青海省西宁市第二十一中学 2024 年高三下学期联考数学试题

考生须知：

1．全卷分选择题和非选择题两部分，全部在答题纸上作答。选择题必须用 2B 铅笔填涂；非选择题的答案必须用黑色字迹的钢笔或答字笔写在“答题纸”相应位置上。

2．请用黑色字迹的钢笔或答字笔在“答题纸”上先填写姓名和准考证号。

3．保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破、弄皱，在草稿纸、试题卷上答题无效。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．已知 $\omega > \frac{1}{3}$，函数 $f(x)=\sin\left(2\omega x-\frac{\pi}{3}\right)$ 在区间 $(\pi,2\pi)$ 内没有最值，给出下列四个结论：

① $f(x)$ 在 $(\pi,2\pi)$ 上单调递增；

② $\omega\in\left[\frac{5}{12},\frac{11}{24}\right]$

③ $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上没有零点；

④ $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上只有一个零点.

其中所有正确结论的编号是（　　）

A. ②④　　　　**B.** ①③　　　　**C.** ②③　　　　**D.** ①②④

2．已知 $\vec{a}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$\vec{b}=\left(\cos(-\alpha),\sin(-\alpha)\right)$，那么 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ 是 $\alpha=k\pi+\frac{\pi}{4}(k\in Z)$ 的（　　）

A. 充分不必要条件　　　　**B.** 必要不充分条件

C. 充要条件　　　　**D.** 既不充分也不必要条件

3．下列说法正确的是（　　）

A. 命题“$\exists x_0\le 0$，$2x_0\le\sin x_0$”的否定形式是“$\forall x>0$，$2x>\sin x$”

B. 若平面 α，β，γ，满足 $\alpha\perp\gamma$，$\beta\perp\gamma$ 则 $\alpha//\beta$

C. 随机变量 ξ 服从正态分布 $N\left(1,\sigma^2\right)$（$\sigma>0$），若 $P(0<\xi<1)=0.4$，则 $P(\xi>0)=0.8$

D. 设 x 是实数，“$x<0$”是“$\frac{1}{x}<1$”的充分不必要条件

4．“$\alpha\ne\beta$”是 $cos\alpha\ne cos\beta$”的（　）

A. 充分不必要条件　　　　**B.** 必要不充分条件

C. 充要条件　　　　**D.** 既不充分也不必要条件

5．抛物线□: □^{2} = 2□□的焦点□是双曲线$□_2: \frac{□^2}{□} - \frac{□^2}{1-□} = 1(0 < □ < 1)$的右焦点，点□是曲线$□_1$, $□_2$的交点，点□在抛物线的准线上，□□□□是以点□为直角顶点的等腰直角三角形，则双曲线$□_2$的离心率为（　　）

A．$\sqrt{2}+1$　　B．$2\sqrt{2}+3$　　C．$2\sqrt{10}-3$　　D．$2\sqrt{10}+3$

6．在边长为 **1** 的等边三角形 ABC 中，点 ***E*** 是 AC 中点，点 ***F*** 是 BE 中点，则 $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{AB}=$（　　）

A．$\frac{5}{4}$　　B．$\frac{3}{4}$　　C．$\frac{5}{8}$　　D．$\frac{3}{8}$

7．圆锥底面半径为$\sqrt{5}$，高为2，SA是一条母线，P 点是底面圆周上一点，则 P 点到 SA所在直线的距离的最大值是（　　）

A．$\frac{2\sqrt{5}}{3}$　　B．$\frac{4\sqrt{5}}{3}$　　C．3　　D．4

8．已知向量$\vec{m}=\left(2\cos^2x,\sqrt{3}\right)$，$\vec{n}=\left(1,\sin2x\right)$，设函数$f\left(x\right)=\vec{m}\cdot\vec{n}$，则下列关于函数$y=f\left(x\right)$的性质的描述正确的是(　　)

A．关于直线$x=\frac{\pi}{12}$对称　　B．关于点$\left(\frac{5\pi}{12},0\right)$对称

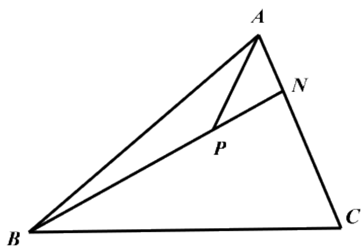
C．周期为2π　　D．$y=f\left(x\right)$在$\left(-\frac{\pi}{3},0\right)$上是增函数

9．设$a,b\in R,i$是虚数单位，则“复数$z=a+bi$为纯虚数”是“$ab=0$”的（　　）

A．充要条件　　B．必要不充分条件

C．既不充分也不必要条件　　D．充分不必要条件

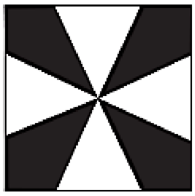
10．如图，在ΔABC中，$\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，$P$是$BN$上的一点，若$m\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AP}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$，则实数$m$的值为（　　）



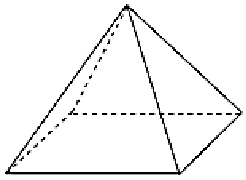
A．$\frac{1}{3}$　　B．$\frac{1}{9}$　　C．1　　D．2

11．将一块边长为$a$cm

的正方形薄铁皮按如图（1）所示的阴影部分裁下，然后用余下的四个全等的等腰三角形加工成一个正四棱锥形容器，将该容器按如图（2）放置，若其正视图为等腰直角三角形，且该容器的容积为$72\sqrt{2}\text{cm}^3$，则a的值为（　　）



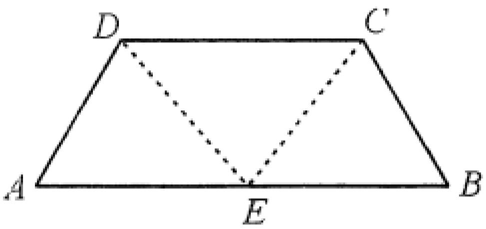
（1）



（2）

A．6　　　　**B．8**　　　　**C．10**　　　　**D．12**

12．如图，在等腰梯形$ABCD$中，$AB//DC$，$AB=2DC=2AD=2$，$\angle DAB=60°$，E为AB的中点，将ΔADE与ΔBEC分别沿ED、EC向上折起，使A、B重合为点F，则三棱锥$F-DCE$的外接球的体积是（　　）



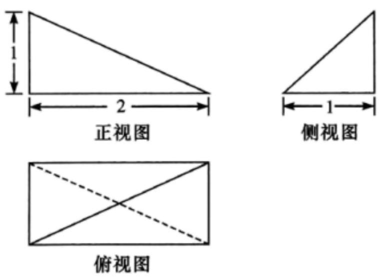
A．$\dfrac{\sqrt{6}}{8}\pi$　　　　B．$\dfrac{\sqrt{6}}{4}\pi$

C．$\dfrac{3}{2}\pi$　　　　D．$\dfrac{2}{3}\pi$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．$x^{-3}(x+2)^6$的展开式中的常数项为______.

14．已知某几何体的三视图如图所示，则该几何体外接球的表面积是______.



15．给出以下式子：

①**tan25°+tan35°**$+\sqrt{3}$ **tan25°tan35°**；

②**2(sin35°cos25°+cos35°cos65°)**；

③$\dfrac{1+tan15°}{1-tan15°}$

其中，结果为$\sqrt{3}$的式子的序号是_____.

16．$\left(2x^2+\frac{1}{x}\right)^6$的展开式中，常数项为______；系数最大的项是______.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（12 分）在平面直角坐标系xOy中，直线l的参数方程为$\begin{cases}x=1-\frac{\sqrt{3}}{2}t\\ y=\frac{1}{2}t\end{cases}$（$t$为参数），曲线$C$的极坐标方程为$\rho=4\cos\theta$.

（Ⅰ）求直线l的普通方程及曲线C的直角坐标方程；

（Ⅱ）设点$P(1,0)$，直线l与曲线C相交于A，B，求$\frac{1}{|PA|}+\frac{1}{|PB|}$的值.

18.（12 分）在极坐标系Ox中，曲线C的极坐标方程为$\frac{\rho^2}{\sqrt{2}-\rho\sin\theta}=\sqrt{2}+\rho\sin\theta$，直线$l$的极坐标方程为$\rho(\cos\theta-\sin\theta)=1$，设$l$与$C$交于$A$、$B$两点，$AB$中点为$M$，$AB$的垂直平分线交$C$于$E$、$F$.以$O$为坐标原点，极轴为$x$轴的正半轴建立直角坐标系$xOy$.

（1）求C的直角坐标方程与点M的直角坐标；

（2）求证：$|MA|\cdot|MB|=|ME|\cdot|MF|$.

19.（12 分）已知函数$f(x)=\frac{a}{2}x^2+\cos x$（$a\in\mathbf{R}$），$f'(x)$是$f(x)$的导数.

（1）当$a=1$时，令$h(x)=f'(x)-x+\ln x$，$h'(x)$为$h(x)$的导数.证明：$h'(x)$在区间$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$存在唯一的极小值点；

（2）已知函数$y=f(2x)-\frac{2}{3}x^4$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上单调递减，求$a$的取值范围.

20.（12 分）设数列$\{a_n\}$，其前n项和$S_n=-3n^2$，又$\{b_n\}$单调递增的等比数列，$b_1b_2b_3=512$，$a_1+b_1=a_3+b_3$.

(Ⅰ)求数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式；

(Ⅱ)若$c_n=\frac{b_n}{(b_n-2)(b_n-1)}$，求数列$\{c_n\}$的前 n 项和$T_n$，并求证：$\frac{2}{3}\le T_n<1$.

21.（12 分）已知函数$f(x)=\log_{\frac{1}{4}}(2mx^2-3x+8m)$.

（Ⅰ）当$m=1$时，求函数$f(x)$在$[\frac{1}{2},2]$上的值域；

（Ⅱ）若函数$f(x)$在$(4,+\infty)$上单调递减，求实数m的取值范围.

22．（10 分）在直角坐标平面中，已知ΔABC的顶点$A(-2,0)$，$B(2,0)$，C为平面内的动点，且

$\sin A\sin B+3\cos C=0$．

（1）求动点C的轨迹Q的方程；

（2）设过点$F(1,0)$且不垂直于x轴的直线l与Q交于P，R两点，点P关于x轴的对称点为S，证明：直线RS过x轴上的定点．

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、A

【解析】

先根据函数$f(x)=\sin\left(2\omega x-\dfrac{\pi}{3}\right)$在区间$(\pi,2\pi)$内没有最值求出$k-\dfrac{1}{12}\leqslant\omega\leqslant\dfrac{k}{2}+\dfrac{5}{24}$或$k+\dfrac{5}{12}\leqslant\omega\leqslant\dfrac{k}{2}+\dfrac{11}{24}$.再根据已知求出$\dfrac{1}{3}<\omega\leqslant\dfrac{1}{2}$，判断函数的单调性和零点情况得解.

【详解】

因为函数$f(x)=\sin\left(2\omega x-\dfrac{\pi}{3}\right)$在区间$(\pi,2\pi)$内没有最值.

所以$2k\pi-\dfrac{\pi}{2}\leqslant 2\omega\pi-\dfrac{\pi}{3}<4\omega\pi-\dfrac{\pi}{3}\leqslant 2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，或$2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\leqslant 2\omega\pi-\dfrac{\pi}{3}<4\omega\pi-\dfrac{\pi}{3}\leqslant 2k\pi+\dfrac{3\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$

解得$k-\dfrac{1}{12}\leqslant\omega\leqslant\dfrac{k}{2}+\dfrac{5}{24}$或$k+\dfrac{5}{12}\leqslant\omega\leqslant\dfrac{k}{2}+\dfrac{11}{24}$.

又$T=\dfrac{2\pi}{2\omega}\geqslant 2\pi,\omega>\dfrac{1}{3}$，所以$\dfrac{1}{3}<\omega\leqslant\dfrac{1}{2}$.

令$k=0$.可得$\omega\in\left[\dfrac{5}{12},\dfrac{11}{24}\right]$.且$f(x)$在$(\pi,2\pi)$上单调递减.

当$x\in[0,\pi]$时，$2\omega x-\dfrac{\pi}{3}\in\left[-\dfrac{\pi}{3},2\pi\omega-\dfrac{\pi}{3}\right]$，且$2\pi\omega-\dfrac{\pi}{3}\in\left[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{7\pi}{12}\right]$，

所以$f(x)$在$[0,\pi]$上只有一个零点.

所以正确结论的编号②④

故选：A.

【点睛】

本题主要考查三角函数的图象和性质，考查函数的零点问题，意在考查学生对这些知识的理解掌握水平.

2、B

【解析】

由$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，可得$\cos 2\alpha=0$，解出即可判断出结论.

【详解】

解：因为$\vec{a}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$\vec{b}=\left(\cos(-\alpha),\sin(-\alpha)\right)$且$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$\therefore \cos\alpha\cdot\cos(-\alpha)+\sin\alpha\cdot\sin(-\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos 2\alpha=0$.

$\therefore 2\alpha=2k\pi\pm\frac{\pi}{2}$，解得$\alpha=k\pi\pm\frac{\pi}{4}(k\in Z)$.

$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=0$是$\alpha=k\pi+\frac{\pi}{4}(k\in Z)$的必要不充分条件.

故选：B.

【点睛】

本题考查了向量数量积运算性质、三角函数求值、简易逻辑的判定方法，考查了推理能力与计算能力，属于基础题.

3、D

【解析】

由特称命题的否定是全称命题可判断选项 A；α,β可能相交，可判断 B 选项；利用正态分布的性质可判断选项 C；$\frac{1}{x}<1\Rightarrow x<0$或$x>1$，利用集合间的包含关系可判断选项 D.

【详解】

命题“$\exists x_0\le 0$，$2x_0\le\sin x_0$”的否定形式是“$\forall x\le 0$，$2x>\sin x$”，故 A 错误；$\alpha\perp\gamma$，$\beta\perp\gamma$，则α,β可能相交，故 B 错误；若$P(0<\xi<1)=0.4$，则$P(1<\xi<2)=0.4$，所以$P(\xi<0)=\frac{1-0.4-0.4}{2}=0.1$，故$P(\xi>0)=0.9$，所以 C 错误；由$\frac{1}{x}<1$，得$x<0$或$x>1$，故“$x<0$”是“$\frac{1}{x}<1$”的充分不必要条件，D 正确.

故选：D.

【点睛】

本题考查命题的真假判断，涉及到特称命题的否定、面面相关的命题、正态分布、充分条件与必要条件等，是一道容易题.

4、B

【解析】

分别判断充分性和必要性得到答案.

【详解】

$\alpha=\beta \Rightarrow cos\alpha=cos\beta$ 所以 $cos\alpha \neq cos\beta \Rightarrow \alpha \neq \beta$ （逆否命题）必要性成立

当 $\alpha=-\beta \Rightarrow cos\alpha=cos\beta$，不充分

故是必要不充分条件，答案选 B

【点睛】

本题考查了充分必要条件，属于简单题.

5、A

【解析】

先由题和抛物线的性质求得点 P 的坐标和双曲线的半焦距 c 的值，再利用双曲线的定义可求得 a 的值，即可求得离心率.

【详解】

由题意知，抛物线焦点□$(1,0)$，准线与 x 轴交点□$'(-1,0)$，双曲线半焦距□ $=1$，设点□$(-1,$□$)$ □□□□是以点□为直角顶点的等腰直角三角形，即$|$□□$|=|$□□$|$，结合□点在抛物线上，

所以□□ $\perp$抛物线的准线，从而□□ $\perp$ □轴，所以□$(1,2)$，

$\therefore 2$□ $=|$□□$'|-|$□□$|=2\sqrt{2}-2$

即□ $=\sqrt{2}-1$.

故双曲线的离心率为□ $=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$.

故选 A

【点睛】

本题考查了圆锥曲线综合，分析题目，画出图像，熟悉抛物线性质以及双曲线的定义是解题的关键，属于中档题.

6、C

【解析】

根据平面向量基本定理，用 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ 来表示 $\overrightarrow{AF}$，然后利用数量积公式，简单计算，可得结果.

【详解】

由题可知：点 E 是 AC 中点，点 F 是 BE 中点

$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}\right)$，$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

所以 $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

又 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos\angle A=1\times1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

所以 $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AB}$

则 $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{5}{8}$

故选：C

【点睛】

本题考查平面向量基本定理以及数量积公式，掌握公式，细心观察，属基础题.

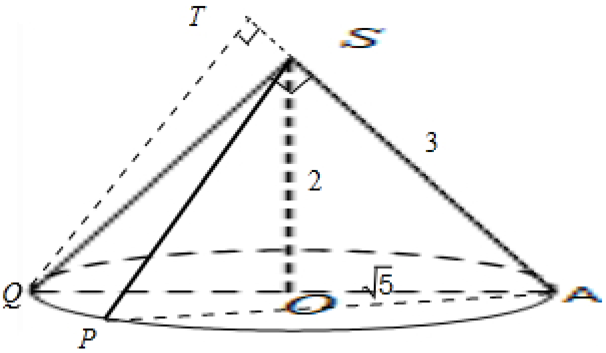
7、C

【解析】

分析：作出图形，判断轴截面的三角形的形状，然后转化求解 P 的位置，推出结果即可.

详解：圆锥底面半径为 $\sqrt{5}$，高为 2，SA 是一条母线，P 点是底面圆周上一点，P 在底面的射影为 O；

$SA=\sqrt{5+4}=3$，$OA>SO$，过 SA 的轴截面如图：



$\angle ASQ>90^\circ$，过 Q 作 $QT\perp SA$ 于 T，则 $QT<QS$，在底面圆周，选择 P，使得 $\angle PSA=90^\circ$，则 P 到 SA 的距离的最大值为 3，故选：C

点睛：本题考查空间点线面距离的求法，考查空间想象能力以及计算能力，解题的关键是作出轴截面图形，属中档题.

8、D

【解析】

$f\left(x\right)=2\cos^2 x+\sqrt{3}\sin 2x=\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x+1=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})+1$，当 $x=\frac{\pi}{12}$ 时，$\sin(2x+\frac{\pi}{6})=\sin\frac{\pi}{3}\neq\pm1$，∴$f(x$

)不关于直线 $x=\frac{\pi}{12}$ 对称；

当 $x=\frac{5\pi}{12}$ 时, $2\sin(2x+\frac{\pi}{6})+1=1$,∴$f(x)$关于点 $(\frac{5\pi}{12},1)$ 对称；

$f(x)$得周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$ ，

当 $x\in(-\frac{\pi}{3},0)$ 时, $2x+\frac{\pi}{6}\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6})$,∴$f(x)$在 $(-\frac{\pi}{3},0)$ 上是增函数.

本题选择 **D** 选项.

9、**D**

【解析】

结合纯虚数的概念，可得 $a=0,b\neq 0$，再结合充分条件和必要条件的定义即可判定选项.

【详解】

若复数 $z=a+bi$ 为纯虚数，则 $a=0,b\neq 0$，所以 $ab=0$，若 $ab=0$，不妨设 $a=1,b=0$，此时复数 $z=a+bi=1$，不是纯虚数，所以“复数 $z=a+bi$ 为纯虚数”是“ $ab=0$ ”的充分不必要条件.

故选：**D**

【点睛】

本题考查充分条件和必要条件，考查了纯虚数的概念，理解充分必要条件的逻辑关系是解题的关键，属于基础题.

10、**B**

【解析】

$m\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AP}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ 变形为 $\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$，由 $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ 得 $\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AN}$，转化在$\triangle ABN$ 中，利用 B、P、N 三点共线可得.

【详解】

解：依题： $\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}=3m\overrightarrow{AN}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$，

又 B，P，N 三点共线，

$\therefore 3m+\frac{2}{3}=1$，解得 $m=\frac{1}{9}$.

故选： B .

【点睛】

本题考查平面向量基本定理及用向量共线定理求参数.

思路是(1)先选择一组基底，并运用该基底将条件和结论表示成向量的形式，再通过向量的运算来解决.利用向量共线定理及向量相等的条件列方程(组)求参数的值. (2)直线的向量式参数方程：A、P、B 三点共线⇔ $\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ (O为平面内任一点,$t\in R$)

11、D

【解析】

推导出$PM+PN=a$，且$PM=PN$，$MN=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$，$PM=\dfrac{a}{2}$，设MN中点为O，则$PO\perp$平面$ABCD$，由此能表示出该容器的体积，从而求出参数的值.

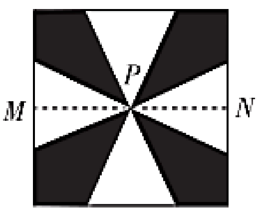
【详解】

解：如图（4），ΔPMN为该四棱锥的正视图，由图（3）可知，$PM+PN=a$，且$PM=PN=\dfrac{a}{2}$，由ΔPMN为等腰直角三角形可知，

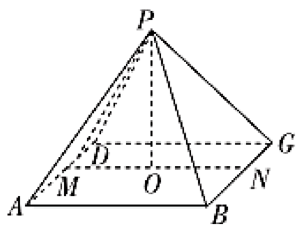
$MN=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$，设MN中点为O，则$PO\perp$平面$ABCD$，$\therefore PO=\dfrac{1}{2}MN=\dfrac{\sqrt{2}}{4}a$，

$\therefore V_{P-ABCD}=\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2\times\dfrac{\sqrt{2}}{4}a=\dfrac{\sqrt{2}}{24}a^3=72\sqrt{2}$，解得$a=12$.

故选：*D*



(3)



(4)

【点睛】

本题考查三视图和锥体的体积计算公式的应用，属于中档题.

12、A

【解析】

由题意等腰梯形中的三个三角形都是等边三角形，折叠成的三棱锥是正四面体，易求得其外接球半径，得球体积.

【详解】

由题意等腰梯形中$DA=AE=EB=BC=CD$，又$\angle DAB=60°$，$\therefore\Delta AED$，ΔBCE是靠边三角形，从而可得 $DE=CE=CD$，∴折叠后三棱锥$F-DEC$是棱长为1的正四面体，

设M是ΔDCE的中心，则$FM\perp$平面DCE，$DM=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times 1=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$FM=\sqrt{FD^2-DM^2}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，