

专题 40 重要的几何模型之 12345 模型

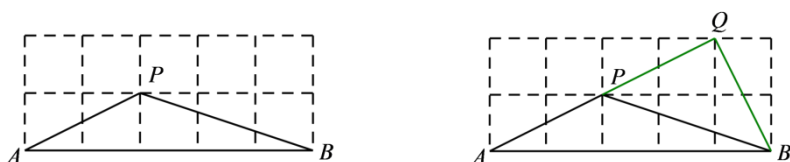
初中几何，直角三角形具有举足轻重的地位，贯彻初中数学的始终，无论是一次函数、平行四边形、特殊平行四边形、反比例函数、二次函数、相似、圆，都离不开直角三角形。今天我们要重点介绍的“12345”模型就是中考（选填题）解题神器，需要我们反复断钻研、领悟。现在带领大家领略一下，“12345”模型的独特魅力。

【模型解读】

模型 1、12345 模型及其衍生模型

【模型来源】2024 年北京市中考

如图所示的网格是正方形网格，则 $\angle PAB + \angle PBA = (\quad)^\circ$ （点 A, B, P 是网格交点）。



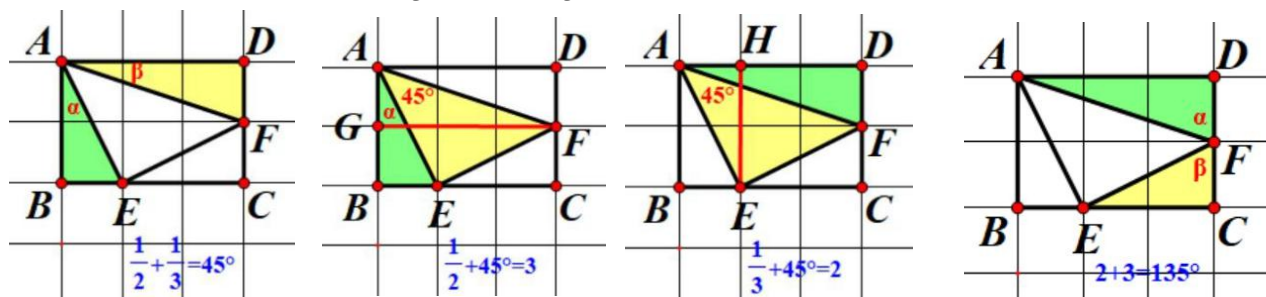
该类问题解法很多，这里我们就根据现有的方格纸来构造一个等腰直角三角形。

如图，即： $\angle PAB + \angle PBA = \angle BPQ = 45^\circ$ 。

上面的 $\angle PAB$ 和 $\angle PBA$ 便是今天要说的特殊角，除了它们的和为 45° 之外，用三角函数的观点来看：

$\tan \angle PAB = \frac{1}{2}$, $\tan \angle PBA = \frac{1}{3}$ ，对于这里的数据，为了便于记忆，总结为“12345”模型。

【常见模型】下面模型中 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, 2 , 3 , $\frac{4}{3}$, $\frac{3}{4}$ 均为对应角的正切值。

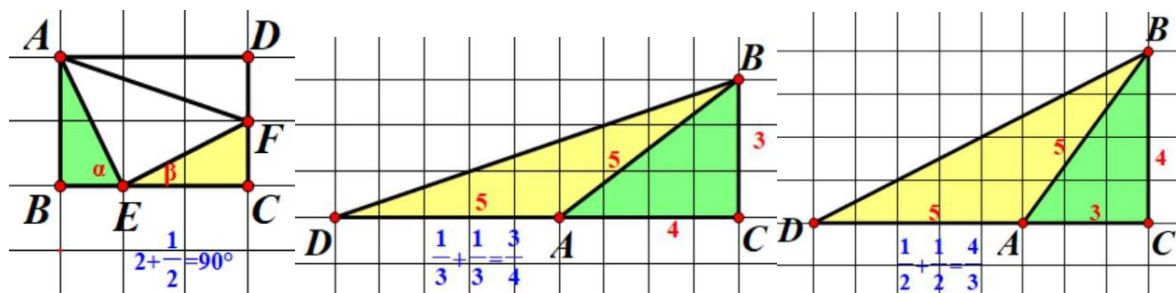


$$\angle \alpha + \angle \beta = 45^\circ;$$

$$\angle \alpha + 45^\circ = \angle GAF;$$

$$\angle DAF + 45^\circ = \angle EAH;$$

$$\angle \alpha + \angle \beta = 135^\circ;$$



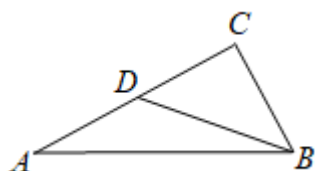
$$\angle \alpha + \angle \beta = 90^\circ;$$

$$\angle ADB + \angle DBA = \angle BAC;$$

$$\angle ADB + \angle DBA = \angle BAC;$$

切记：做题不光要知道题目告诉我什么，还要根据已知的信息，思考这里需要什么，而“12345”模型用来解决相关的选填题非常方便。下面所列举的个别题，利用“12345”解题也许未必是最简，最巧妙的，但至少可以成为一种通性通法，可以在短时间内快速破题。毕竟在考试的时候时间非常宝贵的。

例 1. (2024·四川乐山·中考真题) 如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $BC = \sqrt{5}$ ，点 D 是 AC 上一点，连接 BD 。若 $\tan \angle A = \frac{1}{2}$ ， $\tan \angle ABD = \frac{1}{3}$ ，则 CD 的长为 ()



- A. $2\sqrt{5}$ B. 3 C. $\sqrt{5}$ D. 2

【答案】C

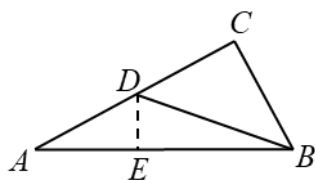
【分析】法 1：先根据 $\tan \angle A = \frac{1}{2}$ ， $\tan \angle ABD = \frac{1}{3}$ ，再由 12345 模型知： $\angle BDC = 45^\circ$ ，从而可求出 CD 。

法 2：先根据锐角三角函数值求出 $AC = 2\sqrt{5}$ ，再由勾股定理求出 $AB = 5$ ，过点 D 作 $DE \perp AB$ 于点 E ，依据三角函数值可得 $DE = \frac{1}{2}AE$ ， $DE = \frac{1}{3}BE$ ，从而得 $BE = \frac{3}{2}AE$ ，再由 $AE + BE = 5$ 得 $AE = 2$ ， $DE = 1$ ，由勾股定理得 $AD = \sqrt{5}$ ，从而可求出 CD 。

【详解】解法 1： $\because \tan \angle A = \frac{1}{2}$ ， $\tan \angle ABD = \frac{1}{3}$ ， $\therefore$ 根据 12345 模型知： $\angle BDC = 45^\circ$ ，
 $\because \angle C = 90^\circ$ ， $\therefore$ 三角形 BCD 为等腰直角三角形， $\because BC = \sqrt{5}$ ， $\therefore CD = BC = \sqrt{5}$

解法 2 (常规解法)：在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $BC = \sqrt{5}$ ， $\therefore \tan \angle A = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{2} \therefore AC = 2BC = 2\sqrt{5}$ ，

由勾股定理得， $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 + (\sqrt{5})^2} = 5$ 过点 D 作 $DE \perp AB$ 于点 E ，如图，



$$\because \tan \angle A = \frac{1}{2}, \tan \angle ABD = \frac{1}{3}, \therefore \frac{DE}{AE} = \frac{1}{2}, \frac{DE}{BE} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore DE = \frac{1}{2}AE, DE = \frac{1}{3}BE, \therefore \frac{1}{2}AE = \frac{1}{3}BE \therefore BE = \frac{3}{2}AE$$

$$\because AE + BE = 5, \therefore AE + \frac{3}{2}AE = 5 \therefore AE = 2, \therefore DE = 1,$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/265031024330011204>