

弹珠游戏的数学建模

摘要 随着时代的发展，人们日益注重儿童的培养，各种开发大脑的益智游戏应运而生，弹珠机便是其中之一，本文所描述的弹珠机是一种类似物理弹球类的实体游戏机器，以能量守恒、概率论和数理统计为理论基础建立数学模型进行研究。通过反复多次对实体机器的体验操作并记录数据作为研究方法，研究对弹珠机施加的初始力的大小与弹珠最终掉落洞口位置之间的关系，分析运动过程中弹珠发生碰撞产生的能量损耗以及弹珠以不同方式从钉板掉落等因素对实验产生的影响。最终达成通过调整初始力来控制弹珠落点的实验目的。弹珠游戏对于开发儿童大脑，锻炼孩子手脑并用的能力有着重要的意义，让孩子在游戏娱乐的同时感受到数学之美，物理之美。

关键词 能量守恒 概率论 数理统计 能量损耗

Mathematical modeling of pinball game

Abstract Along with the development of The Times, people increasingly pay attention to the cultivation of the children, all kinds of development of the brain puzzle arises at the historic moment, pinball machine is one of them, this article describes the pinball machine is a kind of similar physical entities play ball game machine, to conservation of energy, the theoretical basis of probability theory and mathematical statistics, mathematical model is established for research. Through repeated many times on the real experience of the machine operation and record data as the research method, research the size of the initial force toward a pinball machine with marbles eventually drop the hole location, the relationship between the movement process shot bead collision energy loss and marbles in a different way from the nail plate dropped on the effect of the experiment. Finally, the experimental goal of controlling the pinball drop point by adjusting the initial force is achieved. Pinball games are of great significance to the development of children's brain and the exercise of their ability to use both hands and brain, so that children can feel the beauty of mathematics and physics while playing games and entertainment.

Key words conservation of energy, probability, Mathematical statistics, energy loss

目 录

| | |
|---------------------------|----|
| 引 言..... | 1 |
| 1 游戏规则及参数符号..... | 1 |
| 1.1 游戏规则..... | 1 |
| 1.2 弹珠机各部件参数..... | 2 |
| 1.3 符号说明..... | 3 |
| 2 问题重现..... | 3 |
| 3 问题分析..... | 4 |
| 3.1 问题一分析..... | 4 |
| 3.2 问题二分析..... | 4 |
| 4 模型的建立与求解..... | 4 |
| 4.1 弹珠沿直线轨道运动..... | 4 |
| 4.2 弹珠沿弯道运动后飞出，做平抛运动..... | 5 |
| 4.3 钉板实验..... | 6 |
| 4.3.1 弹珠从通口直接掉落..... | 7 |
| 4.3.2 弹珠与第一排钉板碰撞后掉落..... | 9 |
| 4.4 问题一求解..... | 10 |
| 4.5 问题二求解..... | 12 |
| 4.6 数值算例..... | 12 |
| 5 模型的评价..... | 13 |
| 参考文献..... | 14 |
| 致 谢..... | 15 |

引言

弹珠机的历史算是很久远的了，始创于日本，是一种集娱乐与博彩于一体的机器，很快弹珠机店便已经遍布日本大大小小各个角落，在很长一段时间里深受成人玩家的喜爱。不久之后又相继引入到台湾和大陆，弹珠机的玩法得到普及以及简化最后逐渐演变成了只供小朋友游戏的儿童式弹珠机。现在大陆很多电商平台都能买到，儿童弹珠机的弹珠有钢珠，玻璃珠之分，弹珠台有木质，塑料之分。经过市场几年的筛选以及成本等众多因素的考虑，其中玩钢珠和木质的弹珠机逐渐不受欢迎而慢慢淘汰，如今市面上的大多都是玩玻璃珠和塑料材质的弹珠机。

在 2009 年底，弹珠机（见图 1）才正式被引入中国大陆，经过了游戏方式规则的改变和外观材质等的进化，最终应用于中国儿童娱乐行业。不确定性、预判性、挑战性都很高，可以考验和锻炼儿童的眼手合一的能力。仅在方寸之间便能体会无穷乐趣，因其特有的游戏机制，受到广大儿童的欢迎并且迅速蓬勃发展。如今在动漫之都广州，深圳，中山等地的大街小巷里都能看到它的身影。



图 1 弹珠机

1 游戏规则及参数符号

1.1 游戏规则

玩者投币一元，机器会出来五颗玻璃珠，把玻璃珠放进投珠口中，位于正平面上的倍数灯（2、3、4、5）与钉板底部上的 10 个洞口灯就会开始闪烁。此时按下确定按钮，机器将随机选定倍数与洞口灯，拉动右下角弹簧拉杆，把玻璃面板（见图 2

内的玻璃弹珠弹入通道后进入钉板，若最后掉落在先前已选定的亮红灯的洞口，即可获得其相应倍数的玻璃球，中奖所得的玻璃弹珠可以重复使用。



图 2 弹珠机游戏面板

1.2 弹珠机各部件参数

- (1) 弹珠机游戏面板与水平面呈 $\theta = 20^\circ$ 角。
- (2) 弹珠重量约 20 克，直径约 2cm，材质为玻璃。
- (3) 弹珠机主体部分均塑料材质，不考虑摩擦力。
- (4) 主界面从顶部到底部长约 25cm，其中直线轨道长约 20cm，弯道近似一个四分之一圆，半径约为 5cm，轨道宽约 2.5cm。（见图 3）
- (5) 第一排钉板到底部的距离为 15cm，第一排钉板有 9 个钉点、8 个通口，长约 20cm，各个钉点之间的距离均为 2.5cm；第二排钉板与第一排相距 3.75cm，比第一排钉板多 1 个钉点和 1 个通口，且每个钉点正好落在第一排两个钉点的正下方中间位置；第三排钉板比第二排多 1 个钉点和 1 个通口，且每个钉点正好落在第二排两个钉点的正下方中间位置；第四排钉点分布与第二排钉点分布一致，最底下一层为洞口，洞口的个数以及距离与第三排钉板一致，正好 10 个洞口。（见图 3）

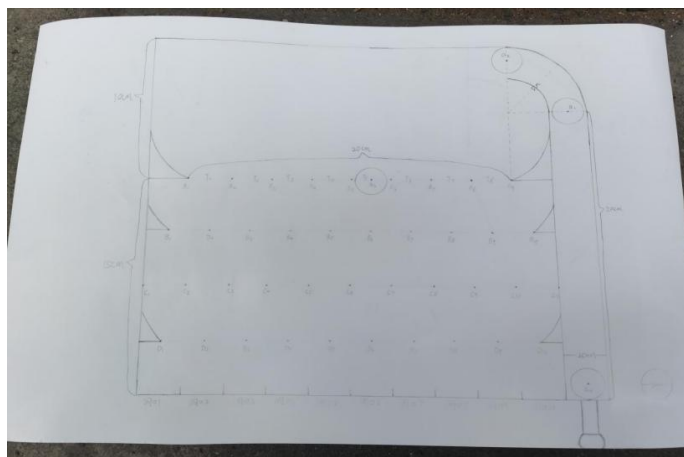


图 3 弹珠机游戏面板结构手绘图

1.3 符号说明

表 1 符号说明

| 符号 | 含义 | 单位 |
|-------|-----------------------|---------|
| F | 初始拉力 | N |
| K | 劲度系数 | N/m |
| b | 弹簧的伸长(或缩短) 的长度 | m |
| E_k | 动能 | J |
| E_p | 势能 | J |
| d | 弹珠的直径 | m |
| m | 弹珠的质量 | kg |
| l | 直线轨道的长度 | m |
| e | 通口/轨道的宽 | m |
| v_0 | 弹珠的初速度 | m/s |
| v_1 | 弹珠到达直线轨道顶端时的瞬时速度 | m/s |
| a_2 | 弹珠即将进行平抛运动飞出弯道时的位置 | / |
| a_3 | 弹珠下落至第一排钉板时的位置 | / |
| v_2 | a_2 处弹珠的速度 | m/s |
| v_3 | a_3 处弹珠的速度 | m/s |
| X | a_2 与 a_3 水平方向的距离 | m |
| Y | a_2 与 a_3 垂直方向的距离 | m |
| v_x | 平抛运动后水平方向的速度 | m/s |
| v_y | 平抛运动后竖直方向的速度 | m/s |
| t | a_2 与 a_3 之间运动的时间 | s |
| g | 重力加速度 | m/s^2 |
| Y_3 | 第一排钉板与底部洞口的距离 | m |
| H_3 | 第一排钉板距离洞口底部的竖直距离 | m |

2 问题重现

问题一：任意给定的一个初始力 F ，建立数学模型，给出弹珠落入各个目标洞口的概率与力 F 的关系。

问题二：游戏开始后，当机器随机确定通道灯（即指定目标洞口），用多大的初始力 F ，可以使弹珠落入目标洞口？

3 问题分析

3.1 问题一分析

根据整个游戏的流程，可将弹珠的运动过程分成三部分：

(1) 游戏开始时，任意给定一个初始力 F ，弹簧拉杆在力 F 的作用下做功，产生的弹性势能^[1]全部转化为弹珠的初始动能，使得弹珠能够克服重力作用，沿直线轨道向上作匀减速运动，部分动能转化为重力势能^[2]。

(2) 弹珠由直线轨道进入弯道，与轨道会发生碰撞，碰撞时伴随着速度的减小以及大量的能量损耗。弹珠飞出弯道后，以平抛运动下落到第一排钉板的某个位置。初动能越大，碰撞后的能量损耗也会增大，多次实验并测量数据找出两者之间的关系。根据能量守恒^[3]，不考虑摩擦力，可以得出弹珠在第一排钉板 X 时的动能加上重力势能以及碰撞损耗的能量等于弹珠的初始动能。从而可以找出初始力 F 与 X 之间的关系式

(3) 弹珠落在第一排钉板时，可能落在钉点上也可能直接从通口滑落，可能落在靠中间的位置也可能落在靠边上的位置。一旦弹珠下落的位置确定，则可以将其看成是一个类似高尔顿顶板实验^[4]的运动模型，从而求得最终落在各个洞口的概率分布。

3.2 问题二分析

由问题一求解可以得到弹珠在第一排钉板时掉入的通口与最终落入目标洞口的概率分布规律。问题二可以看作是问题一的逆问题。当选定最终掉落的洞口，可以反推出弹珠最终掉入指定目标洞口概率最大时弹珠应从第一排钉板的哪一个通口掉入，从而可以确定 X 的取值范围。再由问题一中得到的初始力 F 与 X 之间的关系式计算出力 F 的取值范围。

4 模型的建立与求解

4.1 弹珠沿直线轨道运动

由于条件限制，弹簧拉杆使用的弹簧的劲度系数^[5]并不知晓，需要先确定弹簧的劲度系数。弹簧的劲度系数与很多因素有关，如弹簧的材质、弹簧丝的粗细、弹簧圈的直径等等。这些数据测量难度较大，于是考虑通过实验测量数据，运用胡克定律^[6]计算弹簧的劲度系数。

用拉力器的一端勾住弹簧装置，缓缓拉动拉力器。当拉力器显示 20N 时，测量弹簧拉杆的伸长量约为 1 厘米。根据胡克定律 $F = Kb$ 计算，可以得出该弹簧拉杆的弹簧的劲度系数大概为 2000N/m。

在实验条件不变的前提下，多次进行实验。发现只要拉力器显示 20N 时，弹簧拉杆的伸长量均约为 1 厘米。又选取了不同的力进行实验，根据胡克定律计算出弹簧的劲度系数基本在 2000N/m 附近，故取 $K = 2000N / m$ 。

因为不考虑摩擦力，在初始力 F 的作用下，弹簧击打弹珠后，弹簧的弹性势能 $E_{p_{\text{弹}}} = \frac{F^2}{2K}$

全部转化为弹珠的动能 $E_{k_0} = \frac{1}{2}mv_0^2$ 。即

$$E_{k_0} = E_{p_{\text{弹}}} \quad (1)$$

弹珠获得初速度 v_0 ，克服重力作用，以加速度 $a = -g \sin \theta$ 沿直线轨道向上做匀减速直线运动。由能量守恒定律得，到达直线轨道顶端时的瞬时速度为 $v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2gl \sin \theta}$ 。

4.2 弹珠沿弯道运动后飞出，做平抛运动^[7]

弹珠进入弯道后，作圆周运动，与轨道碰撞时，会产生能量损耗。当弹珠飞出弯道即将进行平抛运动时，记此时弹珠的位置为 a_2 ，速度为 v_2 。当弹珠进行平抛运动，下落至第一排钉板时，记此时弹珠的位置为 a_3 ，速度为 v_3 ， a_2 与 a_3 之间水平方向的距离记为 X ，垂直方向的距离记为 Y 。平抛运动过程中弹珠水平方向的瞬时速度为 v_x ，垂直方向的瞬时速度为 v_y 。显然，它们满足下列等式：

$$v_x = v_2 \quad (2)$$

$$v_y = gt \sin \theta \quad (3)$$

$$X = v_x t \quad (4)$$

$$Y = \frac{1}{2}gt^2 \sin \theta \quad (5)$$

$$v_3^2 = v_x^2 + v_y^2 \quad (6)$$

根据能量守恒定律知

$$E_{k_3} + E_{p_3} + E_{\text{损}} = E_{k_0} \quad (7)$$

其中 $E_{k_3} = \frac{1}{2}mv_3^2$ ， E_{p_3} 表示弹珠在 a_3 位置相对于弹珠初始位置的重力势能， $E_{\text{损}}$ 表示弹珠在弯道中碰撞损失的能量。因为 $E_{\text{损}}$ 是未知的，不易得到。下面取一些初始力 F 进行实验，记录在相同的力 F 作用下 X 和 Y 的值，以及不同的力 F 作用下 X 和 Y 的值，运用公式 (1) — (7) 计算 $E_{\text{损}}/E_{k_0}$ 。

以 $F = 20N$ 为例，重复多次实验，均测量得到 X 约为 6.25cm，第一排钉板是固定的，所以 Y 等于 9cm，即第一排钉板到弹珠机顶部挡板的距离减去弹珠的半径。

$$E_{\text{损}} = E_{k_0} - E_{k_3} - E_{p_3} = E_{p_{\text{弹}}} - E_{k_3} - E_{p_3}$$

$$= \frac{F^2}{2K} - \frac{1}{2}mv_3^2 - mg(0.25 - Y - d)\sin\theta \quad (\text{其中 } v_3 \text{ 由公式 (2) — (6) 计算})$$

$$\approx 0.08385$$

而 $E_{k_0} = E_{p_{\text{弹}}} = 0.1$ ，所以 $E_{\text{损}}/E_{k_0} \approx 0.8385$ 。

再取不同大小的力 F 进行实验，发现当力 F 过小时，弹珠在上升的过程中，或者进入弯道时速度不够会掉落回起点；当力 F 足够大，使得弹珠冲出弯道，比值 $E_{\text{损}}/E_{k_0}$ 基本在 0.84 附近。由实验结果可以得知当初始力 F 在适当的范围（确保弹珠可以冲出弯道）内，比值 $E_{\text{损}}/E_{k_0}$ 始终接近 0.84。即 $E_{\text{损}} \approx 0.84E_{k_0}$ 。由公式 (1) — (7) 知，可以通过改变初始力 F 的大小直接算出弹珠落在第一排钉板的准确位置。

假设弹珠能够完成实验，那么一定会掉落在第一排钉板的某个位置，由于第一排钉板是固定的，所以弹珠落在第一排时的重力势能是固定不变的， $E_{p_3} = mg(0.25 - Y - d)\sin\theta \approx 0.009385$ 。又 $E_{\text{损}} \approx 0.84E_{k_0}$ ，所以由公式 (7) 得， $0.16E_{k_0} = E_{k_3} + Ep_3$ 。

再由 (2) — (6) 有，

$$F^2 = \frac{K}{0.16} [mv_3^2 + 2mg(0.25 - Y - d)\sin\theta]$$

$$= \frac{K}{0.16} [m(v_x^2 + v_y^2) + 2mg(0.25 - Y - d)\sin\theta]$$

$$= \frac{K}{0.16} \left[m \left(\frac{X^2 g \sin\theta}{2Y} + 2Yg \sin\theta \right) + 2mg(0.25 - Y - d)\sin\theta \right]$$

$$= \frac{mg \sin\theta K}{0.16} \left[\frac{X^2}{2Y} + 2(0.25 - d) \right] \quad (8)$$

上式给出了初始力 F 与弹珠落在第一排钉板的位置 X 之间的关系。令 $X = 0$ ，求得 $F \approx 19.6N$ ；令 $X = 0.2m$ ，求得 $F \approx 23.9N$ 。

所以弹珠要完成这个实验，则施加的初始力 F 只要在 19.6N 到 23.9N 之间即可。

4.3 钉板实验

将第一排钉点从左至右分别标记为 $A1, A2, L, A9$ ，第二排钉点从左至右分别为 $B1, B2, L, B10$ ，第三排钉点为 $C1, C2, L, C11$ ，第四排钉点为 $D1, D2, L, D10$ ，第一排通口从左到右分别标记为 $T1, T2, L, T8$ ，最后洞口从左到右分别为洞口 1~10。

当弹珠经过平抛运动下落至第一排钉板的时候会出现两种情况：（1）弹珠直接从某一处通口掉落；（2）弹珠碰撞第一层钉点再掉落。

4.3.1 弹珠从通口直接掉落

弹珠直接从通口往下掉落，落在第二层钉板时与钉点发生碰撞，此时弹珠随机向左向右掉落，下落到第三层钉板再次碰撞，随机向左向右掉落，直至最后掉落到洞口。

通过实验，我们发现，弹珠从最边上的通口（ $T1$ 或 $T8$ ）下落和与从中间通口（除了 $T1$ 和 $T8$ ）下落是有区别的。假设弹珠从通口 $T2$ 掉落，那么在它下落的过程中畅通无阻，随机向左或向右掉落，如果弹珠一直向左边的通口掉落，那么最终会落到1号洞口；如果弹珠一直向右掉落，那么最终会落在5号洞口。所以当弹珠直接从通口 $T2$ 掉落时，最终可能会落入洞口1~5中的某一个。但是如果弹珠从通口 $T1$ 或 $T8$ 下落，由于边框的限制，弹珠在落到第四层钉板时会被强制从仅有的通口掉落，导致最终掉落洞口的只存在四种可能性。我们先讨论除了 $T1$ 和 $T8$ 的其他六个通口的情况。

假设弹珠从通口 $T3$ 掉落，我们将通过此通口的概率记作1。落到第二排钉板必定与 $B4$ 发生碰撞，然后随机向左或向右掉落，概率均为 $\frac{1}{2}$ 。落到第三排钉板可能与 $C4$ 或 $C5$ 发生碰撞后随机向左向右掉落的概率均为 $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ ，但是碰撞 $C4$ 向右掉落与碰到 $C5$ 向左掉落的是同一个通口，所以，弹珠通过 $C3$ 与 $C4$ 的通口、 $C4$ 与 $C5$ 的通口、 $C5$ 与 $C6$ 的通口的概率分别 $\frac{1}{4}$ 、 $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ 、 $\frac{1}{4}$ ，然后再掉落下一层。总结规律会发现：在弹珠经过通口时，经过每个通口的概率都是通向这一通口的上一次通口的概率的 $\frac{1}{2}$ （见图4）。

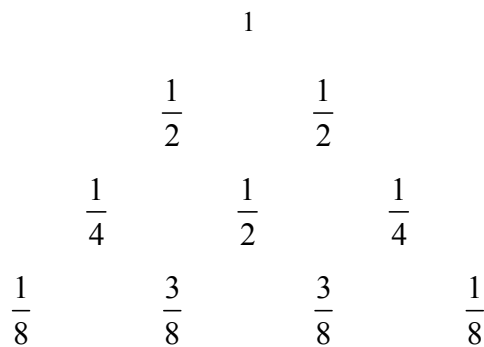


图4 概率分布图

由杨辉三角^[1]（见图5）的数字排列规律，图4中的概率值也可找到数字排列的规律（见图6）。

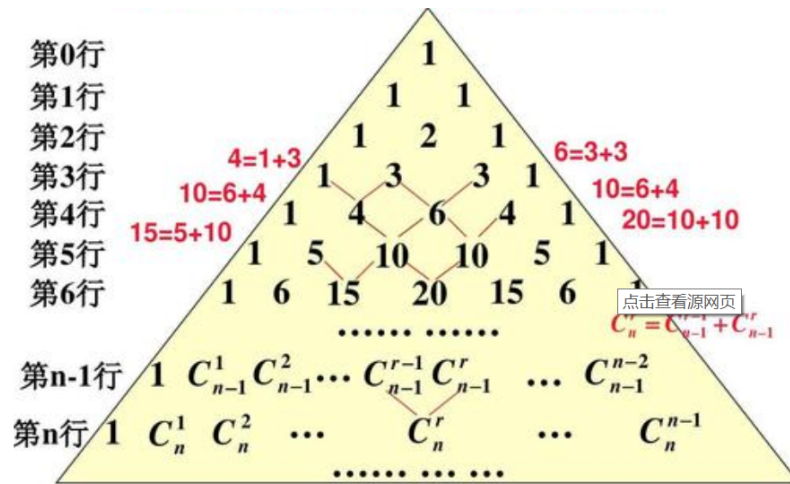


图 5 杨辉三角

第 n 行最边上的概率值为 $\frac{1}{2^n}$ ，中间各个的概率值是第 $n-1$ 行相邻两个概率值的算术平均值。因为弹珠机一共有五层（四层钉板加上一层洞口），所以落入各个洞口的概率为 $f(k) = C_4^k / 2^4$ ($k=0,1,2,3,4$)（见图 6）。

| | | | | | |
|-------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 第 0 行 | $\frac{1}{2^0}$ | | | | |
| 第 1 行 | $\frac{1}{2^1}$ | $\frac{1}{2^1}$ | | | |
| 第 2 行 | $\frac{1}{2^2}$ | $\frac{2}{2^2}$ | $\frac{1}{2^2}$ | | |
| 第 3 行 | $\frac{1}{2^3}$ | $\frac{3}{2^3}$ | $\frac{3}{2^3}$ | $\frac{1}{2^3}$ | |
| 第 4 行 | $\frac{1}{2^4}$ | $\frac{4}{2^4}$ | $\frac{6}{2^4}$ | $\frac{4}{2^4}$ | $\frac{1}{2^4}$ |

图 6 概率分布的数字排列规律

再测试其他通口（除了 $T1$ 和 $T8$ ），发现结果一致。

接着我们开始研究从通口 $T1$ 掉落的情况，弹珠在第二、第三层钉板的掉落都与上述实验相同。在第三层钉板时，三个通口的概率分别为 $\frac{1}{4}$ 、 $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{1}{4}$ ，接着往下掉落时，当弹珠是从 $C1$ 、 $C2$ 之间掉落时，由于边框限制弹珠只能掉落在 $D1$ 、 $D2$ 之间。这样，就使得第四层钉板各通口个数以及概率发生了改变，只有最左边的三个通口，概率分别为 $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{3}{8}$ 、 $\frac{1}{8}$ ，则最终掉落洞口只有最左边四个洞口，概率分别为 $\frac{1}{4}$ 、 $\frac{7}{16}$ 、 $\frac{1}{4}$ 、 $\frac{1}{16}$ 。当弹珠从通口 $T8$

下落时，最终会掉落在最右边四个洞口，概率从左至右分别为 $\frac{1}{16}$ 、 $\frac{1}{4}$ 、 $\frac{7}{16}$ 、 $\frac{1}{4}$ 。

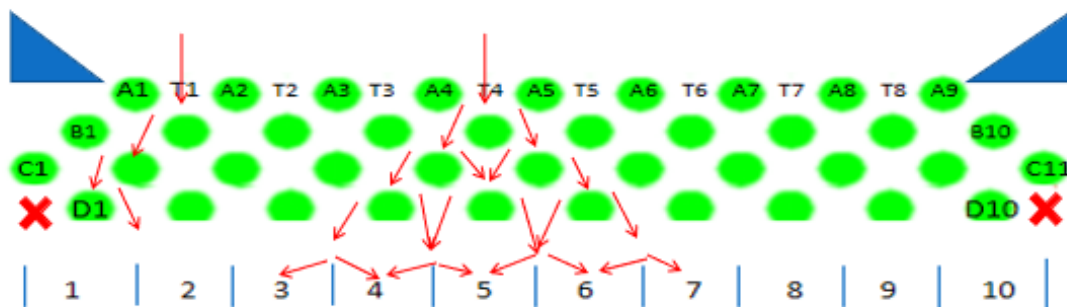


图 7 通口直接掉落图

综上所述，当弹珠直接从通口下落且通口为 $Tn(1 < n < 8)$ 时，最终弹珠会掉落在洞口 $n-1$ 、 n 、 $n+1$ 、 $n+2$ 、 $n+3$ 五个位置，且掉落在各个洞口的概率从左至右依次是 $\frac{1}{16}$ 、 $\frac{1}{4}$ 、 $\frac{3}{8}$ 、 $\frac{1}{4}$ 、 $\frac{1}{16}$ 。当弹珠从通口 $T1$ 下落时，会落在洞口1~4，概率分别为 $\frac{1}{4}$ 、 $\frac{7}{16}$ 、 $\frac{1}{4}$ 、 $\frac{1}{16}$ 。当弹珠从通口 $T8$ 下落时，会落在洞口5~8，概率分别为 $\frac{1}{16}$ 、 $\frac{1}{4}$ 、 $\frac{7}{16}$ 、 $\frac{1}{4}$ 。

4.3.2 弹珠与第一排钉板碰撞后掉落

弹珠通过平抛运动下落至第一排钉板与钉点发生碰撞，此时又分为两种情况：（1）弹珠与钉点碰撞有偏向，向左偏移多一点或者向右偏移多一点；（2）弹珠与钉点碰撞无偏向，正中弹珠中心下方。

如果是第一种情况，那么弹珠必定向偏移多的一方的通口下落，则弹珠落至洞口的概率与上述直接从通口掉落的情况是一致的，掉落洞口的概率也相同（弹珠与 $A1$ 或 $A2$ 碰撞，由于边框限制也只能从一侧的通口下落，归于此类）。

如果是第二种情况，弹珠与 $A3 \sim A7$ 中任意一个钉点碰撞后会随机向左或向右掉落，概率均为 $\frac{1}{2}$ 。然后再与第二排钉板发生碰撞。这种情况相当于比直接从通口掉落情况多发生了一次碰撞，即在上述实验后再加一层钉板，一共六层钉板。而当弹珠与 $A2$ 或 $A8$ 发生碰撞，同样会出现在第三次钉板的时候被固定挡板限制，少了一种掉落的可能性，最终只会掉落在可能的五个洞口。

我们先讨论碰撞钉点 $A3 \sim A7$ 的情况。假设弹珠与 $A4$ 发生无偏向碰撞，弹珠最终会落入洞口2、3、4、5、6、7中的某一个。

$$\text{由 } f(k) = C_5^k / 2^5 \quad (k=0,1,2,3,4,5)$$

，求得弹珠最终落入洞口 2、3、4、5、6、7 中的概率分别为 $\frac{1}{32}$ 、 $\frac{5}{32}$ 、 $\frac{5}{16}$ 、 $\frac{5}{16}$ 、 $\frac{5}{32}$ 、 $\frac{1}{32}$ 。再测试其它钉点，结果一致。

当弹珠与 A_2 发生无偏向碰撞时，弹珠在第二、第三层钉板的掉落都与 4.3.1 中实验相同，在第三层钉板四个通口的概率分别为 $\frac{1}{8}$ 、 $\frac{3}{8}$ 、 $\frac{3}{8}$ 、 $\frac{1}{8}$ 。接着往下掉落，当弹珠从 C_1 、 C_2 之间掉落时，由于边框限制弹珠只能掉落在 D_1 、 D_2 之间，这样就使得第四层钉板各通口个数以及概率发生了改变，只有最左边的四个通口，概率分别为 $\frac{5}{16}$ 、 $\frac{3}{8}$ 、 $\frac{1}{4}$ 、 $\frac{1}{16}$ 。最终掉落的洞口只有最左边五个洞口，概率从左到右分别为 $\frac{5}{32}$ 、 $\frac{11}{32}$ 、 $\frac{5}{16}$ 、 $\frac{5}{32}$ 、 $\frac{5}{32}$ 。

当弹珠与 A_8 发生无偏向碰撞时，最终会掉落在最右边五个洞口，概率从左至右分别为 $\frac{1}{32}$ 、 $\frac{5}{32}$ 、 $\frac{5}{16}$ 、 $\frac{11}{32}$ 、 $\frac{5}{32}$ 。

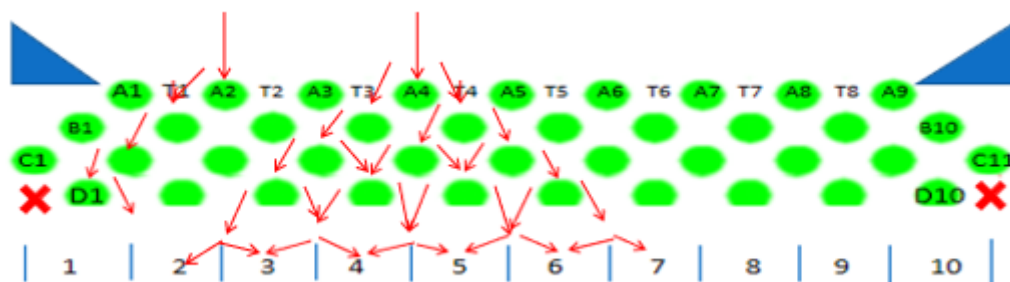


图 8 弹珠与第一排钉板碰无偏向撞后掉落图

当弹珠与 $A_n (1 < n < 8)$ 发生无偏向碰撞时，弹珠最终会掉落在洞口 $n-2$ 、 $n-1$ 、 n 、 $n+1$ 、 $n+2$ 、 $n+3$ 六个位置，且各个洞口的掉落概率从左至右依次是 $\frac{1}{32}$ 、 $\frac{5}{32}$ 、 $\frac{5}{16}$ 、 $\frac{5}{16}$ 、 $\frac{5}{32}$ 、 $\frac{1}{32}$ 。当弹珠与 A_2 发生无偏向碰撞时，最终会落在洞口 1~5，概率从左到右分别为 $\frac{5}{32}$ 、 $\frac{11}{32}$ 、 $\frac{5}{16}$ 、 $\frac{5}{32}$ 、 $\frac{5}{32}$ 。当弹珠与 A_8 发生无偏向碰撞时，最终会掉落在洞口 6~10，概率从左至右分别为 $\frac{1}{32}$ 、 $\frac{5}{32}$ 、 $\frac{5}{16}$ 、 $\frac{11}{32}$ 、 $\frac{5}{32}$ 。

4.4 问题一求解

由前面的讨论可知，当初始力 F 的大小确定时，根据 F 与 X 之间的关系，我们可以计算出弹珠下落到第一排钉板的准确位置，然后便能推断弹珠最终有可能落在哪几个洞口，以及各洞

口的概率分布（见表 2、表 3）。因此可以实现通过控制拉力的大小来操控弹珠的落点，提高命中指定洞口的概率，从而获得游戏挑战成功。

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/266035013043010110>