2024 届陕西省西安市铁一中学高三上学期 9 月月考数学（理）试题

一、单选题

1．复数 $z=a+\mathrm{i}(a\in\mathbf{R})$ 的共轭复数为 $\overline{z}$，满足 $|\overline{z}|=1$，则复数 $z=$

A．$2+i$　　B．$2-i$　　C．$1+i$　　D．i

【答案】D

【分析】由题意求得 $\overline{z}=a-i$，然后根据 $|\overline{z}|=1$ 求得 $a=0$，进而可得 $z=i$．

【详解】根据题意可得 $\overline{z}=a-i$，

所以 $|\overline{z}|=\sqrt{a^2+1}=1$，解得 $a=0$，

所以复数 $z=i$．

故选 D．

【点睛】本题考查共轭复数的概念和复数模的运算，考查运算能力，属于基础题．

2．集合 $A=\left\{\theta\left|\frac{1}{2}<\sin\theta\le 1,\theta\in(0,\pi)\right.\right\}$，$B=\left\{\theta\left|\frac{\pi}{4}<\theta<1\right.\right\}$，则集合 $A\cap B$ 为（　　）

A．$\left\{\theta\left|\frac{\pi}{4}<\theta<1\right.\right\}$　　B．$\left\{\theta\left|\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}\right.\right\}$

C．$\left\{\theta\left|\frac{\pi}{6}<\theta<\frac{\pi}{2}\right.\right\}$　　D．$\left\{\theta\left|\frac{\pi}{6}<\theta<1\right.\right\}$

【答案】A

【分析】利用正弦函数的单调性化简集合 A，根据交集的定义写出 $A\cap B$．

【详解】因为 $A=\left\{\theta\left|\frac{1}{2}<\sin\theta\le 1,\theta\in(0,\pi)\right.\right\}=\left\{\theta\left|\frac{\pi}{6}<\theta<\frac{5\pi}{6}\right.\right\}$，$B=\left\{\theta\left|\frac{\pi}{4}<\theta<1\right.\right\}$，

所以 $A\cap B=\left\{\theta\left|\frac{\pi}{4}<\theta<1\right.\right\}$，

故选：A．

3．“$p\wedge q$ 为假”是“$p\vee q$ 为假”的（　　）条件．

A．充分不必要　　B．必要不充分

C．充要　　D．既不充分也不必要

【答案】B

【分析】根据题意，由复合命题真假的判断方法分析“$p\wedge q$为假”和“$p\vee q$为假”的关系，根据充分必要条件的定义即可判断.

【详解】根据题意，若$p\wedge q$为假，则p，q至少有一个为假，

则$p\vee q$为真或假都有可能，充分性不成立；

反之，若$p\vee q$为假，则p，q均为假，故$p\wedge q$一定为假，必要性成立；

故“$p\wedge q$为假”是“$p\vee q$为假”的必要不充分条件.

故选：B.

4．已知函数$f\left(x\right)=2\sin\left(\omega x+\varphi\right)$的图象向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度后得到函数$y=\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x$的图象，则$\varphi$的可能值为（　　）

A．0　　B．$\frac{\pi}{6}$　　C．$\frac{\pi}{3}$　　D．$\frac{\pi}{12}$

【答案】A

【分析】根据辅助角公式，结合正弦型函数的图象变换性质进行判断即可.

【详解】$y=\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，

函数$f\left(x\right)=2\sin\left(\omega x+\varphi\right)$的图象向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度后得到函数的图象解析式为：

$f\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(\omega x+\frac{\pi\omega}{6}+\varphi\right)$，

所以有$\begin{cases}\omega=2\\ \frac{\pi\omega}{6}+\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{3}\left(k\in\mathrm{Z}\right)\end{cases}\Rightarrow\varphi=2k\pi\left(k\in\mathrm{Z}\right)$，

显然只有选项A符合，

故选：A

5．在海昏侯墓中发掘出堆积如山的“汉五铢”铜钱.汉代串铜钱的丝绳或麻绳叫“缗”，后来演变为计量铜钱的单位，1000枚铜钱用缗串起来，就叫一缗.假设把2000余缗铜钱放在一起码成一堆，摆放规则如下：底部并排码放70缗，然后一层一层往上码，每层递减一缗，最上面一层为31缗，则这一堆铜钱的数量为（　）

A．2×10^6枚　　B．2.02×10^6枚　　C．2.025×10^6枚　　D．2.05×10^6枚

【答案】B

【分析】构造等差数列模型，求出等差数列前40项的和计算总缗数，再乘以1000，即可得答案；

【详解】由题意得，摆放规则的各层缗数，构成首项$a_1=70,a_{40}=31,$的等差数列，

$\therefore S_{40}=\dfrac{40\times(70+31)}{2}=2020$，

$\therefore$这一堆铜钱的数量为$2020\times1000=2.02\times10^6$枚.

故选：B.

【点睛】本题考查构建等差数列模型进行求和，考查建模能力、运算求解能力.

6. 过点$P(2,1)$的直线l与函数$f(x)=\dfrac{x-1}{x-2}$的图象交于A，B两点，O为坐标原点，则$(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{OP}=$（　）

A．$\sqrt{5}$　　B．$2\sqrt{5}$　　C．5　　D．10

【答案】D

【分析】对$f(x)$变形后可得$f(x)$的图象关于点P对称，从而可得A，B两点关于点P对称，则有$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OP}$，进而可求出$(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{OP}$的值

【详解】$f(x)=\dfrac{x-1}{x-2}=\dfrac{1}{x-2}+1$，函数$f(x)$的图象关于点$P$对称，

直线l与函数$f(x)$的图象交于A，B两点时，得出A，B两点关于点P对称，则有$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OP}$，

于是$(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{OP}=2\overrightarrow{OP}^2=2\times\left(2^2+1^2\right)=10$.

故选：D.

【点睛】关键点点睛：本小题以平面向量为载体，考查函数图像的对称性，平面向量的数量积的运算等基础知识，考查运算求解能力，考查数形结合、化归与转化思想，考查数学运算、数学抽象核心素养，体现基础性和综合性，解题的关键是对$f(x)$变形后可得$f(x)$的图象关于点P对称，从而可得$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OP}$，属于中档题.

7．设双曲线C:$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的两条渐近线互相垂直，顶点到一条渐近线的距离为1，则双曲线的一个焦点到一条渐近线的距离为

A．2　　B．$\sqrt{2}$　　C．$2\sqrt{2}$　　D．4

【答案】B

【分析】由双曲线的渐近线互相垂直可得渐近线为$y=\pm x$，故$a=b$；根据定点到渐近线的距离为1可得$a=b=\sqrt{2}$，于是得到焦点坐标，最后根据点到直线的距离公式可得所求.

【详解】∵双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的两条渐近线互相垂直，

∴渐近线方程为$y=\pm x$，

$\therefore a=b$.

$\because$顶点到一条渐近线的距离为 1，

$\therefore \frac{\sqrt{2}}{2}a=1$，

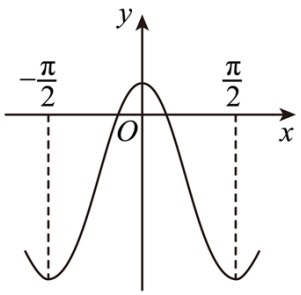
$\therefore a=b=\sqrt{2}$，

$\therefore$双曲线C的方程为$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$，焦点坐标为$(-2,0),(2,0)$，

$\therefore$双曲线的一个焦点到一条渐近线的距离为$d=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

【点睛】本题考查有关双曲线的基本运算问题，解题的关键是分清双曲线中的各个量的含义及其关系，然后再根据题目的要求求解.

8．已知函数$f(x)$的部分图象如下图所示，则$f(x)$的解析式可能为（　）



A．$\cos(4\cos x)+\cos(4\sin x)$　　B．$\cos\left(4\cos\frac{1}{2}x\right)+\cos\left(4\sin\frac{1}{2}x\right)$

C．$\sin\left(4\cos\frac{1}{2}x\right)+\sin\left(4\sin\frac{1}{2}x\right)$　　D．$\cos\left(4\cos\frac{1}{2}x\right)+\frac{3}{4}$

【答案】B

【分析】根据图象可得出$f(x)$为偶函数，且$f(0)>0$，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)<-1$，然后逐项求解判断，即可得出答案.

【详解】由图象可得，$f(x)$为偶函数，且$f(0)>0$，且$f\left(\frac{\pi}{2}\right)<-1$.

A 项，若$f(x)=\cos(4\cos x)+\cos(4\sin x)$，则

$f(-x)=\cos(4\cos(-x))+\cos(4\sin(-x))=\cos(4\cos x)+\cos(4\sin x)=f(x)$，

所以$f(x)$为偶函数.

而$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(4\cos\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(4\sin\frac{\pi}{2}\right)=1+\cos 4>0$，不满足题意，故 A 项错误；

B 项，若$f(x)=\cos\left(4\cos\frac{1}{2}x\right)+\cos\left(4\sin\frac{1}{2}x\right)$，则

$f(-x)=\cos\left(4\cos\left(-\frac{1}{2}x\right)\right)+\cos\left(4\sin\left(-\frac{1}{2}x\right)\right)=\cos\left(4\cos\frac{1}{2}x\right)+\cos\left(4\sin\frac{1}{2}x\right)=f(x)$，

所以$f(x)$为偶函数.

$f(0)=\cos(4\cos 0)+\cos(4\sin 0)=\cos 4+1>0$，

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(4\cos\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(4\sin\frac{\pi}{4}\right)=2\cos 2\sqrt{2}$，

因为$\frac{2\pi}{3}<2\sqrt{2}<\pi$，所以$\cos 2\sqrt{2}<\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$，所以$f\left(\frac{\pi}{2}\right)<-1$满足题意，故B项正确；

C项，若$f(x)=\sin\left(4\cos\frac{1}{2}x\right)+\sin\left(4\sin\frac{1}{2}x\right)$，则

$f(-x)=\sin\left(4\cos\left(-\frac{1}{2}x\right)\right)+\sin\left(4\sin\left(-\frac{1}{2}x\right)\right)=\sin\left(4\cos\frac{1}{2}x\right)-\sin\left(4\sin\frac{1}{2}x\right)\neq f(x)$，

所以$f(x)$不是偶函数，故C项错误；

D项，若$f(x)=\cos\left(4\cos\frac{1}{2}x\right)+\frac{3}{4}$，则

$f(-x)=\cos\left(4\cos\left(-\frac{1}{2}x\right)\right)+\frac{3}{4}=f(x)=\cos\left(4\cos\frac{1}{2}x\right)+\frac{3}{4}=f(x)$，

所以$f(x)$为偶函数.

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(4\cos\frac{\pi}{4}\right)+\frac{3}{4}=\cos 2\sqrt{2}+\frac{3}{4}>-1$，故D项错误.

故选：B.

9．甲、乙两名同学参加一项射击比赛游戏，其中任何一人每射击一次击中目标得2分，未击中目标得0分．若甲、乙两人射击的命中率分别为$\frac{3}{5}$和p，且甲、乙两人各射击一次得分之和为2的概率为$\frac{9}{20}$．假设甲、乙两人射击互不影响，则p值为（　　）

A．$\frac{3}{5}$　　B．$\frac{4}{5}$　　C．$\frac{3}{4}$　　D．$\frac{1}{4}$

【答案】C

【分析】根据独立事件概率乘法公式，结合各射击一次得分之和为2的概率构造方程求解即可.

【详解】记甲、乙两人各射击一次的得分之和为X，

则$P(X=2)=\frac{3}{5}\times(1-p)+\left(1-\frac{3}{5}\right)p=\frac{3}{5}-\frac{1}{5}p=\frac{9}{20}$，解得：$p=\frac{3}{4}$.

故选：C.

10．已知函数$g(x)=a-x^2$（$\frac{1}{e}\le x\le e$，e为自然对数的底数）与$h(x)=2\ln x$的图象上存在关于x轴对称的点，则实数a的取值范围是（　）

A．$\left[1,\frac{1}{e^2}+2\right]$　　B．$\left[1,e^2-2\right]$

C．$\left[\frac{1}{e^2}+2,e^2-2\right]$　　D．$\left[e^2-2,+\infty\right)$

【答案】B

【分析】设$h(x)$上一点M关于x轴对称点坐标为M'，则M'在$g(x)$上，得到方程$-2\ln x_0=a-x_0^2\left(\frac{1}{e}\le x\le e\right)$有解，即函数$f(x)=x^2-2\ln x$与$y=a$在$\left[\frac{1}{e},e\right]$上有交点，利用导数判断出函数的单调性和最值，可得实数a的取值范围.

【详解】设$h(x)$上一点$M(x_0,2\ln x_0)$，$\frac{1}{e}\le x_0\le e$，且M关于x轴对称点坐标为$M'(x_0,-2\ln x_0)$，

$\frac{1}{e}\le x_0\le e$在$g(x)$上，

$\therefore -2\ln x_0=a-x_0^2\left(\frac{1}{e}\le x\le e\right)$有解，即$x_0^2-2\ln x_0=a\left(\frac{1}{e}\le x\le e\right)$有解.

令$f(x)=x^2-2\ln x\left(\frac{1}{e}\le x\le e\right)$，则$f'(x)=2x-\frac{2}{x}=\frac{2(x+1)(x-1)}{x}$，$\frac{1}{e}\le x\le e$，

$\therefore$当$x\in\left[\frac{1}{e},1\right)$时，$f'(x)<0$；当$x\in(1,e]$时，$f'(x)>0$，$\therefore f(x)$在$\left[\frac{1}{e},1\right)$上单调递减；在$(1,e]$上单调递增

$\therefore f(x)_{\min}=f(1)=1$，$f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e^2}+2$，$f(e)=e^2-2$，

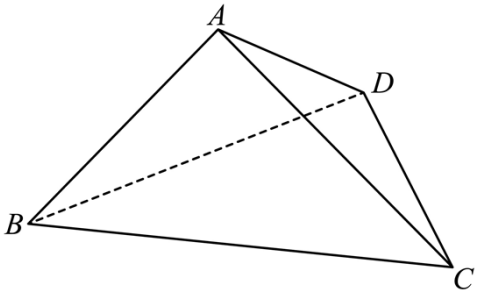
$x_0^2-2\ln x_0=a\left(\frac{1}{e}\le x\le e\right)$有解等价于$y=a$与$y=f(x)$图象有交点，$\therefore f(1)\le a\le f(e)$

$\therefore a\in\left[1,e^2-2\right]$.

故选：B

【点睛】本题考查导数在最值中的应用，考查函数与方程思想，考查学生逻辑推理能力与计算能力，属于中档题.

11．如图，在三棱锥$A-BCD$中，　平面$ABD\perp$平面BCD，$\triangle BCD$是边长为$2\sqrt{3}$的等边三角形，$AB=AD=2$，则该几何体外接球表面积为（　）



A．20π　　B．8π　　C．28π　　D．48π

【答案】A

【分析】设$\triangle ABD$外心为O_2，$\triangle BCD$外心为O_1，DB中点为E，过外心分别作平面ABD，平面BCD垂线，则垂线交点O为外接球球心.后利用正弦定理可得$\triangle BCD$，$\triangle ABD$外接圆半径r_1，r_2，又注意到四边形O_2EO_1O为矩形，则外接球半径$R=\sqrt{O_2B^2-\frac{1}{4}DB^2+O_1B^2}$.

【详解】设$\triangle ABD$外心为O_2，$\triangle BCD$外心为O_1，DB中点为E.

因$O_1E\perp DB$，$O_1E\subset$平面BCD，平面$ABD\perp$平面BCD，

平面$ABD\cap$平面$BCD=BD$，则$O_1E\perp$平面ABD，又$O_2E\subset$平面ABD，

则$O_1E\perp O_2E$.过O_2，O_1分别作平面ABD，平面BCD垂线，则垂线交点O为外接球球心，

则四边形O_2EO_1O为矩形.$\triangle BCD$外接圆半径$r_1=O_1B=\frac{BD}{2\sin 60^\circ}=2$.

又因$AB=AD=2$，$BD=2\sqrt{3}$，则$\angle BAD=120^\circ$.故$\triangle ABD$外接圆半径$r_2=O_2B=\frac{BD}{2\sin 120^\circ}=2$.

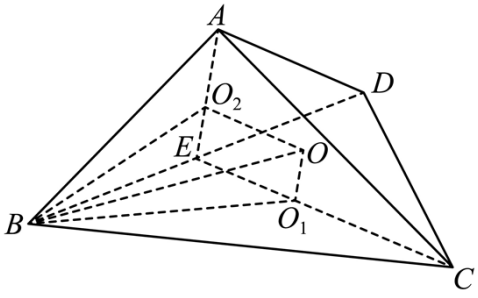
又$OO_1=O_2E=\sqrt{O_2B^2-EB^2}=\sqrt{4-3}=1$.

又$OO_1\perp$平面BCD，$BO_1\subset$平面BCD，则$OO_1\perp BO_1$.

故外接球半径$R=OB=\sqrt{OO_1^2+BO_1^2}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$，

故外接球表面积为$4\pi R^2=20\pi$.

故选：A



【点睛】结论点睛：本题涉及底面与侧面垂直的三棱锥的外接球.设底面与侧面外接圆半径为r_1，r_2，底面与侧面公共棱长度为l，则外接球半径$R=\sqrt{r_1^2+r_2^2-\frac{l^2}{4}}$.

12．设方程$\mathrm{e}^x+x+\mathrm{e}=0$和$\ln x+x+\mathrm{e}=0$的根分别为$p$和$q$，函数$f(x)=\mathrm{e}^x+(p+q)x$，则（　）

A．$f\left(\frac{4}{3}\right)<f\left(\frac{2}{3}\right)<f(0)$　　B．$f\left(\frac{2}{3}\right)<f\left(\frac{4}{3}\right)<f(0)$

C．$f\left(\frac{2}{3}\right)<f(0)<f\left(\frac{4}{3}\right)$　　D．$f(0)<f\left(\frac{2}{3}\right)<f\left(\frac{4}{3}\right)$

【答案】B

【分析】方法一：先利用方程的根与图象的交点的关系，及互为反函数的两个函数图象关系推得$p+q=-\mathrm{e}$，由此得到$f(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}x$，再由函数的单调性易得$f\left(\frac{2}{3}\right)<f(0)$，构造函数$g(x)=x^{\frac{4}{3}}-\frac{4}{3}x-1(x\geq\mathrm{e})$与$h(x)=x^{\frac{4}{3}}-x^{\frac{2}{3}}-\frac{2}{3}x(x\geq1)$，利用导数证得$f\left(\frac{4}{3}\right)<f(0)$与$f\left(\frac{4}{3}\right)>f\left(\frac{2}{3}\right)$，从而解出.

【详解】**方法一**：由$\mathrm{e}^x+x+\mathrm{e}=0$得$\mathrm{e}^x=-x-\mathrm{e}$，由$\ln x+x+\mathrm{e}=0$得$\ln x=-x-\mathrm{e}$，

因为方程$\mathrm{e}^x+x+\mathrm{e}=0$的根为$p$，所以函数$y=\mathrm{e}^x$与$y=-x-\mathrm{e}$的图象交点$P$的横坐标为$p$，

同理：函数$y=\ln x$与$y=-x-\mathrm{e}$的图象交点Q的横坐标为q，

因为$y=\mathrm{e}^x$与$y=\ln x$互为反函数，所以两函数图象关于$y=x$对称，

易知直线$y=x$与直线$y=-x-\mathrm{e}$互相垂直，所以P,Q两点关于直线$y=x$对称，

即P,Q的中点M一定落在$y=x$，亦即点M为$y=x$与$y=-x-\mathrm{e}$的交点，

联立$\begin{cases}y=x\\y=-x-\mathrm{e}\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=-\frac{\mathrm{e}}{2}\\y=-\frac{\mathrm{e}}{2}\end{cases}$，即$M\left(-\frac{\mathrm{e}}{2},-\frac{\mathrm{e}}{2}\right)$，

所以$p+q=-\mathrm{e}$，

故$f(x)=\mathrm{e}^x+(p+q)x=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}x$，则$f'(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}$，

令$f'(x)>0$，得$x>1$；令$f'(x)<0$，得$x<1$；

所以$f(x)$在$(-\infty,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增，

所以$f\left(\frac{2}{3}\right)<f(0)$，

而$f(0)=1$，$f\left(\frac{2}{3}\right)=\mathrm{e}^{\frac{2}{3}}-\frac{2}{3}\mathrm{e}$，$f\left(\frac{4}{3}\right)=\mathrm{e}^{\frac{4}{3}}-\frac{4}{3}\mathrm{e}$，

则 $f\left(\frac{4}{3}\right)-f(0)=\mathrm{e}^{\frac{4}{3}}-\frac{4}{3}\mathrm{e}-1$，$f\left(\frac{4}{3}\right)-f\left(\frac{2}{3}\right)=\mathrm{e}^{\frac{4}{3}}-\frac{4}{3}\mathrm{e}-\left(\mathrm{e}^{\frac{2}{3}}-\frac{2}{3}\mathrm{e}\right)=\mathrm{e}^{\frac{4}{3}}-\mathrm{e}^{\frac{2}{3}}-\frac{2}{3}\mathrm{e}$，

令 $g(x)=x^{\frac{4}{3}}-\frac{4}{3}x-1(x\geq\mathrm{e})$，则 $g'(x)=\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}-\frac{4}{3}\geq\frac{4}{3}\mathrm{e}^{\frac{1}{3}}-\frac{4}{3}=\frac{4}{3}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{3}}-1\right)>0$，

所以 $g(x)$ 在 $[\mathrm{e},+\infty)$ 上单调递增，

所以 $g(\mathrm{e})<g(3)=3^{\frac{4}{3}}-5<0\left(3^4=81<125=5^3\right)$，即 $\mathrm{e}^{\frac{4}{3}}-\frac{4}{3}\mathrm{e}-1<0$，故 $f\left(\frac{4}{3}\right)<f(0)$，

令 $h(x)=x^{\frac{4}{3}}-x^{\frac{2}{3}}-\frac{2}{3}x(x\geq1)$，则 $h'(x)=\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}-\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}-\frac{2}{3}$，

令 $h'(x)>0$，得 $x>1$，所以 $h(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，

所以

$$h(\mathrm{e})>h\left(\frac{27}{10}\right)=\left(\frac{27}{10}\right)^{\frac{4}{3}}-\left(\frac{27}{10}\right)^{\frac{2}{3}}-\frac{2}{3}\times\left(\frac{27}{10}\right)=\frac{81}{10^{\frac{4}{3}}}-\frac{9}{10^{\frac{2}{3}}}-\frac{18}{10}$$

$$=\frac{81\times10^{\frac{2}{3}}-90\times10^{\frac{1}{3}}-180}{100}=\frac{9}{100}\left[10^{\frac{1}{3}}\left(9\times10^{\frac{1}{3}}-10\right)-20\right]$$

$$>\frac{9}{100}\left[2.15\left(9\times2.15-10\right)-20\right]=\frac{9}{100}\times0.1025>0\left(10>2.15^3\right),$$

则 $\mathrm{e}^{\frac{4}{3}}-\mathrm{e}^{\frac{2}{3}}-\frac{2}{3}\mathrm{e}>0$，故 $f\left(\frac{4}{3}\right)>f\left(\frac{2}{3}\right)$，

综上：$f\left(\frac{2}{3}\right)<f\left(\frac{4}{3}\right)<f(0)$.

故选：B.

方法二：前面部分同方法一得，$f(x)=\mathrm{e}^x+(p+q)x=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}x$，则 $f'(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}$，

令 $f'(x)>0$，得 $x>1$；令 $f'(x)<0$，得 $x<1$；

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f\left(\frac{2}{3}\right)<f(0)$，

而 $f(0)=1$，$f\left(\frac{2}{3}\right)=\mathrm{e}^{\frac{2}{3}}-\frac{2}{3}\mathrm{e}$，$f\left(\frac{4}{3}\right)=\mathrm{e}^{\frac{4}{3}}-\frac{4}{3}\mathrm{e}$，

因为 $\mathrm{e}^x\geq x+1$，当且仅当 $x=0$ 时取等号，所以 $\mathrm{e}^{-x}\geq-x+1$，

当 $x\in(0,1)$ 时，$\mathrm{e}^x<\frac{1}{1-x}$，所以 $f\left(\frac{4}{3}\right)=\mathrm{e}^{\frac{4}{3}}-\frac{4}{3}\mathrm{e}=\mathrm{e}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{3}}-\frac{4}{3}\right)<\mathrm{e}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}}-\frac{4}{3}\right)=\frac{\mathrm{e}}{6}<\frac{1}{2}$，即 $f\left(\frac{4}{3}\right)<f(0)$，

下面比较 $f\left(\frac{4}{3}\right),f\left(\frac{2}{3}\right)$ 的大小关系，

设$g(x)=f(x)-f(2-x)$，$x\in(0,1)$，

所以$g'(x)=f'(x)+f'(2-x)=e^{x}-e+e^{2-x}-e=e^{x}+e^{2-x}-2e>2\sqrt{e^{x+2-x}}-2e=0$，

故$g(x)$在$x\in(0,1)$上递增，$g(x)<g(1)=0$，即有$f\left(\frac{2}{3}\right)-f\left(2-\frac{2}{3}\right)<0$，亦即$f\left(\frac{4}{3}\right)>f\left(\frac{2}{3}\right)$，综上：$f\left(\frac{2}{3}\right)<f\left(\frac{4}{3}\right)<f(0)$.

故选：B.

【点睛】方法点睛：导数是研究函数的单调性、极值(最值)最有效的工具，而函数是高中数学中重要的知识点，对导数的应用的考查主要从以下几个角度进行：（1）考查导数的几何意义，往往与解析几何、微积分相联系.（2）利用导数求函数的单调区间，判断单调性；已知单调性，求参数.（3）利用导数求函数的最值(极值)，解决生活中的优化问题.（4）考查数形结合思想的应用.

二、填空题

13．等比数列$x,3x+3,6x+6$，…的第四项等于_____.

【答案】－24

【分析】由题意可得（3x+3）^{2}=x（6x+6），解 x 的值，可得此等比数列的前三项，从而求得此等比数列的公比，从而求得第四项.

【详解】由于 x，3x+3，6x+6 是等比数列的前三项，故有（3x+3）^{2}=x（6x+6），解 x=-3，

故此等比数列的前三项分别为-3，-6，-12，故此等比数列的公比为 2，故第四项为-24，

故答案为-24.

【点睛】本题主要考查等比数列的通项公式，等比数列的性质，属于基础题.

14．已知$\tan\alpha=\frac{1}{3}$，$\tan\beta=-\frac{1}{7}$，且$\alpha,\beta\in(0,\pi)$，则$2\alpha-\beta=$_____.

【答案】$-\frac{3\pi}{4}$

【分析】利用正切的二倍角公式和两角差的公式进行求解即呆.

【详解】因为$\tan\alpha=\frac{1}{3}>0$，$\tan\beta=-\frac{1}{7}<0$，$\alpha,\beta\in(0,\pi)$，

所以$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，

因为$\tan2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2\times\frac{1}{3}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{3}{4}>0$，

所以$2\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，因此$-\pi<2\alpha-\beta<0$，

因为 $\tan(2\alpha-\beta)=\dfrac{\tan 2\alpha-\tan\beta}{1+\tan 2\alpha\tan\beta}=\dfrac{\frac{3}{4}+\frac{1}{7}}{1+\frac{3}{4}\times\left(-\frac{1}{7}\right)}=1$，

所以 $2\alpha-\beta=-\dfrac{3\pi}{4}$，

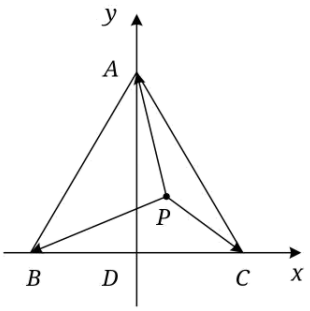
故答案为：$-\dfrac{3\pi}{4}$

15．已知 ΔABC 是边长为 2 的等边三角形，P 是平面 ABC 内一点，则 $\overrightarrow{PA}\cdot\left(2\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}\right)$ 的最小值为____.

【答案】$-\dfrac{7}{3}$

【分析】建立直角坐标系，把向量 $\overrightarrow{PA}\cdot\left(2\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}\right)$ 的最小值转化成代数式的最小值.

【详解】



以 BC 为 x 轴，BC 的垂直平分线 DA 为 y 轴，建立直角坐标系，则

$A(0,\sqrt{3}),\quad B(-1,0),\quad C(1,0)$，

设 $P(x,y)$，所以 $\overrightarrow{PA}=(-x,\sqrt{3}-y)$，

$\overrightarrow{PB}=(-1-x,-y),\quad \overrightarrow{PC}=(1-x,-y)$，

所以 $2\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=(-1-3x,-3y)$，

$\overrightarrow{PA}\cdot(2\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})=x+3x^2-3y(\sqrt{3}-y)=3\left(x+\dfrac{1}{6}\right)^2+3\left(y-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\dfrac{7}{3}\ldots-\dfrac{7}{3}$.

【点睛】本题以正三角形为图形背景，考查向量数量积的最小值，由于正三角形图形具有轴对称性，所以可通过建立适当的直角坐标系，把几何问题代数化，使问题求解的抽象程度更低.

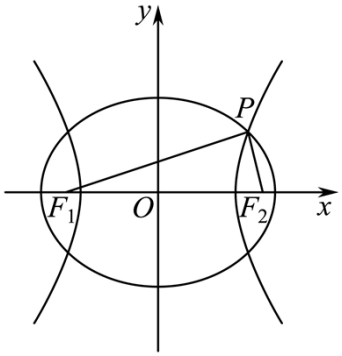
16．已知椭圆和双曲线有相同的焦点 F_1，F_2，它们的离心率分别为 e_1，e_2，点 P 为它们的一个交点，且 $\angle F_1PF_2=\dfrac{2\pi}{3}$，则 $e_1^2+e_2^2$ 的取值范围是_____.

【答案】$(2,+\infty)$

【分析】根据椭圆与双曲线的定义求出$|PF_1|,|PF_2|$用a_1,a_2表示，在$\triangle F_1PF_2$中，根据余弦定理可得$|F_1F_2|^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|\cdot\cos\frac{2\pi}{3}$找到$a_1,a_2,c$的关系，然后整理成离心率解决.

【详解】设椭圆的长半轴长为a_1，双曲线的实半轴长为a_2，焦距$2c$，点P为椭圆与双曲线在第一象限的交点，

则$|PF_1|+|PF_2|=2a_1$，$|PF_1|-|PF_2|=2a_2$，解得$|PF_1|=a_1+a_2$，$|PF_2|=a_1-a_2$，如图：



在$\triangle F_1PF_2$中，根据余弦定理可得$|F_1F_2|^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|\cdot\cos\frac{2\pi}{3}$，

整理得$4c^2=3a_1^2+a_2^2$，即$\frac{3}{e_1^2}+\frac{1}{e_2^2}=4$，

设$t_1=e_1^2$，$t_2=e_2^2$，则有$0<t_1<1<t_2$，$\frac{3}{t_1}+\frac{1}{t_2}=4$，

所以$\frac{1}{t_2}=4-\frac{3}{t_1}=\frac{4t_1-3}{t_1}$，即有$t_2=\frac{t_1}{4t_1-3}>1$，所以$\frac{3}{4}<t_1<1$，

所以$e_1^2+e_2^2=t_1+t_2=t_1+\frac{t_1}{4t_1-3}=\frac{4t_1^2-2t_1}{4t_1-3}$，

设$u=4t_1-3$，则$t_1=\frac{u+3}{4}$，且$0<u<1$，

所以$e_1^2+e_2^2=\frac{u^2+4u+3}{4u}=\frac{1}{4}\left(u+\frac{3}{u}\right)+1$，因为$y=x+\frac{3}{x}$在$(0,1)$上单调递减，

所以$u+\frac{3}{u}>4$，所以$e_1^2+e_2^2>2$.

故答案为：$(2,+\infty)$

三、解答题

17．在$\triangle ABC$中，$D\in BC$，$\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle ABD}}=\frac{\sin\angle B}{\sin\angle C}=\lambda$.

（1）求证：AD平分$\angle BAC$；

（2）当$\lambda=\frac{1}{2}$时，若$AD=1$，$DC=\frac{\sqrt{2}}{2}$，求BD和AC的长.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：

https://d.book118.com/265043043231012022