

# 湖南省湘潭市第一中学 2024 年高三 3 月份第一次模拟考试数学试卷

## 注意事项

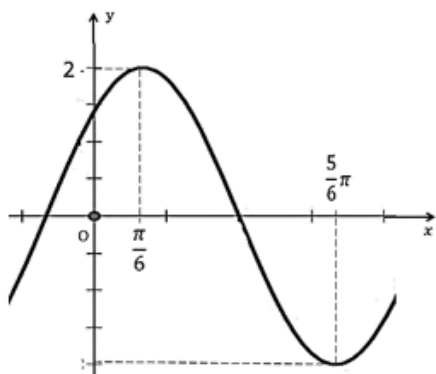
1. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。
2. 答题前，请务必将自己的姓名、准考证号用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔填写在试卷及答题卡的规定位置。
3. 请认真核对监考员在答题卡上所粘贴的条形码上的姓名、准考证号与本人是否相符。
4. 作答选择题，必须用 2B 铅笔将答题卡上对应选项的方框涂满、涂黑；如需改动，请用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。作答非选择题，必须用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔在答题卡上的指定位置作答，在其他位置作答一律无效。
5. 如需作图，须用 2B 铅笔绘、写清楚，线条、符号等须加黑、加粗。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 函数  $y = f(x)$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) 在  $(-\infty, 1]$  上单调递减，且  $f(x+1)$  是偶函数，若  $f(2x-2) > f(2)$ ，则  $x$  的取值范围是 ( )

- A.  $(2, +\infty)$                       B.  $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$   
C.  $(1, 2)$                           D.  $(-\infty, 1)$

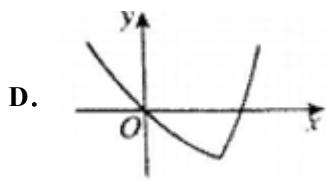
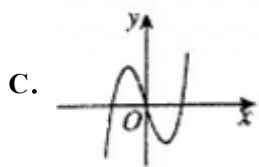
2. 已知  $f(x) = A \cos(\omega x + \varphi)$  ( $A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}, x \in \mathbb{R}$ ) 的部分图象如图所示，则  $f(x)$  的表达式是 ( )



- A.  $2 \cos\left(\frac{3}{2}x + \frac{\pi}{4}\right)$                       B.  $2 \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$   
C.  $2 \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$                       D.  $2 \cos\left(\frac{3}{2}x - \frac{\pi}{4}\right)$

3. 当  $a > 0$  时，函数  $f(x) = (x^2 - ax)e^x$  的图象大致是 ( )





4. 已知双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  的一条渐近线与直线  $3x - y + 5 = 0$  垂直, 则双曲线  $C$  的离心率等于( )

- A.  $\sqrt{2}$       B.  $\frac{\sqrt{10}}{3}$       C.  $\sqrt{10}$       D.  $2\sqrt{2}$

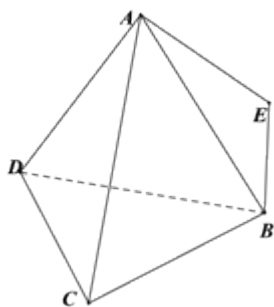
5. 已知  $\alpha \in (0, \pi)$ , 且  $\tan \alpha = 2$ , 则  $\cos 2\alpha + \cos \alpha =$  ( )

- A.  $\frac{2\sqrt{5}-3}{5}$       B.  $\frac{\sqrt{5}-3}{5}$       C.  $\frac{\sqrt{5}+3}{5}$       D.  $\frac{2\sqrt{5}+3}{5}$

6. 数列  $\{a_n\}$  满足  $a_n + a_{n+2} = 2a_{n+1}$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ), 且  $a_1 + a_2 + a_3 = 9$ ,  $a_4 = 8$ , 则  $a_5 =$  ( )

- A.  $\frac{21}{2}$       B. 9      C.  $\frac{17}{2}$       D. 7

7. 等腰直角三角形  $ABE$  的斜边  $AB$  为正四面体  $ABCD$  侧棱, 直角边  $AE$  绕斜边  $AB$  旋转, 则在旋转的过程中, 有下列说法:



- (1) 四面体  $E-BCD$  的体积有最大值和最小值;
- (2) 存在某个位置, 使得  $AE \perp BD$ ;
- (3) 设二面角  $D-AB-E$  的平面角为  $\theta$ , 则  $\theta \geq \angle DAE$ ;
- (4)  $AE$  的中点  $M$  与  $AB$  的中点  $N$  连线交平面  $BCD$  于点  $P$ , 则点  $P$  的轨迹为椭圆.

其中, 正确说法的个数是 ( )

- A. 1      B. 2      C. 3      D. 4

8. 已知平面向量  $\vec{a} = (4, 2)$ ,  $\vec{b} = (x, 3)$ ,  $\vec{a} \parallel \vec{b}$ , 则实数  $x$  的值等于 ( )

- A. 6      B. 1      C.  $\frac{3}{2}$       D.  $-\frac{3}{2}$

9. 若直线  $y = kx - 2$  与曲线  $y = 1 + 3 \ln x$  相切, 则  $k =$  ( )

- A. 3                      B.  $\frac{1}{3}$                       C. 2                      D.  $\frac{1}{2}$

10. 已知  $a, b$  是两条不同的直线,  $\alpha, \beta$  是两个不同的平面, 且  $a \subset \alpha, b \subset \beta, a // \beta, b // \alpha$ , 则“ $a // b$ ”是“ $\alpha // \beta$ ”的 ( )

- A. 充分不必要条件                      B. 必要不充分条件  
C. 充要条件                      D. 既不充分也不必要条件

11. 已知  $F$  为抛物线  $C: y^2 = 8x$  的焦点, 点  $A(1, m)$  在  $C$  上, 若直线  $AF$  与  $C$  的另一个交点为  $B$ , 则  $|AB| =$  ( )

- A. 12                      B. 10                      C. 9                      D. 8

12. 已知  $m$  为一条直线,  $\alpha, \beta$  为两个不同的平面, 则下列说法正确的是 ( )

- A. 若  $m // \alpha, \alpha // \beta$ , 则  $m // \beta$                       B. 若  $\alpha \perp \beta, m \perp \alpha$ , 则  $m \perp \beta$   
C. 若  $m // \alpha, \alpha \perp \beta$ , 则  $m \perp \beta$                       D. 若  $m \perp \alpha, \alpha // \beta$ , 则  $m \perp \beta$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 在一底面半径和高都是  $2m$  的圆柱形容器中盛满小麦, 有一粒带麦锈病的种子混入了其中. 现从中随机取出的  $2m^3$  种子, 则取出了带麦锈病种子的概率是\_\_\_\_\_.

14. 数学家狄里克雷对数论, 数学分析和数学物理有突出贡献, 是解析数论的创始人之一. 函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, x \text{ 为有理数} \\ 0, x \text{ 为无理数} \end{cases}, \text{ 称为狄里克雷函数. 则关于 } D(x) \text{ 有以下结论:}$$

- ①  $D(x)$  的值域为  $[0, 1]$ ;  
②  $\forall x \in R, D(-x) = D(x)$ ;  
③  $\forall T \in R, D(x+T) = D(x)$ ;  
④  $D(1) + D(\sqrt{2}) + D(\sqrt{3}) + \dots + D(\sqrt{2020}) = 45$ ;

其中正确的结论是\_\_\_\_\_ (写出所有正确的结论的序号)

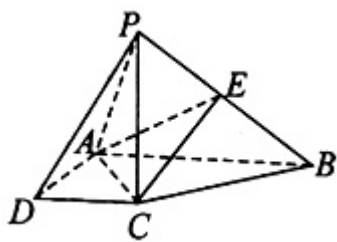
15. 已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ,  $a_1 = 1$ , 且满足  $S_n = a_{n+1}$ , 则数列  $\{S_n\}$  的前 10 项的和为\_\_\_\_\_.

16. 在  $\triangle ABC$  中, 已知  $B = 2A$ ,  $AC = \sqrt{3}BC$ , 则  $A$  的值是\_\_\_\_\_.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 如图, 在四棱锥  $P-ABCD$  中, 四边形  $ABCD$  是直角梯形,  $AB \perp AD, AB // CD, PC \perp$  底面  $ABCD$

$AB = 2AD = 2CD = 4, PC = 2a, E$  是  $PB$  的中点.



(1) 求证:平面  $EAC \perp$  平面  $PBC$ ;

(2) 若二面角  $P-AC-E$  的余弦值为  $\frac{\sqrt{6}}{3}$ , 求直线  $PA$  与平面  $EAC$  所成角的正弦值.

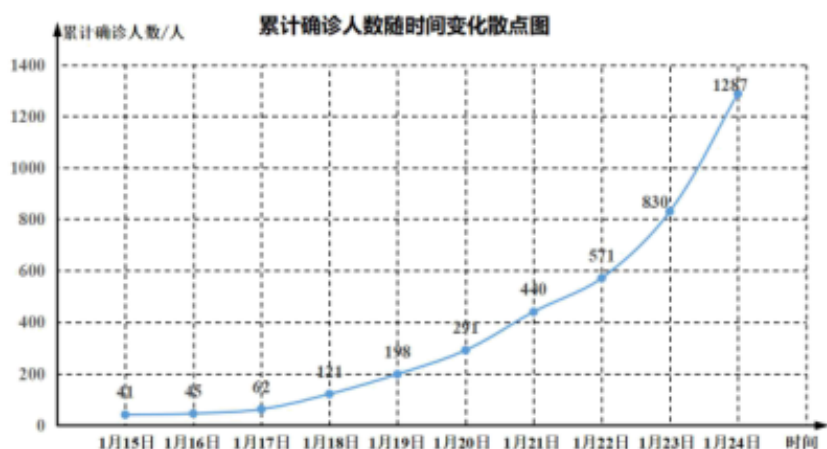
18. (12 分) 函数  $f(x) = ax - \ln(x+1)$ ,  $g(x) = \sin x$ , 且  $f(x) \leq 0$  恒成立.

(1) 求实数  $a$  的集合  $M$ ;

(2) 当  $a \in M$  时, 判断  $f(x)$  图象与  $g(x)$  图象的交点个数, 并证明.

(参考数据:  $\ln 2 \approx 0.69, e^{\frac{x}{2}-1} \approx 1.77$ )

19. (12 分) 2019 年 12 月以来, 湖北省武汉市持续开展流感及相关疾病监测, 发现多起病毒性肺炎病例, 均诊断为病毒性肺炎/肺部感染, 后被命名为新型冠状病毒肺炎 (*CoronaVirusDisease2019*, *COVID—19*), 简称“新冠肺炎”. 下图是 2020 年 1 月 15 日至 1 月 24 日累计确诊人数随时间变化的散点图.



为了预测在未采取强力措施下, 后期的累计确诊人数, 建立了累计确诊人数  $y$  与时间变量  $t$  的两个回归模型, 根据 1 月 15 日至 1 月 24 日的数据 (时间变量  $t$  的值依次 1, 2, ..., 10) 建立模型  $\hat{y} = c + dt$  和  $\hat{y} = a + b \cdot 1.5^t$ .

(1) 根据散点图判断,  $\hat{y} = c + dt$  与  $\hat{y} = a + b \cdot 1.5^t$  哪一个适宜作为累计确诊人数  $y$  与时间变量  $t$  的回归方程类型?

(给出判断即可, 不必说明理由)

(2 根据 (1) 的判断结果及附表中数据, 建立  $y$  关于  $x$  的回归方程;

(3) 以下是 1 月 25 日至 1 月 29 日累计确诊人数的真实数据, 根据 (2) 的结果回答下列问题:

| 时间 | 1 月 25 日 | 1 月 26 日 | 1 月 27 日 | 1 月 28 日 | 1 月 29 日 |
|----|----------|----------|----------|----------|----------|
|----|----------|----------|----------|----------|----------|

|             |      |      |      |      |      |
|-------------|------|------|------|------|------|
| 累计确诊人数的真实数据 | 1975 | 2744 | 4515 | 5974 | 7111 |
|-------------|------|------|------|------|------|

（i）当1月25日至1月27日这3天的误差（模型预测数据与真实数据差值的绝对值与真实数据的比值）都小于0.1则认为模型可靠，请判断（2）的回归方程是否可靠？

（ii）2020年1月24日在人民政府的强力领导下，全国人民共同采取了强力的预防“新冠肺炎”的措施，若采取措施5天后，真实数据明显低于预测数据，则认为防护措施有效，请判断防护措施是否有效？

附：对于一组数据 $((u_1,v_1),(u_2,v_2),\dots,(u_n,v_n))$ ，其回归直线 $v=a+\beta u$ 的斜率和截距的最小二乘估计分别为

$$\beta=\frac{\sum_{i=1}^n(u_i-\bar{u})(v_i-\bar{v})}{\sum_{i=1}^n(u_i-\bar{u})^2},\quad \bar{a}=\bar{v}-\beta\bar{u}.$$

参考数据：其中 $\omega_i=1.5^i$ ， $\bar{\omega}=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}\omega_i$ .

|           |           |                |                        |                             |                         |                              |            |            |            |            |            |
|-----------|-----------|----------------|------------------------|-----------------------------|-------------------------|------------------------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| $\bar{t}$ | $\bar{y}$ | $\bar{\omega}$ | $\sum_{i=1}^{10}t_i^2$ | $\sum_{i=1}^{10}\omega_i^2$ | $\sum_{i=1}^{10}t_iy_i$ | $\sum_{i=1}^{10}\omega_iy_i$ | $1.5^{11}$ | $1.5^{12}$ | $1.5^{13}$ | $1.5^{14}$ | $1.5^{15}$ |
| 5.5       | 390       | 19             | 385                    | 7640                        | 31525                   | 154700                       | 100        | 150        | 225        | 338        | 507        |

20.（12分）超级病菌是一种耐药性细菌，产生超级细菌的主要原因是用于抵抗细菌侵蚀的药物越来越多，但是由于滥用抗生素的现象不断的发生，很多致病菌也对相应的抗生素产生了耐药性，更可怕的是，抗生素药物对它起不到什么作用，病人会因为感染而引起可怕的炎症，高烧、痉挛、昏迷直到最后死亡.某药物研究所为筛查某种超级细菌，需要检验血液是否为阳性，现有 $n\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$ 份血液样本，每个样本取到的可能性均等，有以下两种检验方式：

- （1）逐份检验，则需要检验 $n$ 次；
- （2）混合检验，将其中 $k\left(k\in\mathbb{N}^*\text{且}k\geq2\right)$ 份血液样本分别取样混合在一起检验，若检验结果为阴性，这 $k$ 份的血液全为阴性，因而这 $k$ 份血液样本只要检验一次就够了，如果检验结果为阳性，为了明确这 $k$ 份血液究竟哪几份为阳性，就要对这 $k$ 份再逐份检验，此时这 $k$ 份血液的检验次数总共为 $k+1$ 次，假设在接受检验的血液样本中，每份样本的检验结果是阳性还是阴性都是独立的，且每份样本是阳性结果的概率为 $p\left(0<p<1\right)$ 。

（1）假设有5份血液样本，其中只有2份样本为阳性，若采用逐份检验方式，求恰好经过2次检验就能把阳性样本全部检验出来的概率；

（2）现取其中 $k\left(k\in\mathbb{N}^*\text{且}k\geq2\right)$ 份血液样本，记采用逐份检验方式，样本需要检验的总次数为 $\xi_1$ ，采用混合检验方式，样本需要检验的总次数为 $\xi_2$ 。

(i) 试运用概率统计的知识, 若  $E\xi_1 = E\xi_2$ , 试求  $p$  关于  $k$  的函数关系式  $p = f(k)$ ;

(ii) 若  $p = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{e}}$ , 采用混合检验方式可以使得样本需要检验的总次数的期望值比逐份检验的总次数期望值更少,

求  $k$  的最大值.

参考数据:  $\ln 2 \approx 0.6931$ ,  $\ln 3 \approx 1.0986$ ,  $\ln 4 \approx 1.3863$ ,  $\ln 5 \approx 1.6094$ ,  $\ln 6 \approx 1.7918$

21. (12 分) 已知  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $c > 0$  设函数  $f(x) = |x - b| + |x + c| + a$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .

(1) 若  $a = b = c = 1$ , 求不等式  $f(x) > 5$  的解集;

(2) 若函数  $f(x)$  的最小值为 1, 证明:  $\frac{1}{a+b} + \frac{4}{b+c} + \frac{9}{c+a} > 18(a+b+c)$ .

22. (10 分)  $a, b, c$  分别为  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边. 已知  $a(\sin A + 4\sin B) = 8\sin A$ .

(1) 若  $b = 1, A = \frac{\pi}{6}$ , 求  $\sin B$ ;

(2) 已知  $C = \frac{\pi}{3}$ , 当  $\triangle ABC$  的面积取得最大值时, 求  $\triangle ABC$  的周长.

## 参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、B

【解析】

根据题意分析  $f(x)$  的图像关于直线  $x = 1$  对称, 即可得到  $f(x)$  的单调区间, 利用对称性以及单调性即可得到  $x$  的取值范围.

【详解】

根据题意, 函数  $y = f(x)$  满足  $f(x+1)$  是偶函数, 则函数  $f(x)$  的图像关于直线  $x = 1$  对称,

若函数  $y = f(x)$  在  $(-\infty, 1]$  上单调递减, 则  $f(x)$  在  $[1, +\infty)$  上递增,

所以要使  $f(2x-2) > f(2)$ , 则有  $|2x-2-1| > 1$ , 变形可得  $|2x-3| > 1$ ,

解可得:  $x > 2$  或  $x < 1$ , 即  $x$  的取值范围为  $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$ ;

故选: B.

### 【点睛】

本题考查偶函数的性质，以及函数单调性的应用，有一定综合性，属于中档题。

2、D

### 【解析】

由图象求出  $A$  以及函数  $y = f(x)$  的最小正周期  $T$  的值，利用周期公式可求得  $\omega$  的值，然后将点  $\left(\frac{\pi}{6}, 2\right)$  的坐标代入函

数  $y = f(x)$  的解析式，结合  $\varphi$  的取值范围求出  $\varphi$  的值，由此可得出函数  $y = f(x)$  的解析式。

### 【详解】

由图象可得  $A = 2$ ，函数  $y = f(x)$  的最小正周期为  $T = 2 \times \left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{4\pi}{3}$ ， $\therefore \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{3}{2}$ 。

将点  $\left(\frac{\pi}{6}, 2\right)$  代入函数  $y = f(x)$  的解析式得  $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \cos\left(\frac{3}{2} \times \frac{\pi}{6} + \varphi\right) = 2$ ，得  $\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) = 1$ ，

$\because -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ ， $\therefore -\frac{\pi}{4} < \varphi + \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4}$ ，则  $\varphi + \frac{\pi}{4} = 0$ ， $\therefore \varphi = -\frac{\pi}{4}$ ，

因此， $f(x) = 2 \cos\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$ 。

故选：D。

### 【点睛】

本题考查利用图象求三角函数解析式，考查分析问题和解决问题的能力，属于中等题。

3、B

### 【解析】

由  $f(x) = 0$ ，解得  $x^2 - ax = 0$ ，即  $x = 0$  或  $x = a$ ， $\because a > 0$ ， $\therefore$  函数  $f(x)$  有两个零点， $\therefore A, C$ ，不正确，设  $a = 1$ ，

则  $f(x) = (x^2 - x)e^x$ ， $\therefore f'(x) = (x^2 + x - 1)e^x$ ，由  $f'(x) = (x^2 + x - 1)e^x > 0$ ，解得  $x > \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$  或  $x < \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ ，

由  $f'(x) = (x^2 - 1)e^x < 0$ ，解得： $-\frac{1 - \sqrt{5}}{2} < x < \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ ，即  $x = -1$  是函数的一个极大值点， $\therefore D$  不成立，排除

$D$ ，故选 B。

【方法点睛】本题通过对多个图象的选择考察函数的解析式、定义域、值域、单调性，导数的应用以及数学化归思想，属于难题。这类题型也是近年高考常见的命题方向，该题型的特点是综合性较强较强、考查知识点较多，但是并不是无路可循。解答这类题型可以从多方面入手，根据函数的定义域、值域、单调性、奇偶性、特殊点以及

$x \rightarrow 0^+, x \rightarrow 0^-, x \rightarrow +\infty, x \rightarrow -\infty$  时函数图象的变化趋势, 利用排除法, 将不合题意选项一一排除.

4、B

【解析】

由于直线的斜率  $k=3$ , 所以一条渐近线的斜率为  $k'=-\frac{1}{3}$ , 即  $\frac{b}{a}=\frac{1}{3}$ , 所以  $e=\sqrt{1+(\frac{b}{a})^2}=\frac{\sqrt{10}}{3}$ , 选 B.

5、B

【解析】

分析: 首先利用同角三角函数关系式, 结合题中所给的角的范围, 求得  $\cos \alpha$  的值, 之后借助于倍角公式, 将待求的式子转化为关于  $\cos \alpha$  的式子, 代入从而求得结果.

详解: 根据题中的条件, 可得  $\alpha$  为锐角,

根据  $\tan \alpha = 2$ , 可求得  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ,

而  $\cos 2\alpha + \cos \alpha = 2\cos^2 \alpha + \cos \alpha - 1 = \frac{2}{5} + \frac{\sqrt{5}}{5} - 1 = \frac{\sqrt{5}-3}{5}$ , 故选 B.

点睛: 该题考查的是有关同角三角函数关系式以及倍角公式的应用, 在解题的过程中, 需要对已知真切求余弦的方法要明确, 可以应用同角三角函数关系式求解, 也可以结合三角函数的定义式求解.

6、A

【解析】

先由题意可得数列  $\{a_n\}$  为等差数列, 再根据  $a_1 + a_2 + a_3 = 9$ ,  $a_4 = 8$ , 可求出公差, 即可求出  $a_5$ .

【详解】

数列  $\{a_n\}$  满足  $a_n + a_{n+2} = 2a_{n+1} (n \in \mathbb{N}^*)$ , 则数列  $\{a_n\}$  为等差数列,

Q  $a_1 + a_2 + a_3 = 9$ ,  $a_4 = 8$ ,

$\therefore 3a_1 + 3d = 9$ ,  $a_1 + 3d = 8$ ,

$\therefore d = \frac{5}{2}$ ,

$\therefore a_5 = a_4 + d = 8 + \frac{5}{2} = \frac{21}{2}$ ,

故选: A.

【点睛】

本题主要考查了等差数列的性质和通项公式的求法, 意在考查学生对这些知识的理解掌握水平, 属于基础题.

7、C



【解析】

解 对于 (1), 当  $CD \perp$  平面  $ABE$ , 且  $E$  在  $AB$  的右上方时,  $E$  到平面  $BCD$  的距离最大, 当  $CD \perp$  平面  $ABE$ , 且  $E$  在  $AB$  的左下方时,  $E$  到平面  $BCD$  的距离最小,

$\therefore$  四面体  $E-BCD$  的体积有最大值和最小值, 故 (1) 正确;

对于 (2), 连接  $DE$ , 若存在某个位置, 使得  $AE \perp BD$ , 又  $AE \perp BE$ , 则  $AE \perp$  平面  $BDE$ , 可得  $AE \perp DE$ , 进一步可得  $AE = DE$ , 此时  $E-ABD$  为正三棱锥, 故 (2) 正确;

对于 (3), 取  $AB$  中点  $O$ , 连接  $DO$ ,  $EO$ , 则  $\angle DOE$  为二面角  $D-AB-E$  的平面角, 为  $\theta$ ,

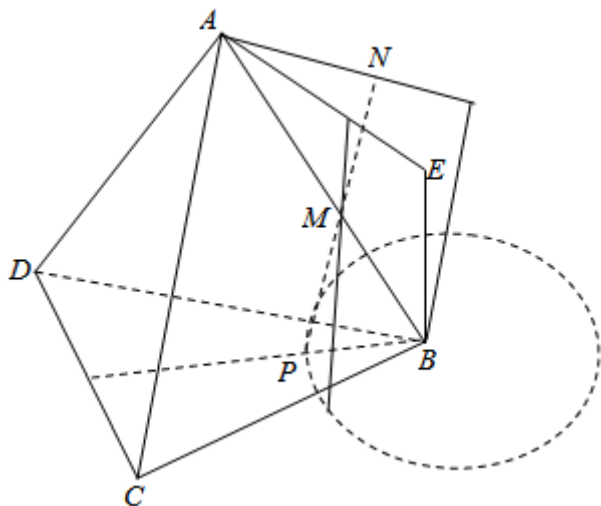
直角边  $AE$  绕斜边  $AB$  旋转, 则在旋转的过程中,  $\theta \in [0, \pi)$ ,

$\angle DAE \in [\frac{\pi}{12}, \pi)$ , 所以  $\theta \geq \angle DAE$  不成立. (3) 不正确;

对于 (4)  $AE$  的中点  $M$  与  $AB$  的中点  $N$  连线交平面  $BCD$  于点  $P$ ,  $P$  到  $BC$  的距离为:  $d_{P-BC}$ ,

因为  $\frac{|PB|}{d_{P-BC}} < 1$ , 所以点  $P$  的轨迹为椭圆. (4) 正确.

故选: C.



点睛: 该题考查的是有关多面体和旋转体对应的特征, 以几何体为载体, 考查相关的空间关系, 在解题的过程中, 需要认真分析, 得到结果, 注意对知识点的灵活运用.

8、A

【解析】

根据向量平行的坐标表示即可求解.

【详解】

$$\vec{a} = (4, 2), \vec{b} = (x, 3), \vec{a} \parallel \vec{b},$$

$$\therefore 4 \times 3 = 2x,$$

$$\text{即 } x = 6,$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/266011133035010122>