关于协整检验与模型

Johansen协整检验

第4章最后一部分的协整检验和误差修正模型主要是针对单方程而言，本节将推广到VAR模型。而且前面所介绍的协整检验是基于回归的残差序列进行检验，本节介绍的Johansen协整检验基于回归系数的协整检验，有时也称为JJ(Johansen-Juselius)检验。

Johansen在1988年及在1990年与Juselius一起提出的一种以VAR模型为基础的检验回归系数的方法，是一种进行多变量协整检验的较好的方法。

下面介绍JJ检验的基本思想。任意一个VAR(p)模型

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{\Phi}_1 \mathbf{y}_{t-1} + \cdots + \mathbf{\Phi}_p \mathbf{y}_{t-p} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

ε_t是 k 维扰动向量。首先给出上式的一种等价形式(hamilton,667)

$\mathbf{\Phi}_j \quad j = 1,\ldots p$ 为k×k维矩阵

$$\Delta \mathbf{y}_t = \mathbf{\Pi}\mathbf{y}_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \mathbf{\Gamma}_i \Delta \mathbf{y}_{t-i} + \boldsymbol{\varepsilon}_t \qquad (1)$$

其中 $\boldsymbol{\Pi} = \sum_{i=1}^{p} \boldsymbol{\Phi}_i - \boldsymbol{I}$ $\quad \boldsymbol{\Gamma}_i = -\sum_{j=i+1}^{p} \boldsymbol{\Phi}_j$

π称之为压缩矩阵或影响矩阵（impact matrix)

先假定y是向量单位根过程----I(1)

由于$I(1)$过程经过差分变换将变成$I(0)$过程，即上式中的Δy_{t-j} (j=1,2,…,p) 都是$I(0)$变量构成的向量，那么只要 Πy_{t-1} 是$I(0)$的向量，即 $y_{1,t-1}$，$y_{2,t-1}$，…，$y_{k,t-1}$ 之间具有协整关系，就能保证Δy_t是平稳过程。可以证明变量$y_{1,t-1}$，$y_{2,t-1}$, …，$y_{k,t-1}$ 之间是否具有以及具有什么规模 的协整关系主要依赖于矩阵 Π, 且变量间线性无关的协整向量个数即为矩阵的秩(证明略)。设 Π 的秩为 r，则存在 3 种情况: $r = k$，$r = 0$，$0< r < k$：

① 如果 $r = k$，显然只有当 $y_{1,t-1}$，$y_{2,t-1}$，…，$y_{k,t-1}$ 都是 $I(0)$ 变量时，才能保证 Πy_{t-1} 是 $I(0)$ 变量构成的向量。而这与已知的 y_t 为 $I(1)$ 过程相矛盾，所以必然有 $r < k$。

② 如果 $r = 0$，意味着 $\Pi = 0$，$y_{1,t-1}$，$y_{2,t-1}$，…，$y_{k,t-1}$之间是不具有协整关系。

③ 下面讨论 $0< r < k$ 的情形：

$0< r < k$ 表示存在 r 个协整关系。在这种情况下，Π 可以分解成两个列满秩的$(k\times r)$阶矩阵 α和 β的乘积：

$$\Pi = \alpha\beta'$$

其中$\mathrm{rk}(\alpha)= r$，$\mathrm{rk}(\beta)= r$。

如果变量间存在协整关系，则无法通过差分形式的有限阶VAR模型进行表示(hamilton 699)

将式π的表达式带入模型(1),即

$$\Delta \mathbf{y}_t = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'\mathbf{y}_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \boldsymbol{\Gamma}_i \Delta \mathbf{y}_{t-i} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

向量误差修正模型的表达式VECM

上式要求 $\beta' y_{t\text{-}1}$ 的每一行为一个 $I(0)$ 向量，其每一行都是 $I(0)$ 组合变量($y_{t\text{-}1}$元素的线性组合)，矩阵β 决定了$y_{1,t\text{-}1}$，$y_{2,t\text{-}1}$，…，$y_{k,t\text{-}1}$之间协整向量的个数与形式。称为协整向量矩阵，r 为协整向量的个数。

这r个协整关系将同时出现在每个变量的误差修正表达式中

矩阵 α 的每一行 α_i 是出现在第 i 个方程中的 r 个协整组合的一组权重，故称为**调整参数矩阵**，与前面介绍的误差修正模型的调整系数的含义一样。而且容易发现 α 和 β 并不是惟一的，因为对于任何非奇异 $r \times r$ 矩阵 H，乘积 $\alpha\beta'$ 和 $\alpha H(H^{-1}\beta')$ 都等于 Π。

将 y_t 的协整检验变成对矩阵 Π 的分析问题，这就是Johansen协整检验的基本原理。因为**矩阵 Π 的秩等于它的非零特征根的个数**，因此可以通过对非零特征根个数的检验来检验协整关系和协整向量的秩。略去关于 Π 的特征根的求解方法，设矩阵 Π 的特征根为 $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_k$。

Johansen协整检验的两种形式

特征根迹检验(trace检验)

最大特征值检验

H_0：$rk(\Pi) \le r$ 即：至多有r个协整关系

上述检验是一个连续检验过程。

(1) 首先从检验 $r=0$ 开始。意即在模型中不存在协整向量

如果 $r=0$ 不能被拒绝（$LR<$ 临界值），说明 N 个变量间不存在协整关系。检验到此终止。

不能建立 VEC 模型。如果 $r=0$ 被拒绝（$LR>$ 临界值），则应继续进行下面的检验。

(2) $r\le 1$。意即在模型中存在 1 个协整向量。如果 $r\le 1$ 不能被拒绝（$LR<$ 临界值），检验到此终止。

如果 $r\le 1$ 被拒绝，则应进一步作如下检验。

……

(3) $r\le N-1$。意即模型中存在 $N-1$ 个协整向量。如果 $r\le N-1$ 不能被拒绝（$LR<$ 临界值），

检验到此终止。

在检验过程中，比如 $r\le r^*-1$ 已经被拒绝，但 $r\le r^*$ 不能被拒绝，则结论是模型中存在 r^* 个协整向量。

协整方程的形式

与单变量时间序列可能出现非零均值、包含确定性趋势或随机趋势一样，协整方程也可以包含截距和确定性趋势。可能会出现如下情况（Johansen，1995）：

(1) 序列(1式) 没有确定趋势，协整方程没有截距：

$$\Pi y_{t-1} + HX_t = \alpha\beta' y_{t-1}$$

(2) 序列没有确定趋势，协整方程有截距项 ρ_0：

$$\Pi y_{t-1} + HX_t = \alpha(\beta' y_{t-1} + \rho_0)$$

(3) 序列有**确定性线性趋势**，但协整方程只有**截距**：

$$\boldsymbol{\Pi}\mathbf{y}_{t-1}+\mathbf{H}\mathbf{X}_{t}=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}'\mathbf{y}_{t-1}+\boldsymbol{\rho}_{0})+\boldsymbol{\gamma}_{0}$$

(4) 序列和协整方程都有**线性趋势**，协整方程的线性趋势表示为 $\rho_1 t$：

$$\boldsymbol{\Pi}\mathbf{y}_{t-1}+\mathbf{H}\mathbf{X}_{t}=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}'\mathbf{y}_{t-1}+\boldsymbol{\rho}_{0}+\boldsymbol{\rho}_{1}\mathbf{t})+\boldsymbol{\gamma}_{0}$$

(5) 序列有**二次趋势**，协整方程仅有**线性趋势**：

$$\boldsymbol{\Pi}\mathbf{y}_{t-1}+\mathbf{H}\mathbf{X}_{t}=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}'\mathbf{y}_{t-1}+\boldsymbol{\rho}_{0}+\boldsymbol{\rho}_{1}\mathbf{t})+\boldsymbol{\gamma}_{0}+\boldsymbol{\gamma}_{1}\mathbf{t}$$

还有一些需要注意的细节：

(1) Johansen协整检验的临界值对 $k=10$ 的序列都是有效的。而且临界值依赖于趋势假设，对于包含其他确定性回归量的模型可能是不适合。

(2) 迹统计量和最大特征值统计量的结论可能产生冲突。对这样的情况，建议检验估计得到的协整向量(产生协整向量并检验其平稳性)，并将选择建立在协整关系的解释能力上。

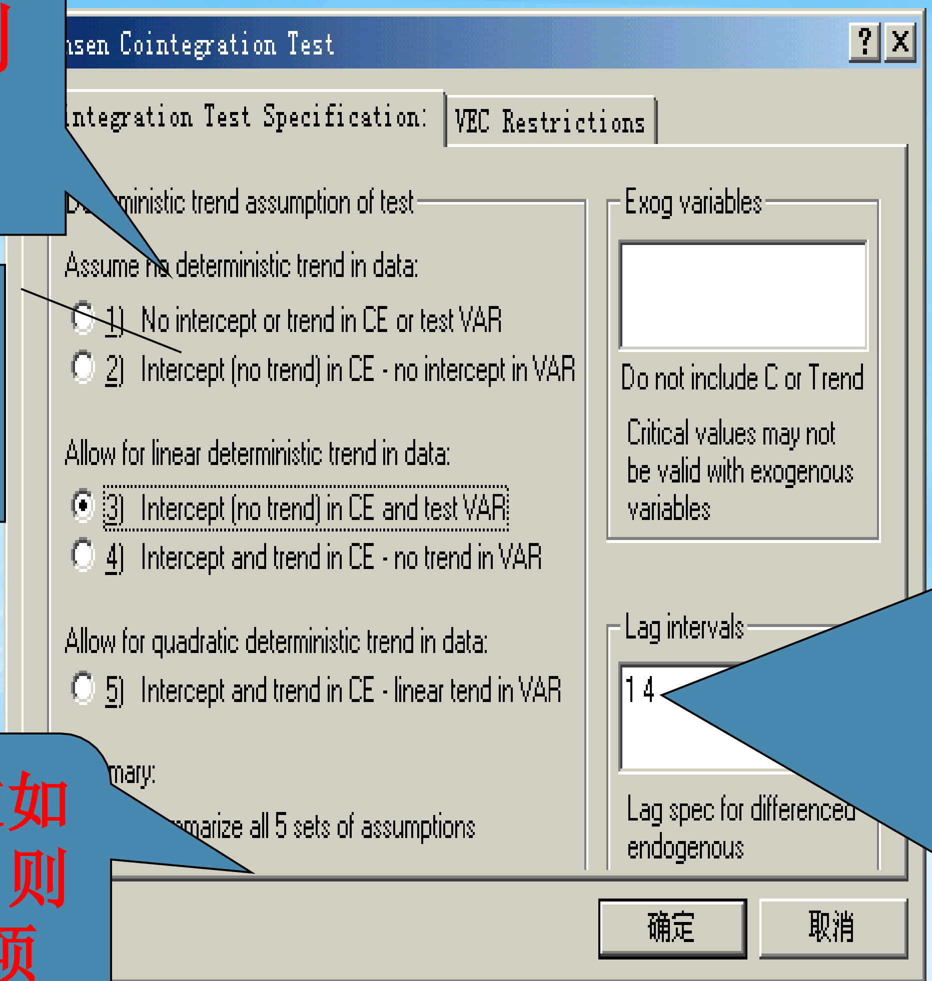
协整检验在EViews软件中的实现

为了实现协整检验，从VAR对象或Group(组)对象的工具栏中选择View/Cointegration Test… 即可。协整检验仅对已知非平稳的序列有效，所以需要首先对VAR模型中每一个序列进行单位根检验。然后在Cointegration Test Specification的对话框（下图）中将提供关于检验的详细信息：

填写协整检验设定对话框

关于序列假设

可选部分关于协整方程假设



不能确定如何选择，则选择此项

滞后设定是指在辅助回归中的一阶差分的滞后项，不是指原序列。例如，如果在编辑栏中键入“1 2”，协整检验用 Δyt 对 $\Delta yt\text{-}1$，$\Delta yt\text{-}2$ 和其他指定的外生变量作回归，此时与原序列 *yt* 有关的最大的滞后阶数是3。对于一个滞后阶数为1的协整检验，在编辑框中应键入“0 0”。