又因为∠CFD=∠DBE,所以△CFD≌△EDB,所以

$$FC=EB.\quad ③$$

由①,②,③得

$$DE^2=AC\cdot FC.$$

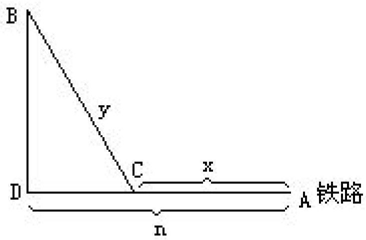

图 3-232

9．设铁路与公路的交接点为C,AC=x,BC=y．BD⊥AD于D,BD=m,AD=n(图3－232),则依题意求x＋2y的最小值,用S表示．

因为$DC=\sqrt{y^2-m^2}$,

所以

$$x=n-\sqrt{y^2-m^2},$$

即 $$3y^2-4(S-n)y+(S-n)^2+m^2=0,$$

$$y=\frac{2}{3}(S-n)\pm\frac{\sqrt{(S-n)^2-3m^2}}{3}.$$

要求S的最小值,只要求S-n的最小值．因为y有实数解,所以

所以当$S-n=\sqrt{3}m$时，S有最小值，此时

$$y=\frac{2}{3}\cdot m\cdot\sqrt{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}m(\text{与AD长无关}).$$

所以

$$\sin\angle BCD=\frac{m}{\frac{2\sqrt{3}}{3}m}=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \angle BCD=60^\circ\ .$$

可见,不管 AD 多长,从 B 点修筑的公路应与铁路线成 60° 角.

注意如果保持∠BCD=60°,但 C 点不在 AD 之间时,所得之解显然不适用. 这时,直接由 B 到 A 筑一条公路而不用铁路会更省.

自测题二

1. 由题设可得

$$\begin{cases}2(a+b+c)+(a-b)=3,\\2(a+b+c)(a-b)=1.\end{cases}$$

解得 $a+b+c=1$, $a-b=1$. 把这两个式子相加得

$$2a+c=2.$$

或由已知二式相加得 $4(a+b+c)=4$,从而 $a+b+c=1$. 代入已知条件 $3a+b+2c=3$ 中,即得 $2a+c=2$.

2. 设 $84=m+(m+1)+\cdots+(m+k)$ (m,k 为正整数),则

$$(k+1)m+\frac{k(k+1)}{2}=84,$$

即 $\qquad (k+1)(k+2m)=168.$

$k+1$ 和 $k+2m$ 是奇偶性不同、大小不等的两个正整数,且 $k+1<k+2m$. 由于

$$168=3\times56=7\times24=8\times21,$$

所以我们得出以下三个方程组：

$$\begin{cases}k+1=3,\\k+2m=56;\end{cases}\quad\begin{cases}k+1=7,\\k+2m=24;\end{cases}\quad\begin{cases}k+1=8,\\k+2m=21.\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}k=2,\\m=27;\end{cases}\quad\begin{cases}k=6,\\m=9;\end{cases}\quad\begin{cases}k=7,\\m=7.\end{cases}$$

于是有

$$84=27+28+29,$$

$$84=9+10+11+12+13+14+15,$$

$$84=7+8+9+10+11+12+13+14.$$

综上所述,84 能够表示成若干个连续正整数的和,表示方法共三种,如上所示.

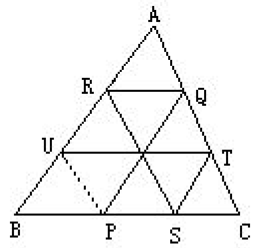

图 3-233

3．(1)如图 3－233．连 UP,在△ARQ 与△BUP 中,因为∠ARQ=∠UBP,又因为 AR=TS=BU,RQ=BP,所以△ARQ≌△UBP,所以

∠BUP=∠RAQ,UP∥AC.

所以过 U 引 AC 的平行线必过 P 点.

(2)由于 UT=PC,PQ=AU,RS=QC,RQ=BP,ST=BU,PU=AQ,所以折线 PQRSTUP=a＋b＋c.

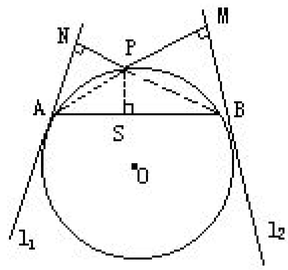

图 3-234

4．连 PA,PB(图 3－234),在△APN 与△BPS 中,

$$\angle PNA=\angle PSB=90°,\angle NAP=\angle PBS,$$

所以 △PNA∽△PBS,

所以 $PS^2=PN\cdot PM$.

5. 设$\frac{u_1}{v_1}$，$\frac{u_2}{v_2}$是两个既约分数(u_1，u_2，v_1，v_2均为整数)，并且

$$\frac{u_1}{v_1}+\frac{u_2}{v_2}=a,\ \frac{u_1}{v_1}\cdot\frac{u_2}{v_2}=b,$$

所以$\frac{PS}{PN}=\frac{PB}{PA}$. 同理，$\frac{PS}{PM}=\frac{PA}{PB}$. 所以

$$\frac{PS^2}{PN\cdot PA}=\frac{PB}{PA}\cdot\frac{PA}{PB}=1,$$

其中a，b是整数．引入辅助方程$x^2-ax+b=0$，它们的两个根分别是$\frac{u_1}{v_1}$，$\frac{u_2}{v_2}$．将$\frac{u_1}{v_1}$代入方程得

$$\frac{u_1^2}{v_1^2}-a\cdot\frac{u_1}{v_1}+b=0,\text{即}\frac{u_1^2}{v_1}=au_1-bv_1,$$

上式右边为整数．因$(u_1,v_1)=1$，故$(u_1^2,v_1)=1$，于是上式右边不是整数,矛盾．因此,不存在两个既约分数,它们的和与它们的乘积均为整数.

6．设 α，β 是二次方程 $px^2-qx+r=0$ 的两个根,
$\alpha\neq\beta,0<\alpha<1,0<\beta<1$,我们有

$$\alpha(1-\alpha)\leqslant\frac{1}{4},\ \beta(1-\beta)\leqslant\frac{1}{4},$$

上述两个不等式分别当$\alpha=\frac{1}{2}$，$\beta=\frac{1}{2}$时等号成立．由于α≠β，上述两个不等式中至少有一个是严格不等式，故

$$\frac{1}{16}>\alpha\beta(1-\alpha)(1-\beta)=\alpha\beta[1-(\alpha+\beta)+\alpha\beta]$$
$$=\frac{r}{p}\left(1-\frac{q}{p}+\frac{r}{p}\right)=\frac{r}{p^2}(p-q+r),$$

所以 $p^2>16r(p-q+r)$．①

又因为$f(x)=px^2-qx+r$的二次项系数$p>0$,且它的两个根在(0,1)内,故

$$f(1)=p-q+r>0, r(p-q+r)>0.$$

由于p,q,r均为正整数,故$r(p-q+r)\geqslant 1$．从①式便得

$$p^2>16r(p-q+r)\geqslant 16,$$

所以$p>4$,即$p\geqslant 5$．又当$p=5$时,二次方程$5x^2-5x+1=0$的两根

$\alpha=\frac{5+\sqrt{5}}{10}$，$\beta=\frac{5-\sqrt{5}}{10}$均在(0，1)内，故p的最小值为5.

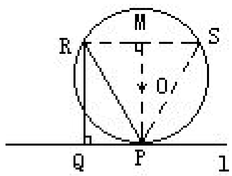

图 3-235

7．如图3－235．作RS∥PQ交⊙O于S,连结PO并延长PO交RS于M．因为l切⊙O于P,所以PO⊥l．又因为RS∥l,所以PO⊥RS于M,所以M为RS中点．因为RQ⊥l于Q,所以∠RQP=∠QPM=∠PMR=90°,所以四边形RQPM为矩形,所以

$$S_{\triangle PQR}=S_{\triangle PMR}=\frac{1}{2}S_{\triangle PRS}.$$

由于△PRS为圆内接三角形,所以当它为等边三角形时面积最大．△PRS最大面积为$\frac{3\sqrt{3}}{4}r^2$，此时△PQR最大面积为$\frac{3\sqrt{3}}{8}r^2$.

8．由余弦定理得

$$\begin{aligned}a^2&=b^2+c^2-2bc\cos A\\&=(b+c)^2-2bc(1+\cos A)\\&=(b+c)^2-\frac{(b+c)^2-(b-c)^2}{2}(1+\cos A)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&=(b+c)^2-\frac{(b+c)^2}{2}(1+\cos A)+\frac{(b-c)^2}{2}(1+\cos A)\\&=\frac{1-\cos A}{2}(b+c)^2+\frac{1+\cos A}{2}(b-c)^2,\end{aligned}$$

所以

$$(2R\sin A)^2=\frac{1-\cos A}{2}(b+c)^2+\frac{1+\cos A}{2}(b-c)^2,$$

即

$$4R^2(1-\cos^2A)=\frac{1-\cos A}{2}(b+c)^2+\frac{1+\cos A}{2}(b-c)^2.$$

两边同除以$\frac{1-\cos A}{2}$得

$$8R^2(1+\cos A)=(b+c)^2+\frac{1+\cos A}{1-\cos A}(b-c)^2\geqslant(b+c)^2.$$

所以

$$b+c\leqslant 2R\sqrt{2(1+\cos A)}.$$

因为$A\geqslant120°$，所以$\cos A\leqslant-\frac{1}{2}$，所以$2(1+\cos A)\leqslant1$，所以

$$b+C\leqslant2R.$$

9．设时针与分针同时从 12 点转动．如果时针走了 x 刻度,则时针与分针成一条直线时,分针距刻度"12”应是 x+30 个刻度,那么,时