第十三章　函数列与函数项级数

一、点态收敛的概念

二、一致收敛性及其鉴别法

三、一致收敛的函数列与函数项级数的性质

§1 一致收敛性

一、函数列与函数项级数

二、函数列一致收敛性

三、函数项级数一致收敛性

一、函数列与函数项级数的的概念

收敛数列(数项级数)可表达、定义一种数;

试用函数列、函数项级数来表达、定义一种函数。

1. 函数列的定义:

(1) 定义1　设函数$f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x), \cdots$ 是定义在同一个数集E上,则称其为E上的函数列

记为: $\{f_n(x)\}$或$f_n(x), n=1,2,\cdots$

特别地取定$x=x_0$,则函数列$\{f_n(x)\}$为一个数列$\{f_n(x_0)\}$.

(2) 定义2　若数列$\{f_n(x_0)\}$收敛,则称$\{f_n(x)\}$在x_0点收敛,也称x_0为$\{f_n(x)\}$的收敛点

若数列$\{f_n(x_0)\}$发散,则称$\{f_n(x)\}$在x_0点发散

若数列$\{f_n(x)\}$在D上的每一点均收敛,

则称$\{f_n(x)\}$在D上收敛.

上页　下页　返回

(3) 定义3 若$\{f_n(x)\}$在D上收敛,则可确定一个新的函数$f(x),\forall x\in D$.则称$f(x)$为函数列$\{f_n(x)\}$的极限函数

记为: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x), x\in D$或$x\in D, f_n(x)\to f(x), n\to\infty$

即$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)\Leftrightarrow$ "$\varepsilon-N$"定义

$\forall x\in D,\forall\varepsilon>0,\exists N_{(\varepsilon,x)}\in\mathbb{N}$,当$n>N$有$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$

(4) 定义4

函数列$\{f_n(x)\}$收敛点的全体集合称为$\{f_n(x)\}$的收敛域

例1 试求下列函数列的收敛域与极限函数

(1) $f_n(x)=x^n, n=1,2,\cdots \quad x\in(-\infty,+\infty)$

解 显然 $|x|<1$时, $\lim\limits_{n\to\infty} x^n=0$

$|x|>1$时, $\lim\limits_{n\to\infty} x^n$不存在,

$x=1$时, $\lim\limits_{n\to\infty} x^n=1$

$x=-1$时, $\lim\limits_{n\to\infty} x^n$不存在,

$\{x^n\}$收敛域为$(-1,1]$

极限函数

$$f(x)=\begin{cases}0, & |x|<1\\ 1, & x=1\end{cases}$$

上页 下页 返回

(2) $f_n(x)=\dfrac{\sin nx}{n}, n=1,2,\cdots \quad x\in(-\infty,+\infty)$

解 显然 $|f_n(x)|=\left|\dfrac{\sin nx}{n}\right|<\dfrac{1}{n}$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin nx}{n}=0 \qquad \{\frac{\sin nx}{n}\}\text{收敛域为}(-\infty,+\infty)$$

极限函数 $f(x)=0, x\in(-\infty,+\infty)$

问题：(1) 函数列$\{f_n(x)\}$收敛域的判别;

(2) 极限函数$f(x)$的分析性质(连续、可积、可导)

是不是全部的连续函数列的极限函数在其收敛域上也连续。

即$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\overset{?}{=} f(x_0)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0)$ 结论是：不一定

如：$\lim\limits_{n\to\infty} x^n = f(x)=\begin{cases}0, |x|<1\\ 1, \ x=1\end{cases}$ $f(x)$在$x=1$处不连续

所以，保持连续性只有收敛的条件是不够的。

2. 函数项级数的概念

(1) 定义5　设E上的函数列$\{u_n(x)\}$,

对其各项依次用"+"连接起来的体现式

记为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$

称为E上的函数项无穷级数或简称为级数。

同步称

$$s_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) = \sum_{i=1}^{n} u_i(x)$$ 部分和.

部分和实际是一种函数列.

尤其地, $\forall x_0 \in E$, 函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$实际为一个数项级数

(2) 定义6

当$x_0 \in E$, 级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$收敛,则称$x_0$为$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$收敛点

即 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} u_i(x_0)$存在

当$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$发散,则称$x_0$为$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$发散点

(3) 定义7 若级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$D$上收敛,则可确定一个新的

函数$s(x), \forall x\in D$. 则称$s(x)$为函数列$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的和函数

记为: $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=s(x), x\in D$

即$\lim_{n\to\infty}s_n(x)=s(x)\Leftrightarrow$ "$\varepsilon-N$"定义

$\forall x\in D, \forall\varepsilon>0, \exists N_{(\varepsilon,x)}\in\mathbb{N}$,当$n>N$有$|s_n(x)-s(x)|<\varepsilon$

若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$收敛与$s(x), x\in D$

余项 $R_n(x)=s(x)-s_n(x)=\sum_{i=1}^{\infty}u_{n+i}(x)$

(4) 定义8

级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$收敛点的全体集合称为$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的收敛域

$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的收敛域本质上是$\{s_n(x)\}$的收敛域

可经过部分和函数列讨论级数的收敛域与和函数.

例2 试求下列级数的收敛域与和函数

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n,\ x\in(-\infty,+\infty)$

解 $s_n(x)=\sum_{k=1}^{n} x^k=\dfrac{x(1-x^n)}{1-x}\quad \forall x\in(-\infty,+\infty)$

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x(1-x^n)}{1-x}=\begin{cases}\dfrac{x}{1-x}, & |x|<1\\ 发散, & |x|\ge 1\end{cases}$$

在$(-1,1)$内$\sum_{n=1}^{\infty} x^n$收敛于$\dfrac{x}{1-x}$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)=x+(x^2-x)+\cdots+(x^n-x^{n-1})+\cdots,\ x\in(-\infty,+\infty)$

解 $s_n(x)=x^n\quad \forall x\in(-\infty,+\infty)$

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x)=\lim_{n\to\infty} x^n=\begin{cases}0, & |x|<1\\ 1, & x=1\end{cases}$$

收敛域 $(-1,1]$

和函数 $f(x)=\begin{cases}0, & |x|<1\\ 1, & x=1\end{cases}$

问题：(1) 函数项级数的收敛域与和函数；
(2) 和函数的分析性质。

对有限个连续、可积、可导函数的和仍相应是连续、可积、可导,有很好的运算法则.

对无限个连续、可积、可导函数的和仍相应是连续、可积、可导？

由上例(2)知

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = x + (x^2 - x) + \cdots + (x^n - x^{n-1}) + \cdots = f(x) = \begin{cases} 0, & |x| < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

$f(x) = \begin{cases} 0, & |x| < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$ 在其收敛域上不连续

进一步讨论和函数的性质只在收敛条件下进行不够。

又如：若$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$的部分和$\{s_n(x)=2n^2xe^{-n^2x^2}\}, x\in(0,1]$

$s(x)=0, x\in(0,1]$ 连续可积

由于 $\int_0^1 \sum_{k=1}^{n} u_k(x)dx=\sum_{k=1}^{n}[\int_0^1 u_k(x)dx]$

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)dx=\int_0^1[\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} u_k(x)]dx=\int_0^1[\lim_{n\to\infty} s_n(x)]dx$$

$$=\int_0^1 s(x)dx=0.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}[\int_0^1 u_n(x)dx]=\lim_{n\to\infty}\int_0^1\sum_{k=1}^{n} u_k(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}[\int_0^1 u_k(x)dx]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 s_n(x)dx=\lim_{n\to\infty}(1-e^{n^{-n^2}})=1$$

$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)dx\neq\sum_{n=1}^{\infty}[\int_0^1 u_n(x)dx]$ 为此引进一致收敛的概念

结论：虽然和函数可积，求和函数的积分时也不能先对每个函数积分后，再和.

上页 下页 返回

二、函数列的一致收敛

回忆：

函数$f(x)$在数集E上连续 $\Leftrightarrow \forall x\in E, f(x)$在$x$处连续

$\Leftrightarrow \forall x\in E, \forall \varepsilon>0, \exists \delta_{(x,\varepsilon)}>0,$ 当$x'\in U(x,\delta)$有$|f(x')-f(x)|<\varepsilon$

函数$f(x)$在数集E上一致连续

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists \delta_{(\varepsilon)}>0, \forall x', x''\in E,$ 当$|x'-x''|<\delta$时，

有$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x) \Leftrightarrow$

$\forall x\in D, \forall \varepsilon>0, \exists N_{(\varepsilon,x)}\in \mathbf{N},$ 当$n>N$有$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$

1 定义9 设D上函数列$\{f_n(x)\}, f(x)$,满足

$\forall \varepsilon>0, \exists N_{(\varepsilon)}\in \mathbf{N},$ 当$n>N, \forall x\in D,$ 有$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$

则称函数列$\{f_n(x)\}$在D上一致收敛于$f(x)$

记为: $f_n(x) \rightrightarrows f(x), (n\to\infty), x\in D$

命题:(1) 若$f_n(x) \rightrightarrows f(x),(n\to\infty), x\in D$

则 $f_n(x)\to f(x),(n\to\infty), x\in D$

由定义显然可得.

(2) 反之不真. 即 若$f_n(x)\to f(x),(n\to\infty), x\in D$

$f_n(x)$在D上不一定一致收敛于$f(x),(n\to\infty)$.

$f_n(x)$在D上不一致收敛于$f(x),(n\to\infty)$.

$$f_n(x) \not\rightrightarrows f(x),(n\to\infty), x\in D$$

$\Leftrightarrow \exists \varepsilon_0>0, \forall N\in \mathbf{N}, \exists n_0>N, \exists x_0\in D,$有$|f_{n_0}(x_0)-f(x_0)|\ge \varepsilon_0$

例3 判断下列函数列在给定的区间上的一致收敛性

(1) $f_n(x)=\dfrac{\sin nx}{n}, n=1,2,\cdots \quad x\in(-\infty,+\infty)$ $\quad \forall \varepsilon>0.$ 取$N=[\dfrac{1}{\varepsilon}]$即可.

解 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)=0, x\in(-\infty,+\infty)$

$$|f_n(x)-f(x)|=\left|\frac{\sin nx}{n}\right|<\frac{1}{n}, \forall n\in \mathbf{N},$$

$$\frac{\sin nx}{n} \rightrightarrows 0, x\in R$$

(2) $f_n(x)=x^n, n=1,2,\cdots \quad x\in(-1,1]$

解 由前知 $f_n(x)\to f(x)=\begin{cases}0,|x|<1\\1,\ x=1\end{cases}, x\in(-1,1]$

当$x\neq 0$时,$|f_n(x)-f(x)|=|x|^n$

故对$\forall n_0>2, n_0\in \mathrm{N}, x_0=(1-\dfrac{1}{n_0})^{\frac{1}{n_0}}\neq 0$

$$|f_{n_0}(x_0)-f(x_0)|=|x_0|^{n_0}=(1-\frac{1}{n_0})>\frac{1}{2}$$

即$\exists\varepsilon_0=\dfrac{1}{2}, \forall N\in\mathrm{N}$,取$n_0>\max\{2,N\}, x_0=(1-\dfrac{1}{n_0})^{\frac{1}{n_0}}$,

有$\left|f_{n_0}(x_0)-f(x_0)\right|\geq\varepsilon_0$

从而 $f_n(x) \not\rightrightarrows f(x)=\begin{cases}0,|x|<1\\1,\ x=1\end{cases}, x\in(-1,1]$

$f_n(x)\ \not\rightrightarrows\ f(x),(n\to\infty), x\in D$

$\Leftrightarrow\exists\varepsilon_0>0,\forall N\in\mathrm{N},\exists n_0>N,\exists x_0\in D$,有$\left|f_{n_0}(x_0)-f(x_0)\right|\geq\varepsilon_0$

2. 几何意义

函数列$\{f_n(x)\}$在D上一致收敛于$f(x)$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists N(\varepsilon)\in \mathbf{N}$,当$n>N, \forall x\in D$,有$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$

即给定$\varepsilon>0$,当项数充分大$n>N$

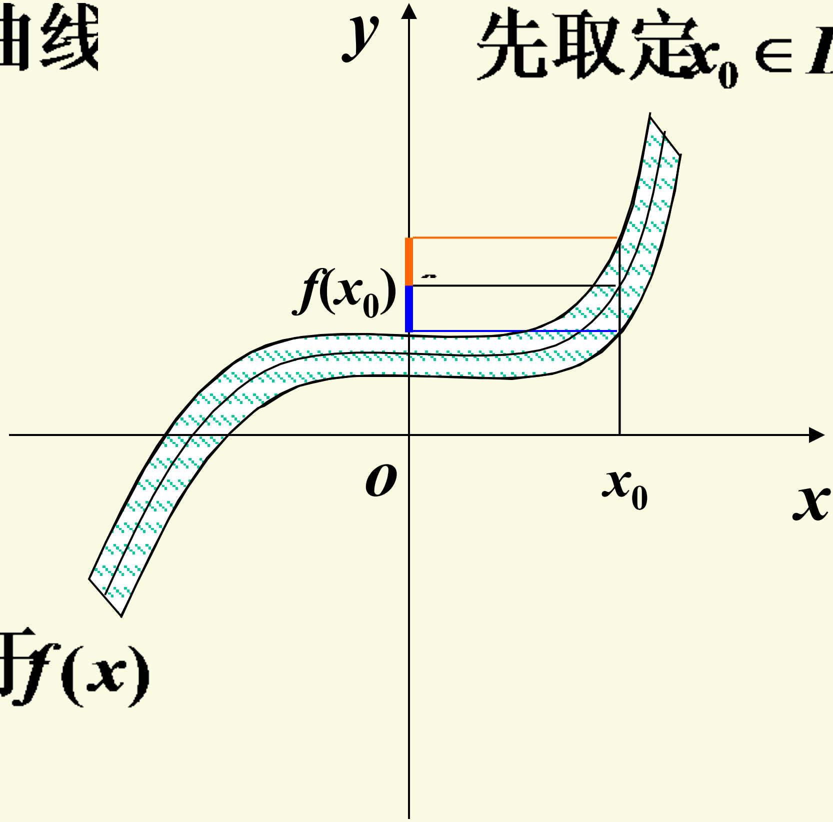
函数列$\{f_n(x)\}$的每一条曲线

先取定$x_0\in D$

$y=f_n(x)$将位于以极限

函数$f(x)$为中心的宽为2ε的

带形区域内



函数列$\{f_n(x)\}$在D上收敛于$f(x)$

的几何意义呢?