

专题 47 事件的相互独立性、条件概率与全概率公式

【考点预测】

知识点 1、条件概率

(一) 定义

一般地, 设 A, B 为两个事件, 且 $P(A) > 0$, 称 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$ 为在事件 A 发生的条件下, 事件 B 发生的条件概率.

注意: (1) 条件概率 $P(B|A)$ 中“|”后面就是条件; (2) 若 $P(A) = 0$, 表示条件 A 不可能发生, 此时用条件概率公式计算 $P(B|A)$ 就没有意义了, 所以条件概率计算必须在 $P(A) > 0$ 的情况下进行.

(二) 性质

(1) 条件概率具有概率的性质, 任何事件的条件概率都在 0 和 1 之间, 即 $0 \leq P(B|A) \leq 1$.

(2) 必然事件的条件概率为 1, 不可能事件的条件概率为 0.

(3) 如果 B 与 C 互斥, 则 $P(B \cup C|A) = P(B|A) + P(C|A)$.

注意: (1) 如果知道事件 A 发生会影响事件 B 发生的概率, 那么 $P(B) \neq P(B|A)$;

(2) 已知 A 发生, 在此条件下 B 发生, 相当于 AB 发生, 要求 $P(B|A)$, 相当于把 A 看作新的基本事

件空间计算 AB 发生的概率, 即 $P(B|A) = \frac{n(AB)}{n(A)} = \frac{\frac{n(AB)}{n(\Omega)}}{\frac{n(A)}{n(\Omega)}} = \frac{P(AB)}{P(A)}$.

知识点 2、相互独立与条件概率的关系

(一) 相互独立事件的概念及性质

(1) 相互独立事件的概念

对于两个事件 A, B , 如果 $P(B|A) = P(B)$, 则意味着事件 A 的发生不影响事件 B 发生的概率. 设 $P(A) > 0$, 根据条件概率的计算公式, $P(B) = P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$, 从而 $P(AB) = P(A)P(B)$.

由此我们可得: 设 A, B 为两个事件, 若 $P(AB) = P(A)P(B)$, 则称事件 A 与事件 B 相互独立.

(2) 概率的乘法公式

由条件概率的定义, 对于任意两个事件 A 与 B , 若 $P(A) > 0$, 则 $P(AB) = P(A)P(B|A)$. 我们称上式为概率的乘法公式.

(3) 相互独立事件的性质

如果事件 A, B 互相独立, 那么 A 与 \bar{B} , \bar{A} 与 B , \bar{A} 与 \bar{B} 也都相互独立.

(4) 两个事件的相互独立性的推广

两个事件的相互独立性可以推广到 $n(n > 2, n \in \mathbf{N}^*)$ 个事件的相互独立性, 即若事件 A_1, A_2, \dots, A_n

相互独立, 则这 n 个事件同时发生的概率 $P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1) P(A_2) \dots P(A_n)$.

(二) 事件的独立性

(1) 事件 A 与 B 相互独立的充要条件是 $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.

(2) 当 $P(B) > 0$ 时, A 与 B 独立的充要条件是 $P(A|B) = P(A)$.

(3) 如果 $P(A) > 0$, A 与 B 独立, 则 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(A)} = P(B)$ 成立.

知识点 3、全概率公式

(一) 全概率公式

(1) $P(B) = P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A})$;

(2) 定理 1 若样本空间 Ω 中的事件 A_1, A_2, \dots, A_n 满足:

① 任意两个事件均互斥, 即 $A_i A_j = \emptyset, i, j = 1, 2, \dots, n, i \neq j$;

② $A_1 + A_2 + \dots + A_n = \Omega$;

③ $P(A_i) > 0, i = 1, 2, \dots, n$.

则对 Ω 中的任意事件 B , 都有 $B = BA_1 + BA_2 + \dots + BA_n$, 且

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(BA_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i).$$

注意: (1) 全概率公式是用来计算一个复杂事件的概率, 它需要将复杂事件分解成若干简单事件的概率计算, 即运用了“化整为零”的思想处理问题.

(2) 什么样的问题适用于这个公式? 所研究的事件试验前提或前一步骤试验有多种可能, 在这多种可能中均有所研究的事件发生, 这时要求所研究事件的概率就可用全概率公式.

(二) 贝叶斯公式

(1) 一般地, 当 $0 < P(A) < 1$ 且 $P(B) > 0$ 时, 有 $P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A})}$

(2) 定理 2 若样本空间 Ω 中的事件 A_1, A_2, \dots, A_n 满足:

① 任意两个事件均互斥, 即 $A_i A_j = \emptyset, i, j = 1, 2, \dots, n, i \neq j$;

② $A_1 + A_2 + \dots + A_n = \Omega$;

③ $0 < P(A_i) < 1, i = 1, 2, \dots, n$.

则对 Ω 中的任意概率非零的事件 B , 都有 $B = BA_1 + BA_2 + \dots + BA_n$,

$$\text{且 } P(A_j|B) = \frac{P(A_j)P(B|A_j)}{P(B)} = \frac{P(A_j)P(B|A_j)}{\sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)}$$

注意: (1) 在理论研究和实际中还会遇到一类问题, 这就是需要根据试验发生的结果寻找原因, 看看导致这一试验结果的各种可能的原因中哪个起主要作用,

解决这类问题的方法就是使用贝叶斯公式. 贝叶斯公式的意义是导致事件 B 发生的各种原因可能性的大小, 称之为后验概率.

(2) 贝叶斯公式充分体现了 $P(A|B)$, $P(A)$, $P(B)$, $P(B|A)$, $P(B|\bar{A})$, $P(AB)$ 之间的转关系, 即 $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$, $P(AB) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$, $P(B) = P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A})$ 之间的内在联系.

【题型归纳目录】

题型一: 条件概率

题型二: 相互独立事件的判断

题型三: 相互独立事件概率的计算

题型四: 相互独立事件概率的综合应用

题型五: 全概率公式及其应用

题型六: 贝叶斯公式及其应用

题型七: 全概率公式与贝叶斯公式的综合应用

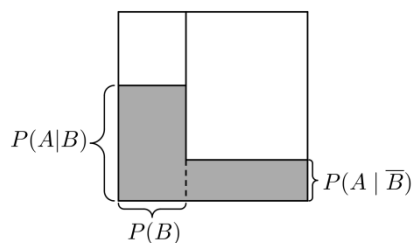
【典例例题】

题型一: 条件概率

例 1. (2023·浙江·绍兴鲁迅中学高三阶段练习) 甲、乙两人到一商店购买饮料, 他们准备分别从加多宝、农夫山泉、雪碧这 3 种饮品中随机选择一种, 且两人的选择结果互不影响. 记事件 $A =$ “甲选择农夫山泉”, 事件 $B =$ “甲和乙选择的饮品不同”, 则 $P(B|A) =$ ()

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{2}{3}$

例 2. (2023·全国·高三专题练习 (理)) 若将整个样本空间想象成一个 1×1 的正方形, 任何事件都对应样本空间的一个子集, 且事件发生的概率对应子集的面积. 则如图所示的涂色部分的面积表示 ()



- A. 事件 A 发生的概率 B. 事件 B 发生的概率
C. 事件 B 不发生条件下事件 A 发生的概率 D. 事件 A 、 B 同时发生的概率

例 3. (2023·全国·高三专题练习) 端午节这天人们会悬菖蒲、吃粽子、赛龙舟、喝雄黄酒. 现有 9 个粽子, 其中 2 个为蜜枣馅, 3 个为腊肉馅, 4 个为豆沙馅, 小明随机取两个, 设事件 A 为“取到的两个为同一种

馅”，事件 B 为“取到的两个均为豆沙馅”，则 $P(B|A) = (\quad)$

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{2}{3}$

变式 1. (2023·全国·高三专题练习) 如果 $\{a_n\}$ 不是等差数列, 但若 $\exists k \in N^*$, 使得 $a_k + a_{k+2} = 2a_{k+1}$, 那么称 $\{a_n\}$ 为“局部等差”数列. 已知数列 $\{x_n\}$ 的项数为 4, 记事件 A: 集合 $\{x_1, x_2, x_3, x_4\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 事件 B: $\{x_n\}$ 为“局部等差”数列, 则条件概率 $P(B|A) =$ ()

- A. $\frac{4}{15}$ B. $\frac{7}{30}$ C. $\frac{1}{5}$ D. $\frac{1}{6}$

变式 2. (2023·江苏·南京市秦淮中学高三阶段练习) 现有甲、乙、丙、丁四位同学到夫子庙、总统府、中山陵、南京博物馆 4 处景点旅游, 每人只去一处景点, 设事件 A 为“4 个人去的景点各不相同”, 事件 B 为“只有甲去了中山陵”, 则 $P(A|B) =$ _____.

变式 3. (2023·全国·高三专题练习) 已知事件 A 和 B 是互斥事件, $P(C) = \frac{1}{6}$, $P(B \cap C) = \frac{1}{18}$,

$P((A \cup B)|C) = \frac{8}{9}$, 则 $P(A|C) =$ _____.

变式 4. (2023·辽宁·抚顺市第二中学三模) 2022 年 3 月, 全国大部分省份出现了新冠疫情, 对于出现确诊病例的社区, 受到了全社会的关注. 为了把被感染的人筛查出来, 防疫部门决定对全体社区人员筛查核酸检测, 为了减少检验的工作量, 我们把受检验者分组, 假设每组有 k 个人, 把这 k 个人的血液混合在一起检验, 若检验结果为阴性, 这 k 个人的血液全为阴性, 因而这 k 个人只要检验一次就够了; 如果为阳性, 为了明确这 k 个人中究竟是哪几个人为阳性, 就要对这 k 个人再逐个进行检验. 假设在接受检验的人群中, 随机抽一人核酸检测呈阳性概率为 $p = 0.003$, 每个人的检验结果是阳性还是阴性是相互独立的.

(1) 若该社区约有 2000 人, 有两种分组方式可以选择: 方案一: 10 人一组; 方案二: 8 人一组. 请你为防疫部门选择一种方案, 并说明理由;

(2) 我们知道核酸检测呈阳性, 必须由专家二次确认, 因为有假阳性的可能; 已知该社区人员中被感染的概率为 0.29%, 且已知被感染的人员核酸检测呈阳性的概率为 99.9%, 若检测中有一人核酸检测呈阳性, 求其被感染的概率. (参考数据: $(0.997)^8 = 0.976, (0.997)^{10} = 0.970$,)

【方法技巧与总结】

用定义法求条件概率 $P(B|A)$ 的步骤

(1) 分析题意，弄清概率模型；

(2) 计算 $P(A)$, $P(A|B)$;

(3) 代入公式求 $P(B|A) = \frac{P(A|B)}{P(A)}$.

题型二：相互独立事件的判断

例 4. (2023·山东·潍坊七中高三阶段练习) 已知 A, B 是一次随机试验中的两个事件，若满足

$$P(A) = P(B) = \frac{2}{3}, \text{ 则 ()}$$

A. 事件 A, B 互斥

B. 事件 A, B 相互独立

C. 事件 A, B 不互斥

D. 事件 A, B 不相互独立

例 5. (2023·湖北·荆州中学高三阶段练习) 已知 A, B 为两个随机事件， $P(A), P(B) > 0$ ，则“ A, B 相互独立”是“ $P(\bar{A}|B) = P(\bar{A}|\bar{B})$ ”的 ()

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

例 6. (2023·全国·高三专题练习) 若 $P(AB) = \frac{1}{9}$, $P(\bar{A}) = \frac{2}{3}$, $P(B) = \frac{1}{3}$ ，则事件 A 与 B 的关系是 ()

A. 事件 A 与 B 互斥

B. 事件 A 与 B 对立

C. 事件 A 与 B 相互独立

D. 事件 A 与 B 既互斥又相互独立

变式 5. (2023·全国·高三专题练习) 袋内有 3 个白球和 2 个黑球，从中有放回地摸球，用 A 表示“第一次摸得白球”，如果“第二次摸得白球”记为 B ，“第二次摸得黑球”记为 C ，那么事件 A 与 B ， A 与 C 间的关系是 ()

A. A 与 B ， A 与 C 均相互独立

B. A 与 B 相互独立， A 与 C 互斥

C. A 与 B ， A 与 C 均互斥

D. A 与 B 互斥， A 与 C 相互独立

变式 6. (2023·全国·高三专题练习) 分别掷两枚质地均匀的硬币，“第一枚为正面”记为事件 A ，“第二枚为正面”记为事件 B ，“两枚结果相同”记为事件 C ，那么事件 A 与 B ， A 与 C 间的关系是 ()

A. A 与 B ， A 与 C 均相互独立

B. A 与 B 相互独立， A 与 C 互斥

C. A 与 B ， A 与 C 均互斥

D. A 与 B 互斥， A 与 C 相互独立

变式 7. (2023·江苏·常州市第一中学高三开学考试) 袋子里装有形状大小完全相同的 4 个小球，球上分别标有数字 1, 2, 3, 4，从中有放回的随机取两次，每次取 1 个球， A 表示事件“第一次取出的球上数字是 1”， B 表示事件“第二次取出的球上数字是 2”， C 表示事件“两次取出的球上数字之和是 5”， D

表示事件“两次取出的球上数字之和是6”，通过计算，则可以得出（ ）

- A. B 与 D 相互独立 B. A 与 D 相互独立
C. B 与 C 相互独立 D. C 与 D 相互独立

变式 8. (多选题) (2023·山东·高三开学考试) 抛掷一枚质地均匀的骰子，观察向上的面出现的点数，在下列事件中与事件“出现的点数为偶数”相互独立的事件为（ ）

- A. “出现的点数为奇数” B. “出现的点数大于 2”
C. “出现的点数小于 4” D. “出现的点数小于 3”

【方法技巧与总结】

判断事件是否相互独立的方法

(1) 定义法：事件 A , B 相互独立 $\Leftrightarrow P(A|B) = P(A) \cdot P(B)$.

(2) 由事件本身的性质直接判定两个事件发生是否相互影响.

(3) 条件概率法：当 $P(A) > 0$ 时，可用 $P(B|A) = P(B)$ 判断.

题型三：相互独立事件概率的计算

例 7. (2023·河南河南·模拟预测 (理)) 某士兵进行射击训练，每次命中目标的概率均为 $\frac{3}{4}$ ，且每次命中与否相互独立，则他连续射击 3 次，至少命中两次的概率为（ ）

- A. $\frac{27}{32}$ B. $\frac{9}{16}$ C. $\frac{27}{64}$ D. $\frac{9}{32}$

例 8. (2023·全国·高三专题练习 (理)) 甲、乙两人独立地破解同一个谜题，破解出谜题的概率分别为 $\frac{1}{2}$ ， $\frac{2}{3}$. 则谜题被破解的概率为（ ）

- A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{5}{6}$ D. 1

例 9. (2023·全国·高三专题练习) 甲乙两名运动员进行射击比赛，甲的中靶概率为 0.8，乙的中靶概率为 0.9，则至少有一人中靶的概率为（ ）

- A. 0.26 B. 0.72 C. 0.74 D. 0.98

变式 9. (2023·陕西·长安一中高三阶段练习 (理)) 某中学组织高三学生进行一项能力测试，测试内容包括 A 、 B 、 C 三个类型问题，这三个类型所含题目的个数分别占总数的 $\frac{1}{2}$ ， $\frac{1}{3}$ ， $\frac{1}{6}$. 现有 3 名同学独立地从中任选一个题目作答，则他们选择的题目所属类型互不相同的概率为（ ）

- A. $\frac{1}{36}$ B. $\frac{1}{12}$ C. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{1}{3}$

变式 10. (2023·重庆南开中学高三阶段练习) 重庆的 8 月份是一段让人难忘的时光, 我们遭遇了高温与山火, 断电和疫情. 疫情的肆虐, 让我们再次居家隔离. 为了保障民生, 政府极力保障各类粮食和生活用品的供应, 在政府的主导与支持下, 各大电商平台也纷纷上线, 开辟了一种无接触式送货服务, 用户在平台上选择自己生活所需要的货物并下单, 平台进行配备打包, 再由快递小哥送货上门. 已知沙坪坝某小区在隔离期间主要使用的电商平台有: 某东到家, 海马生鲜, 咚咚买菜. 由于交通、配送等多方面原因, 各电商平台并不能准时送达, 根据统计三家平台的准点率分别为 $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, 各平台送货相互独立, 互不影响, 某小哥分别在三家电商各点了一份配送货, 则至少有两家准点送到的概率为 ()

- A. $\frac{97}{120}$ B. $\frac{5}{6}$ C. $\frac{9}{10}$ D. $\frac{53}{60}$

变式 11. (2023·陕西·咸阳市高新一中高三开学考试(理)) 乒乓球是我国的国球, “乒乓精神”激励了一代又一代国人. 为弘扬国球精神, 传承乒乓球文化, 强健学生体魄, 某中学举行了乒乓球单打比赛. 比赛采用 7 局 4 胜制, 每局比赛为 11 分制, 选手只要得到至少 11 分, 并且领先对方至少 2 分 (包括 2 分), 即赢得该局比赛. 在一局比赛中, 每人只发 2 个球就要交换发球权, 如果双方比分为 10:10 后, 每一个球就要交换一个发球权. 经过紧张的角逐, 甲、乙两位选手进入了决赛.

- (1) 若甲赢得每局比赛的概率为 $\frac{2}{3}$, 求甲以 4:1 赢得比赛的概率;
- (2) 若在某一局比赛中, 双方战成 10:10. 且甲获得了下一球的发球权, 若甲发球时甲赢 1 分的概率为 $\frac{3}{4}$, 乙发球时甲赢 1 分的概率为 $\frac{1}{2}$, 求两人打了 ξ ($\xi \leq 5, \xi \in \mathbf{N}$) 个球后, 甲赢得了该局比赛的概率.

【方法技巧与总结】

(1) 求相互独立事件同时发生的概率的步骤

- ① 首先确定各事件之间是相互独立的.
- ② 求出每个事件的概率, 再求积.

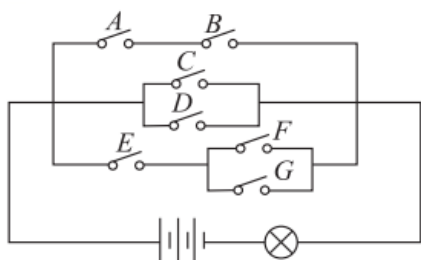
(2) 使用相互独立事件同时发生的概率计算公式时, 要掌握公式的适用条件, 即各个事件是相互独立的.

题型四: 相互独立事件概率的综合应用

例 10. (2023·全国·高三专题练习) “五一”劳动节放假期间, 甲、乙、丙去北京旅游的概率分别为 $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, 假定三人的行动相互之间没有影响, 那么这段时间内至少有 1 人去北京旅游的概率为 ()

- A. $\frac{59}{60}$ B. $\frac{3}{5}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{60}$

例 11. (2023·河北衡水·高三阶段练习) 一个电路如图所示, A, B, C, D, E, F, G 为 7 个开关, 其闭合的概率均为 $\frac{2}{3}$, 且是相互独立的, 则灯亮的概率是 ()



- A. $1 - \frac{55}{3^7}$ B. $1 - \frac{11}{3^7}$ C. $\frac{23}{3^7}$ D. $\frac{5}{3^5}$

例 12. (多选题) (2023·广东佛山·高三阶段练习) 九月伊始, 佛山市某中学社团招新活动开展得如火如荼, 小王、小李、小张三位同学计划从篮球社、足球社、羽毛球社三个社团中各自任选一个, 每人选择各社团的概率均为 $\frac{1}{3}$, 且每人选择相互独立, 则 ()

- A. 三人选择社团一样的概率为 $\frac{1}{9}$
 B. 三人选择社团各不相同的概率为 $\frac{8}{9}$
 C. 至少有两人选择篮球社的概率为 $\frac{7}{27}$
 D. 在至少有两人选择羽毛球社的前提下, 小王选择羽毛球社的概率为 $\frac{5}{7}$

变式 12. (多选题) (2023·山西长治·高三阶段练习) 以石墨烯电池、量子计算、AI 等颠覆性技术为引领的前沿趋势, 正在或将重塑世界工业的发展模式, 对人类生产力的创新提升意义重大, 我国某公司为了抢抓机遇, 成立了 A, B, C 三个科研小组针对某技术难题同时进行科研攻关, 攻克技术难题的小组会受到奖励. 已知 A, B, C 三个小组攻克该技术难题的概率分别为 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, 且三个小组各自独立进行科研攻关. 下列说法正确的 ()

- A. 三个小组都受到奖励的概率是 $\frac{1}{6}$ B. 只有 A 小组受到奖励的概率是 $\frac{1}{2}$

C. 只有 C 小组受到奖励的概率是 $\frac{2}{11}$

D. 受到奖励的小组数的期望值是 $\frac{5}{3}$

变式 13. (2023·重庆八中高三阶段练习) 女排世界杯比赛采用 5 局 3 胜制, 前 4 局比赛采用 25 分制, 每个队只有赢得至少 25 分, 并同时超过对方 2 分时, 才胜 1 局; 在决胜局 (第五局) 采用 15 分制, 每个队只有赢得至少 15 分, 并领先对方 2 分为胜. 在比赛中, 每一个回合, 赢球的一方可得 1 分, 并获得下一球的发球权, 输球的一方不得分. 现有甲乙两队进行排球比赛.

(1) 若前三局比赛中甲已经赢两局, 乙赢一局. 接下来的每局比赛甲队获胜的概率为 $\frac{2}{3}$, 求甲队最后赢得整场比赛的概率;

(2) 若前四局比赛中甲、乙两队已经各赢两局比赛. 在决胜局 (第五局) 中, 两队当前的得分均为 14 分, 且甲已获得下一发球权. 若甲发球时甲赢 1 分的概率为 $\frac{2}{5}$, 乙发球时甲赢 1 分的概率为 $\frac{3}{5}$. 求甲队在 4 个球以内 (含 4 个球) 赢得整场比赛的概率.

变式 14. (2023·陕西·渭南市华州区咸林中学高三阶段练习 (理)) 甲、乙两班进行消防安全知识竞赛, 每班出 3 人组成甲乙两支代表队, 首轮比赛每人一道必答题, 答对则为本队得 1 分, 答错或不答都得 0 分, 已知甲队 3 人每人答对的概率分别为 $\frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}$, 乙队每人答对的概率都是 $\frac{2}{3}$, 设每人回答正确与否相互之间没有影响, 用 X 表示甲队总得分.

(1) 求 $X = 2$ 的概率;

(2) 求甲队和乙队得分之和为 4 的概率.

【方法技巧与总结】

1、求复杂事件的概率一般可分三步进行

- (1) 列出题中涉及各个事件, 并用适当的符号表示它们;
- (2) 理清各事件之间的关系, 恰当地用事件间的“并”“交”表示所求事件;
- (3) 根据事件之间的关系准确地运用概率公式进行计算.

2、计算事件同时发生的概率常用直接法, 当遇到“至少”“至多”问题, 考虑逆向思维, 考查原事件的对立事件, 用间接法处理.

题型五：全概率公式及其应用

例 13. (2023·浙江·高三开学考试) 设甲乘汽车、动车前往某目的地的概率分别为 0.4、0.6，汽车和动车正点到达目的地的概率分别为 0.7、0.9，则甲正点到达目的地的概率为 ()

- A. 0.78 B. 0.8 C. 0.82 D. 0.84

例 14. (2023·全国·高三专题练习) 英国数学家贝叶斯 (1701-1763) 在概率论研究方面成就显著，创立了贝叶斯统计理论，对于统计决策函数、统计推断等做出了重要贡献。根据贝叶斯统计理论，事件 A ， B ， \bar{A} (A 的对立事件) 存在如下关系： $P(B) = P(B|A) \cdot P(A) + P(B|\bar{A}) \cdot P(\bar{A})$ 。若某地区一种疾病的患病率是 0.02，现有一种试剂可以检验被检者是否患病，已知该试剂的准确率为 99%，即在被检验者患病的前提下用该试剂检测，有 99% 的可能呈现阳性，该试剂的误报率为 5%，即在被检验者未患病的情况下用该试剂检测，有 5% 的可能误报阳性。现随机抽取该地区的一个被检验者，用该试剂来检验，结果呈现阳性的概率为 ()

- A. 0.0688 B. 0.0198 C. 0.049 D. 0.05

例 15. (2023·全国·高三专题练习) 某种电路开关闭合后会出现红灯或绿灯闪动，已知开关第一次闭合后，出现红灯和绿灯的概率都是 $\frac{1}{2}$ 。从开关第一次闭合起，若前次出现红灯，则下一次出现红灯的概率是 $\frac{1}{3}$ ，出现绿灯的概率是 $\frac{2}{3}$ ；若前次出现绿灯，则下一次出现红灯的概率是 $\frac{3}{5}$ ，出现绿灯的概率是 $\frac{2}{5}$ ，那么第二次闭合后出现红灯的概率是_____。

变式 15. (2023·全国·高三专题练习) 某考生回答一道四选一的考题，假设他知道正确答案的概率为 0.5，知道正确答案时，答对的概率为 100%，而不知道正确答案时猜对的概率为 0.25，那么他答对题目的概率为_____。

变式 16. (2023·全国·高三专题练习) 盒中放有 12 个乒乓球，其中 9 个是新的，3 个是旧的。第一次比赛时，从中任意取出了 3 个来用，用完后仍放回盒中 (新球用后成了旧球)。第二次比赛时再从盒中取出 3 个来用，求第二次取出的 3 个球均为新球的概率。

变式 17. (2023·全国·高三专题练习) 鲜花饼是以云南特有的食用玫瑰花入料的酥饼，是具有云南特色的云南经典点心代表，鲜花饼的保质期一般在三至四天。据统计，某超市一天鲜花饼卖出 3 箱的概率为 $\frac{1}{5}$ ，卖出 2

箱的概率为 $\frac{1}{2}$ ，卖出1箱的概率为 $\frac{1}{5}$ ，没有卖出的概率为 $\frac{1}{10}$ ，为了保证顾客能够买到新鲜的鲜花饼，该超市规定当天结束营业后检查货架上存货，若卖出2箱及以上，则需补货至3箱，否则不补货.假设第一天该超市开始营业时货架上有3箱鲜花饼.

(1)在第一天结束营业后货架上有2箱鲜花饼的条件下，求第二天结束营业时货架上有1箱存货的概率；

(2)求第二天结束营业时货架上有1箱存货的概率.

变式 18. (2023·全国·高三专题练习)某支足球队在对球员的使用上总是进行数据分析，根据以往的数据统计，乙球员能够胜任前锋、中锋、后卫以及守门员四个位置，且出场率分别为0.2, 0.5, 0.2, 0.1，且当乙球员担当前锋、中锋、后卫以及守门员时，球队输球的概率依次为0.4, 0.2, 0.6, 0.2.从以上数据可知，当乙球员参加比赛时，求该球队某场比赛不输球的概率.

变式 19. (2023·全国·高三专题练习)有3箱同种型号零件，里面分别装有50件、30件、40件，而且一等品分别有20件、12件和24件，现在任取一箱，从中不放回地先后取出2个零件.

(1)求先取出的零件是一等品的概率；

(2)求两次取出的零件均为一等品的概率.(结果保留两位小数)

【方法技巧与总结】

全概率公式 $P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)$ 在解题中体现了“化整为零、各个击破”的转化思想，可将较为复杂的概率计算分解为一些较为容易的情况分别进行考虑.

题型六：贝叶斯公式及其应用

例 16. (2023·全国·高三专题练习)有3台车床加工同一型专的零件，第1台加工的次品率为6%，第2、3台加工的次品率均为5%，加工出来的零件混放在一起，已知第1、2、3台车床加工的零件数分别占总数的25%，30%，45%，现从加工出来的零件中任取一个零件，则取到的零件是次品，且是第1台车床加工的概率为_____.

例 17. (多选题) (2023·山东·高密三中高三阶段练习) 英国数学家贝叶斯在概率论研究方面成就显著, 根据贝叶斯统计理论, 随机事件 A 、 B 存在如下关系: $P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}$. 某高校有甲、乙两家餐厅, 王同

学第一天去甲、乙两家餐厅就餐的概率分别为 0.4 和 0.6. 如果他第一天去甲餐厅, 那么第二天去甲餐厅的概率为 0.6; 如果第一天去乙餐厅, 那么第二天去甲餐厅的概率为 0.5, 则王同学 ()

- A. 第二天去甲餐厅的概率为 0.54
- B. 第二天去乙餐厅的概率为 0.44
- C. 第二天去了甲餐厅, 则第一天去乙餐厅的概率为 $\frac{5}{9}$
- D. 第二天去了乙餐厅, 则第一天去甲餐厅的概率为 $\frac{4}{9}$

例 18. (2023·河南省上蔡第一高级中学高三阶段练习(文)) 阅读不仅可以开阔视野, 还可以提升语言表达和写作能力. 某校全体学生参加的期末过程性评价中大约有 30% 的学生写作能力被评为优秀等级. 经调查知, 该校大约有 20% 的学生每天阅读时间超过 1 小时, 这些学生中写作能力被评为优秀等级的占 70%. 现从每天阅读时间不超过 1 小时的学生中随机抽查一名, 该生写作能力被评为优秀等级的概率为 ()

- A. 0.25
- B. 0.2
- C. 0.15
- D. 0.1

变式 20. (2023·湖南·雅礼中学高三阶段练习) 某工厂有 A 、 B 两个生产车间, 所生产的同一批产品合格率分别是 99% 和 98%, 已知某批产品的 60% 和 40% 分别是 A 、 B 两个车间生产, 质量跟踪小组从中随机抽取一件, 发现不合格, 则该产品是由 A 车间生产的概率为 ()

- A. $\frac{3}{4}$
- B. $\frac{4}{7}$
- C. $\frac{1}{2}$
- D. $\frac{3}{7}$

变式 21. (2023·全国·高二课时练习) 设某公路上经过的货车与客车的数量之比为 2:1, 货车中途停车修理的概率为 0.02, 客车中途停车修理的概率为 0.01, 今有一辆汽车中途停车修理, 求该汽车是货车的概率.

变式 22. (2023·全国·高二课时练习) 设患肺结核病的患者通过胸透被诊断出的概率为 0.95, 而未患肺结核病的人通过胸透被误诊为有病的概率为 0.002, 已知某城市居民患肺结核的概率为 0.001. 若从该城市居民中随机选出一人, 通过胸透被诊断为肺结核, 求这个人确实患有肺结核的概率.

【方法技巧与总结】

1、利用贝叶斯公式求概率的步骤

第一步：利用全概率公式计算 $P(A)$ ，即 $P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i)P(A|B_i)$ ；

第二步：计算 $P(AB)$ ，可利用 $P(AB) = P(B)P(A|B)$ 求解；

第三步：代入 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$ 求解.

2、贝叶斯概率公式反映了条件概率 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$ ，全概率公式 $P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i)P(A|B_i)$ 及乘法公式

$$P(AB) = P(B)P(A|B) \text{ 之间的关系，即 } P(B_j|A) = \frac{P(B_j A)}{P(A)} = \frac{P(B_j)P(A|B_j)}{P(A)} = \frac{P(B_j)P(A|B_j)}{\sum_{i=1}^n P(B_i)P(A|B_i)}.$$

题型七：全概率公式与贝叶斯公式的综合应用

例 19. (2023·全国·高三专题练习) 一道考题有 4 个答案，要求学生将其中的一个正确答案选择出来. 某考生知道正确答案的概率为 $\frac{1}{3}$ ，在乱猜时，4 个答案都有机会被他选择，若他答对了，则他确实知道正确答案的概率是 ()

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{1}{4}$

例 20. (多选题) (山东省潍坊市 2021-2022 学年高三上学期 10 月优生抽测数学试题) 已知编号为 1, 2, 3 的三个盒子，其中 1 号盒子内装有两个 1 号球，一个 2 号球和一个 3 号球；2 号盒子内装有两个 1 号球，一个 3 号球；3 号盒子内装有三个 1 号球，两个 2 号球. 若第一次先从 1 号盒子内随机抽取 1 个球，将取出的球放入与球同编号的盒子中，第二次从该盒子中任取一个球，则下列说法正确的是 ()

- A. 在第一次抽到 2 号球的条件下，第二次抽到 1 号球的概率为 $\frac{1}{2}$
- B. 第二次抽到 3 号球的概率为 $\frac{11}{48}$
- C. 如果第二次抽到的是 1 号球，则它来自 2 号盒子的概率最大
- D. 如果将 5 个不同的小球放入这三个盒子内，每个盒子至少放 1 个，则不同的放法有 300 种

例 21. (多选题) (2023·全国·高三专题练习) 甲箱中有 5 个红球，2 个白球和 3 个黑球，乙箱中有 4 个红球，3 个白球和 3 个黑球. 先从甲箱中随机取出一球放入乙箱，分别以 A_1, A_2 和 A_3 表示由甲箱取出的球是红球，白球和黑球的事件；再从乙箱中随机取出一球，以 B

表示由乙箱取出的球是红球的事件，则下列结论正确的是（ ）

- A. 事件 B 与事件 $A_i (i=1,2,3)$ 相互独立 B. $P(A_1B) = \frac{5}{22}$
- C. $P(B) = \frac{2}{5}$ D. $P(A_2|B) = \frac{8}{45}$

变式 23. (2023·全国·高三专题练习) 甲箱中有 5 个红球, 2 个白球和 3 个黑球, 乙箱中有 4 个红球, 3 个白球和 3 个黑球 (球除颜色外, 大小质地均相同). 先从甲箱中随机取出一球放入乙箱, 分别以 A_1 , A_2 和 A_3 表示由甲箱中取出的球是红球, 白球和黑球的事件; 再从乙箱中随机取出一球, 以 B 表示由乙箱中取出的球是红球的事件, 下列说法正确的序号是_____.

- ①事件 A_1 , A_2 相互独立; ② $P(A_3) = \frac{1}{5}$; ③ $P(B) = \frac{9}{22}$; ④ $P(B|A_2) = \frac{4}{11}$; ⑤ $P(A_1|B) = \frac{5}{9}$.

变式 24. (2023·全国·高三专题练习) 两台车床加工同样的零件, 第一台出现废品的概率是 0.03, 第二台出现废品的概率是 0.02. 加工出来的零件放在一起, 并且已知第一台加工的零件比第二台加工的零件多一倍.

- (1) 求任意取出 1 个零件是合格品的概率;
- (2) 如果任意取出的 1 个零件是废品, 求它是第二台车床加工的概率.

变式 25. (2023·全国·高二课时练习) 设甲、乙、丙三个地区爆发了某种流行病, 三个地区感染此病的比例分 $\frac{1}{7}$ 、 $\frac{1}{5}$ 、 $\frac{1}{4}$. 现从这三个地区任抽取一个人.

- (1) 求此人感染此病的概率; (结果保留三位小数)
- (2) 若此人感染此病, 求此人来自乙地区的概率. (结果保留三位小数).

变式 26. (2023·黑龙江·齐齐哈尔市恒昌中学校高三开学考试) 某品牌汽车厂今年计划生产 10 万辆轿车, 生产每辆轿车都需要安装一个配件 M , 其中由本厂自主生产的配件 M 可以满足 20% 的生产需要, 其余的要向甲、乙两个配件厂家订购. 已知本厂生产配件 M 的成本为 500 元/件, 从甲、乙两厂订购配件 M 的成本分别为 600 元/件和 800 元/件, 该汽车厂计划将每辆轿车使用配件 M 的平均成本控制为 640 元/件.

- (1) 分别求该汽车厂需要从甲厂和乙厂订购配件 M 的数量;

(2)已知甲厂、乙厂和本厂自主生产的配件 M 的次品率分别为 4%，2%和 1%，求该厂生产的一辆轿车使用的配件 M 是次品的概率；

(3)现有一辆轿车由于使用了次品配件 M 出现了质量问题，需要返厂维修，维修费用为 14 000 元，若维修费用由甲厂、乙厂和本厂按照次品配件 M 来自各厂的概率的比例分担，则它们各自应该承担的维修费用分别为多少？

变式 27. (2023·全国·高三专题练习) 设某厂有甲、乙、丙三个车间生产同一种产品，已知各车间的产量分别占全厂产量的 25%，35%，40%，并且各车间的次品率依次为 5%，4%，2%.现从该厂这批产品中任取一件.

(1)求取到次品的概率；

(2)若取到的是次品，则此次品由三个车间生产的概率分别是多少？

变式 28. (2023·山东青岛·高三开学考试) 北京时间 2021 年 8 月 8 日，历时 17 天的东京奥运会落下帷幕，中国代表团以 38 金、32 银、18 铜、打破 4 项世界纪录、创造 21 项奥运会纪录的傲人成绩，顺利收官.作为“梦之队”的中国乒乓球队在东京奥运会斩获 4 金 3 银的好成绩，参赛的 7 名选手全部登上领奖台.我国是乒乓球生产大国，某厂家生产了两批同种规格的乒乓球，第一批占 60%，次品率为 6%；第二批占 40%，次品率为 5%.为确保质量，现在将两批乒乓球混合，工作人员从中抽样检查.

(1) 从混合的乒乓球中任取 1 个.

(i) 求这个乒乓球是合格品的概率；

(ii) 已知取到的是合格品，求它取自第一批乒乓球的概率.

(2) 从混合的乒乓球中有放回地连续抽取 2 次，每次抽取 1 个，记两次抽取中，抽取的乒乓球是第二批的次数为 X ，求随机变量 X 的分布列和数学期望.

【方法技巧与总结】

7. (2023·湖南益阳·模拟预测) 有3台车床加工同一型号的零件, 第1台加工的次品率为5%, 第2, 3台加工的次品率均为3%, 加工出来的零件混放在一起, 第1, 2, 3台车床加工的零件数分别占总数的15%,

25%，60%。随机取一个零件，记 A = “零件为次品”， B_i = “零件为第 i 台车床加工” ($i=1,2,3$)，则下列结论：

① $P(A) = 0.033$,

② $\sum_{i=1}^3 P(B_i) = 1$,

③ $P(B_1 | A) = P(B_2 | A)$,

④ $P(B_1 | A) + P(B_2 | A) = P(B_3 | A)$.

其中正确的有 ()

- A. 1个 B. 2个 C. 3个 D. 4个

8. (2023·云南省玉溪第一中学高三开学考试) 先后抛掷一颗质地均匀的骰子两次，观察向上的点数。在第一次向上的点数为奇数的条件下，两次点数和不大于7的概率为 ()

- A. $\frac{13}{18}$ B. $\frac{7}{12}$ C. $\frac{3}{10}$ D. $\frac{2}{3}$

二、多选题

9. (2023·全国·高三专题练习) 同时抛掷两个质地均匀的四面分别标有1, 2, 3, 4的正四面体一次，记事件 A 表示“第一个四面体向下的一面出现偶数”，事件 B 表示“第二个四面体向下的一面出现奇数”，事件 C 表示“两个四面体向下的一面同时出现奇数或者同时出现偶数”，则 ()

- A. $P(AB) = P(AC) = P(BC)$ B. $P(A|B) = P(A|C) = \frac{1}{2}$
 C. $P(ABC) = \frac{1}{8}$ D. $P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{4}$

10. (2023·江苏镇江·高三开学考试) 设甲袋中有3个白球和4个红球，乙袋中有1个白球和2个红球，则 ()

- A. 从甲袋中每次任取一个球不放回，则在第一次取到白球的条件下，第二次取到红球的概率为 $\frac{2}{3}$
 B. 从甲袋中随机取出了3个球，恰好是2个白球1个红球的概率为 $\frac{6}{35}$
 C. 从乙袋中每次任取一个球并放回，连续取6次，则取得红球个数的数学期望为4
 D. 从甲袋中任取2个球放入乙袋，再从乙袋中任取2个球，则从乙袋中取出的是2个红球的概率为 $\frac{5}{14}$

11. (2023·全国·高三专题练习) 甲罐中有5个红球，2个白球和3个黑球，乙罐中有4个红球，3个白球和3个黑球。先从甲罐中随机取出一球放入乙罐，分别以 A_1 , A_2 和 A_3 表示从甲罐取出的球是红球、白球、黑球，再从乙罐中随机取出一球，以 B 表示从乙罐取出的球是红球。则下列结论中正确的是 ()

- A. $P(B|A_1) = \frac{5}{11}$ B. $P(B) = \frac{2}{5}$
 C. 事件 B 与事件 A_1 相互独立 D. A_1, A_2, A_3 两两互斥

12. (2023

赛的规则和积分制吗？其规则是：每场比赛采用“5局3胜制”（即有一支球队先胜3

局即获胜，比赛结束)。比赛排名采用积分制，积分规则如下：比赛中，以3:0或3:1取胜的球队积3分，负队积0分；以3:2取胜的球队积2分，负队积1分。已知甲、乙两队比赛，甲队每局获胜的概率为 $\frac{2}{3}$ 。

(1)如果甲、乙两队比赛1场，求甲队的积分 X 的概率分布列和数学期望；

(2)如果甲、乙两队约定比赛2场，求两队积分相等的概率。

19. (2023·广东·东莞四中高三阶段练习) 某品牌汽车厂今年计划生产10万辆轿车，生产每辆轿车都需要安装一个配件 M ，其中由本厂自主生产的配件 M 可以满足20%的生产需要，其余的要向甲、乙两个配件厂家订购。已知本厂生产配件 M 的成本为500元/件，从甲、乙两厂订购配件 M 的成本分别为600元/件和800元/件，该汽车厂计划将每辆轿车使用配件 M 的平均成本控制为640元/件。

(1)分别求该汽车厂需要从甲厂和乙厂订购配件 M 的数量；

(2)已知甲厂、乙厂和本厂自主生产的配件 M 的次品率分别为4%，2%和1%，求该厂生产的一辆轿车使用的配件 M 是次品的概率。

20. (2023·全国·高三专题练习) 已知甲箱产品中有5个正品和3个次品，乙箱产品中有4个正品和3个次品

(1)如果依次不放回地从乙箱中抽取2个产品，求第2次取到次品的概率

(2)若从甲箱中任取2个产品放入乙箱中，然后再从乙箱中任取一个产品

(i) 求从乙箱中取出的这个产品是正品的概率

(ii) 已知从乙箱中取出的这个产品是正品，求从甲箱中取出的是2个正品的概率

专题 47 事件的相互独立性、条件概率与全概率公式

【考点预测】

知识点 1、条件概率

(一) 定义

一般地, 设 A, B 为两个事件, 且 $P(A) > 0$, 称 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$ 为在事件 A 发生的条件下, 事件 B 发生的条件概率.

注意: (1) 条件概率 $P(B|A)$ 中“|”后面就是条件; (2) 若 $P(A) = 0$, 表示条件 A 不可能发生, 此时用条件概率公式计算 $P(B|A)$ 就没有意义了, 所以条件概率计算必须在 $P(A) > 0$ 的情况下进行.

(二) 性质

(1) 条件概率具有概率的性质, 任何事件的条件概率都在 0 和 1 之间, 即 $0 \leq P(B|A) \leq 1$.

(2) 必然事件的条件概率为 1, 不可能事件的条件概率为 0.

(3) 如果 B 与 C 互斥, 则 $P(B \cup C|A) = P(B|A) + P(C|A)$.

注意: (1) 如果知道事件 A 发生会影响事件 B 发生的概率, 那么 $P(B) \neq P(B|A)$;

(2) 已知 A 发生, 在此条件下 B 发生, 相当于 AB 发生, 要求 $P(B|A)$, 相当于把 A 看

作新的基本事件空间计算 AB 发生的概率, 即 $P(B|A) = \frac{n(AB)}{n(A)} = \frac{\frac{n(AB)}{n(\Omega)}}{\frac{n(A)}{n(\Omega)}} = \frac{P(AB)}{P(A)}$.

知识点 2、相互独立与条件概率的关系

(一) 相互独立事件的概念及性质

(1) 相互独立事件的概念

对于两个事件 A, B , 如果 $P(B|A) = P(B)$, 则意味着事件 A 的发生不影响事件 B 发生的概率. 设 $P(A) > 0$, 根据条件概率的计算公式, $P(B) = P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$, 从而

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

由此我们可得: 设 A, B 为两个事件, 若 $P(AB) = P(A)P(B)$, 则称事件 A 与事件 B 相互独立.

(2) 概率的乘法公式

由条件概率的定义, 对于任意两个事件 A 与 B , 若 $P(A) > 0$, 则 $P(AB) = P(A)P(B|A)$. 我们称上式为概率的乘法公式.

(3) 相互独立事件的性质

如果事件 A, B 互相独立, 那么 A 与 \bar{B} , \bar{A} 与 B , \bar{A} 与 \bar{B} 也都相互独立.

(4) 两个事件的相互独立性的推广

两个事件的相互独立性可以推广到 $n(n > 2, n \in \mathbf{N}^*)$ 个事件的相互独立性, 即若事件 A_1, A_2, \dots, A_n 相互独立, 则这 n 个事件同时发生的概率 $P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1) P(A_2) \dots P(A_n)$.

(二) 事件的独立性

(1) 事件 A 与 B 相互独立的充要条件是 $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.

(2) 当 $P(B) > 0$ 时, A 与 B 独立的充要条件是 $P(A|B) = P(A)$.

(3) 如果 $P(A) > 0$, A 与 B 独立, 则 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(A)} = P(B)$ 成立.

知识点 3、全概率公式

(一) 全概率公式

(1) $P(B) = P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A})$;

(2) 定理 1 若样本空间 Ω 中的事件 A_1, A_2, \dots, A_n 满足:

① 任意两个事件均互斥, 即 $A_i A_j = \emptyset, i, j = 1, 2, \dots, n, i \neq j$;

② $A_1 + A_2 + \dots + A_n = \Omega$;

③ $P(A_i) > 0, i = 1, 2, \dots, n$.

则对 Ω 中的任意事件 B , 都有 $B = BA_1 + BA_2 + \dots + BA_n$, 且

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(BA_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i).$$

注意 (1) 全概率公式是用来计算一个复杂事件的概率, 它需要将复杂事件分解成若干简单事件的概率计算, 即运用了“化整为零”的思想处理问题.

(2) 什么样的问题适用于这个公式? 所研究的事件试验前提或前一步骤试验有多种可能, 在这多种可能中均有所研究的事件发生, 这时要求所研究事件的概率就可用全概率公式.

(二) 贝叶斯公式

(1) 一般地, 当 $0 < P(A) < 1$ 且 $P(B) > 0$ 时, 有

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A})}$$

(2) 定理 2 若样本空间 Ω 中的事件 A_1, A_2, \dots, A_n 满足:

① 任意两个事件均互斥, 即 $A_i A_j = \emptyset, i, j = 1, 2, \dots, n, i \neq j$;

② $A_1 + A_2 + \dots + A_n = \Omega$;

③ $0 < P(A_i) < 1, i = 1, 2, \dots, n.$

则对 Ω 中的任意概率非零的事件 B , 都有 $B = BA_1 + BA_2 + \dots + BA_n$,

$$\text{且 } P(A_j|B) = \frac{P(A_j)P(B|A_j)}{P(B)} = \frac{P(A_j)P(B|A_j)}{\sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)}$$

注意 (1) 在理论研究和实际中还会遇到一类问题, 这就是需要根据试验发生的结果寻找原因, 看看导致这一试验结果的各种可能的原因中哪个起主要作用, 解决这类问题的方法就是使用贝叶斯公式. 贝叶斯公式的意义是导致事件 B 发生的各种原因可能性的大小, 称之为后验概率.

(2) 贝叶斯公式充分体现了 $P(A|B), P(A), P(B), P(B|A), P(B|\bar{A}), P(AB)$ 之间的转关系, 即 $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, P(AB) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A),$

$P(B) = P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A})$ 之间的内在联系.

【题型归纳目录】

题型一: 条件概率

题型二: 相互独立事件的判断

题型三: 相互独立事件概率的计算

题型四: 相互独立事件概率的综合应用

题型五: 全概率公式及其应用

题型六: 贝叶斯公式及其应用

题型七: 全概率公式与贝叶斯公式的综合应用

【典例例题】

题型一: 条件概率

例 1. (2023·浙江·绍兴鲁迅中学高三阶段练习) 甲、乙两人到一商店购买饮料, 他们准备分别从加多宝、农夫山泉、雪碧这 3 种饮品中随机选择一种, 且两人的选择结果互不影响. 记事件 $A =$ “甲选择农夫山泉”, 事件 $B =$ “甲和乙选择的饮品不同”, 则 $P(B|A) = (\quad)$

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{2}{3}$

答案: D

【解析】 事件 $A =$ “甲选择农夫山泉”, 则 $P(A) = \frac{1}{3}$

事件 $B =$ “甲和乙选择的饮品不同”,

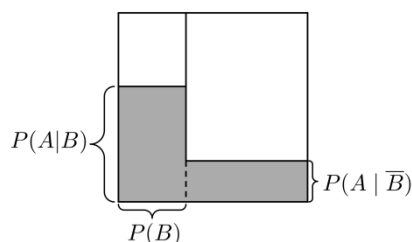
则事件 $AB =$ “甲选择农夫山泉, 乙选择的是加多宝或者雪碧”

$$\text{所以 } P(AB) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

$$\text{所以 } P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{2}{3},$$

故选：D

例 2. (2023·全国·高三专题练习 (理)) 若将整个样本空间想象成一个 1×1 的正方形，任何事件都对应样本空间的一个子集，且事件发生的概率对应子集的面积. 则如图所示的涂色部分的面积表示 ()



- A. 事件 A 发生的概率
 B. 事件 B 发生的概率
 C. 事件 B 不发生条件下事件 A 发生的概率
 D. 事件 A 、 B 同时发生的概率

答案：A

【解析】 由题意可得，如图所示的涂色部分的面积为 $P(A|B)P(B) + [1 - P(B)]P(A|\bar{B})$
 $= P(AB) + P(\bar{B})P(A|\bar{B}) = P(AB) + P(\bar{A}\bar{B}) = P(A)$ ，

故选：A

例 3. (2023·全国·高三专题练习) 端午节这天人们会悬菖蒲、吃粽子、赛龙舟、喝雄黄酒. 现有 9 个粽子，其中 2 个为蜜枣馅，3 个为腊肉馅，4 个为豆沙馅，小明随机取两个，设事件 A 为“取到的两个为同一种馅”，事件 B 为“取到的两个均为豆沙馅”，则 $P(B|A) =$ ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{2}{3}$

答案：C

【解析】 由题意不妨设 2 个蜜枣馅为：A, B, 3 个为腊肉馅为：a, b, c, 4 个为豆沙馅：1, 2, 3, 4, 则事件 A 为“取到的两个为同一种馅”，对应的事件为：AB, ab, ac, bc, 12, 13, 14, 23, 24, 34, 所以 $n(A) = 10$ ，
 事件 AB 为“取到的两个为同一种馅，均为豆沙馅”，对应的事件为：12, 13, 14, 23, 24, 34, 所以 $n(AB) = 6$ ，

$$\text{所以 } P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{n(AB)}{n(A)} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5},$$

故选：C

变式 1. (2023·全国·高三专题练习) 如果 $\{a_n\}$ 不是等差数列，但若 $\exists k \in \mathbb{N}^*$ ，使得

$a_k + a_{k+2} = 2a_{k+1}$, 那么称 $\{a_n\}$ 为“局部等差”数列. 已知数列 $\{x_n\}$ 的项数为 4, 记事件 A: 集合 $\{x_1, x_2, x_3, x_4\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 事件 B: $\{x_n\}$ 为“局部等差”数列, 则条件概率 $P(B|A) =$ ()

- A. $\frac{4}{15}$ B. $\frac{7}{30}$ C. $\frac{1}{5}$ D. $\frac{1}{6}$

答案: C

【解析】由题意知, 事件 A 共有 $C_5^4 \cdot 4^4 = 120$ 个基本事件, 事件 B: “局部等差”数列共有以下 24 个基本事件,

(1) 其中含 1, 2, 3 的局部等差的分别为 1, 2, 3, 5 和 5, 1, 2, 3 和 4, 1, 2, 3 共 3 个, 含 3, 2, 1 的局部等差数列的同理也有 3 个, 共 6 个.

含 3, 4, 5 的和含 5, 4, 3 的与上述 (1) 相同, 也有 6 个.

含 2, 3, 4 的有 5, 2, 3, 4 和 2, 3, 4, 1 共 2 个,

含 4, 3, 2 的同理也有 2 个.

含 1, 3, 5 的有 1, 3, 5, 2 和 2, 1, 3, 5 和 4, 1, 3, 5 和 1, 3, 5, 4 共 4 个,

含 5, 3, 1 的也有上述 4 个, 共 24 个,

$$\therefore P(B|A) = \frac{24}{120} = \frac{1}{5}.$$

故选 C.

变式 2. (2023·江苏·南京市秦淮中学高三阶段练习) 现有甲、乙、丙、丁四位同学到夫子庙、总统府、中山陵、南京博物馆 4 处景点旅游, 每人只去一处景点, 设事件 A 为“4 个人去的景点各不相同”, 事件 B 为“只有甲去了中山陵”, 则 $P(A|B) =$ _____.

答案: $\frac{2}{9}$

【解析】甲、乙、丙、丁四位同学到夫子庙、总统府、中山陵、南京博物馆 4 处景点旅游, 共有 $4^4 = 256$ 种不同的方案,

事件 A, “4 个人去的景点各不相同”的方案有: $A_4^4 = 24$ 种,

事件 B, “只有甲去了中山陵”的方案有 $3^3 = 27$ 种,

事件 AB 同时发生的方案有: $A_3^3 = 6$ 种,

$$P(AB) = \frac{6}{256} = \frac{3}{128}, \quad P(B) = \frac{27}{256}$$

$$\text{所以 } P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}$$

故答案为: $\frac{2}{9}$

变式 3. (2023·全国·高三专题练习) 已知事件 A 和 B 是互斥事件, $P(C) = \frac{1}{6}$, $P(B \cap C) = \frac{1}{18}$,

$P((A \cup B)|C) = \frac{8}{9}$, 则 $P(A|C) = \underline{\hspace{2cm}}$.

答案: $\frac{5}{9}$

【解析】由题意知, $P((A \cup B)|C) = P(A|C) + P(B|C) = \frac{8}{9}$, $P(B|C) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{18}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{3}$,

则 $P(A|C) = P((A \cup B)|C) - P(B|C) = \frac{8}{9} - \frac{1}{3} = \frac{5}{9}$.

故答案为: $\frac{5}{9}$.

变式 4. (2023·辽宁·抚顺市第二中学三模) 2022 年 3 月, 全国大部分省份出现了新冠疫情, 对于出现确诊病例的社区, 受到了全社会的关注. 为了把被感染的人筛查出来, 防疫部门决定对全体社区人员筛查核酸检测, 为了减少检验的工作量, 我们把受检验者分组, 假设每组有 k 个人, 把这 k 个人的血液混合在一起检验, 若检验结果为阴性, 这 k 个人的血液全为阴性, 因而这 k 个人只要检验一次就够了; 如果为阳性, 为了明确这 k 个人中究竟是哪几个人为阳性, 就要对这 k 个人再逐个进行检验. 假设在接受检验的人群中, 随机抽一人核酸检测呈阳性概率为 $p = 0.003$, 每个人的检验结果是阳性还是阴性是相互独立的.

(1) 若该社区约有 2000 人, 有两种分组方式可以选择: 方案一是: 10 人一组; 方案二: 8 人一组. 请你为防疫部门选择一种方案, 并说明理由;

(2) 我们知道核酸检测呈阳性, 必须由专家二次确认, 因为有假阳性的可能; 已知该社区人员中被感染的概率为 0.29%, 且已知被感染的人员核酸检测呈阳性的概率为 99.9%, 若检测中有一人核酸检测呈阳性, 求其被感染的概率. (参考数据:

$(0.997^8 = 0.976, 0.997^{10} = 0.970,)$

【解析】(1) 设方案一中每组的化验次数为 ξ , 则 ξ 的取值为 1, 11,

$$\therefore P(\xi = 1) = 0.997^{10} = 0.970,$$

$$P(\xi = 11) = 1 - 0.997^{10} = 0.03,$$

$\therefore \xi$ 的分布列为:

ξ	1	11
p	0.970	0.030

$$E(\xi) = 1 \times 0.97 + 11 \times 0.03 = 1.300.$$

故方案一的化验总次数的期望值为: $200E(X) = 200 \times 1.3 = 260$ 次.

设方案二中每组的化验次数为 η , 则 η 的取值为 1, 9

$$P(\eta=1)=0.997^8=0.976, P(\eta=9)=1-0.997^8=0.0238,$$

∴ η 的分布列为:

η	1	2
p	0.976	0.024

$$\therefore E(\eta)=1 \times 0.976 + 9 \times 0.024 = 1.192.$$

∴ 方案二的化验总次数的期望为 $250 \times E(\eta) = 250 \times 1.192 = 298$ 次. ∵ $260 < 298$,

∴ 方案一工作量更少. 故选择方案一.

(2) 设事件 A : 核酸检测呈阳性, 事件 B : 被感染,

则由题意得 $P(A)=0.003, P(B)=0.0029, P(A|B)=0.999$,

由条件概率公式 $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$ 可得 $P(AB)=P(B)P(A|B)=0.0029 \times 0.999$,

∴ 该人被感染的概率为 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{0.0029 \times 0.999}{0.003}=0.9657$.

【方法技巧与总结】

用定义法求条件概率 $P(B|A)$ 的步骤

- (1) 分析题意, 弄清概率模型;
- (2) 计算 $P(A), P(A|B)$;
- (3) 代入公式求 $P(B|A)=\frac{P(A|B)}{P(A)}$.

题型二: 相互独立事件的判断

例 4. (2023·山东·潍坊七中高三阶段练习) 已知 A, B 是一次随机试验中的两个事件, 若满足 $P(A)=P(B)=\frac{2}{3}$, 则 ()

- A. 事件 A, B 互斥
B. 事件 A, B 相互独立
C. 事件 A, B 不互斥
D. 事件 A, B 不相互独立

答案: C

【解析】若事件 A, B 互斥, 则 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{4}{3} > 1$, 与事件的概率小于等于 1 矛盾, 故事件 A, B 不互斥;

若事件 A, B 相互独立, 则 $P(AB) = P(A)P(B)$, 而题设无法判断 $P(AB) = P(A)P(B)$ 是否成立, 故无法判断事件 A, B 是否相互独立.

故选: C.

例 5. (2023·湖北·荆州中学高三阶段练习) 已知 A, B 为两个随机事件, $P(A), P(B) > 0$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。
如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/265100344121011214>