专题 4.2　一元一次方程的解法【十大题型】

【苏科版】

题型先知

【题型 1　一元一次方程的整数解问题】.....1
【题型 2　换元法解一元一次方程】.....4
【题型 3　根据两个一元一次方程的解之间的关系求参数】.....6
【题型 4　错解一元一次方程问题】.....8
【题型 5　解一元一次方程】.....10
【题型 6　探究一元一次方程解的情况】.....14
【题型 7　同解问题】.....16
【题型 8　一元一次方程的解与参数无关】.....18
【题型 9　一元一次方程的解法在新定义中的运用】.....20
【题型 10 含绝对值的一元一次方程】.....24

举一反三

【知识点 1　一元一次方程的解法】

解一元一次方程的一般步骤：去分母、去括号、移项、合并同类项、系数化为 1，这仅是解一元一次方程的一般步骤，针对方程的特点，灵活应用，各种步骤都是为使方程逐渐向 x=a 形式转化.

【知识点 2　一元一次方程的解】

定义：使一元一次方程左右两边相等的未知数的值叫做一元一次方程的解.

把方程的解代入原方程，等式左右两边相等.

【题型 1　一元一次方程的整数解问题】

【例 1】（2022·北京·首都师范大学附属中学七年级期中）若关于x的方程$(k-2019)x-2017=6-2019(x+1)$的解是整数，则整数k的取值个数是（　）

A．5　　B．3　　C．6　　D．2

【答案】C

【分析】先求出此方程的解，再利用方程的解是整数，k 也是整数，即可判断 k 的取值.

【详解】解：$(k-2019)x-2017=6-2019(x+1)$，

$(k-2019)x-2017=6-2019x-2019$，

$(k-2019)x+2019x=6-2019+2017$，

$kx=4$，

解得：$x=\frac{4}{k}$，

∵方程的解是整数，k 也是整数，

∴k 可以为-4 或-2 或-1 或 1 或 2 或 4，共有 6 个数，故 C 正确．

故选：C．

【点睛】本题主要考查的是方程的解，根据方程的解为整数和 k 为整数，求出当 k 为整数，$\frac{4}{k}$也是整数时，k 的值，是解决此题的关键．

【变式 1-1】（2022·全国·课时练习）当整数 k 为何值时，方程$9x-3=kx+15$有正整数解．求出这些解．

【答案】$k=8$时，方程的正整数解为$x=18$；$k=7$时，方程的正整数解为$x=9$；$k=6$时，方程的正整数解为$x=6$；$k=3$时，方程的正整数解为$x=3$；$k=0$时方程的正整数解为$x=2$；$k=-9$时，方程的正整数解为$x=1$．

【分析】先求出方程$9x-3=kx+15$的解，再根据正整数的特性进行分析即可得．

【详解】$9x-3=kx+15$，

$(9-k)x=18$，

因为方程$9x-3=kx+15$有正整数解，

所以$9-k\neq 0$，即$k\neq 9$，

所以$x=\frac{18}{9-k}$，

要使方程$9x-3=kx+15$有正整数解，则$\frac{18}{9-k}$为正整数即可，

因此，k 的所有可能取值为$8,7,6,3,0,-9$，

当$k=8$时，方程的正整数解为$x=\frac{18}{9-8}=18$；

当$k=7$时，方程的正整数解为$x=\frac{18}{9-7}=9$；

当$k=6$时，方程的正整数解为$x=\frac{18}{9-6}=6$；

当$k=3$时，方程的正整数解为$x=\frac{18}{9-3}=3$；

当$k=0$时方程的正整数解为$x=\frac{18}{9-0}=2$；

当$k=-9$时，方程的正整数解为$x=\frac{18}{9-(-9)}=1$．

【点睛】本题考查了求一元一次方程的特殊解，正确求出方程的解为$x=\frac{18}{9-k}$是解题关键.

【变式 1-2】（2022·内蒙古通辽·七年级期末）若关于 x 的方程$mx=3-x$的解为整数，则正整数 m 的值为_____.

【答案】2

【分析】先方程得 $x=\frac{3}{m+1}$，再由方程的解为整数，则有 $m+1=\pm3$ 或 $m+1=\pm1$，求得 $m=2$ 或 $m=-4$ 或 $m=0$ 或 $m=-2$，根据题意，m 是正整数，即可求 m 的值为 2.

【详解】解：$mx=3-x$，

移项，合并同类项，得（$m+1$）$x=3$，

解得 $x=\frac{3}{m+1}$，

∵方程的解为整数，

∴$m+1=\pm3$ 或 $m+1=\pm1$，

∴$m=2$ 或 $m=-4$ 或 $m=0$ 或 $m=-2$，

∵$m+1\neq0$，

∴$m\neq-1$，

∵m 是正整数，

∴$m=2$，

故答案为：2.

【点睛】本题考查一元一次方程的解，熟练掌握一元一次方程的解法，根据 m 值的限定条件对 m 的值进行取舍是解题的关键.

【变式 1-3】（2022·北京石景山·七年级期末）设m 为整数，且关于 x 的一元一次方程$(m-5)x+m-3=0$.

（1）当$m=2$ 时，求方程的解；

（2）若该方程有整数解，求m 的值.

【答案】（1）$x=-\frac{1}{3}$；（2）$m=6$或$m=4$，$m=7$或$m=3$.

【分析】(1)将 m=2 代入方程(m-5)x+m-3=0，求出 x 即可；

(2)首先将方程变形为 $x=-1-\frac{2}{m-5}$，由方程有整数解，可知 m-5≠0，m-5=±1 或 m-5=±2，从而求出 m 的值.

【详解】解：(1)当$m=2$时，原方程为$-3x-1=0$.

解得，$x=-\frac{1}{3}$.

(2)当$m\neq 5$时，方程有解.

$x=\frac{3-m}{m-5}=-1-\frac{2}{m-5}$.

∵方程有整数解，且m是整数.

∴$m-5=\pm 1$，$m-5=\pm 2$.

解得，$m=6$或$m=4$，$m=7$或$m=3$.

故答案为(1)x=-$\frac{1}{3}$；(2)m=3 或 4 或 6 或 7.

【点睛】本题考查了方程的特殊解，难度较大.

【题型 2　换元法解一元一次方程】

【例 2】（2022·江苏·南通市八一中学七年级阶段练习）已知关于x的一元一次方程$\frac{x}{2019}+5=2019x+m$的解为$x=2018$，那么关于y的一元一次方程$\frac{5-y}{2019}-5=2019(5-y)-m$的解为（　　）

A．2013　　B．-2013　　C．2023　　D．-2023

【答案】C

【分析】首先由方程$\frac{x}{2019}+5=2019x+m$可得，$\frac{x}{2019}-2019x=m-5$，由方程$\frac{5-y}{2019}-5=2019(5-y)-m$可得，$\frac{y-5}{2019}-2019(y-5)=m-5$，设$n$=$y$-5，可得$\frac{n}{2019}-2019n=m-5$，再由方程$\frac{x}{2019}-2019x=m-5$的解为$x=2018$，可得方程$\frac{n}{2019}-2019n=m-5$的解为$n$=2018，据此即可解得.

【详解】解：由方程$\frac{x}{2019}+5=2019x+m$，得$\frac{x}{2019}-2019x=m-5$，

由方程$\frac{5-y}{2019}-5=2019(5-y)-m$可得，$\frac{5-y}{2019}-2019(5-y)=-m+5$，

得$\frac{y-5}{2019}-2019(y-5)=m-5$，

设n=y-5，则可得$\frac{n}{2019}-2019n=m-5$，

∵方程$\frac{x}{2019}-2019x=m-5$的解为$x=2018$，

∴方程$\frac{n}{2019}-2019n=m-5$的解为n=2018，

∴$y-5=2018$，

解得y=2023，

故选：C.

【点睛】本题主要考查了一元一次方程的解和利用换元法解一元一次方程，正确掌握和利用换元法的转化思想是解题的关键.

【变式 2-1】2022·河南·南阳市宛城区官庄镇第一初级中学七年级阶段练习）如果关于 x 的方程$\frac{1}{2022}x+2021=2x+m$ 的解是 $x=2023$，则关于 y 的方程$\frac{1}{2022}(y+1)+2021=2(y+1)+m$ 的解是 $y=$___.

【答案】2022

【分析】根据题意得到 $y+1=2023$，即可求出 y 的值.

【详解】解：∵关于 x 的方程$\frac{1}{2022}x+2021=2x+m$ 的解是 $x=2023$，

∴关于 y 的方程$\frac{1}{2022}(y+1)+2021=2(y+1)+m$ 中的 $y+1=2023$，

解得：$y=2022$，

故答案为：2022.

【点睛】此题考查了一元一次方程解的含义以及解一元一次方程，解题的关键是熟练掌握一元一次方程解的含义.

【变式 2-2】（2022·江西景德镇·七年级期末）若$x=-4$是关于x的方程$ax-b=1(a\neq 0)$的解，则关于x的方程$a(2x-3)-b-1=0(a\neq 0)$的解为_____.

【答案】$-\frac{1}{2}$

【分析】将$x=-4$代入方程 $ax-b=1(a\neq 0)$可得$-4a-b=1$，进而代入$a(2x-3)-b-1=0$即可得到$a(2x-3)-b=-4a-b$，根据等式的性质即可求得答案.

【详解】解：将$x=-4$代入方程$ax-b=-4a-b=1$，

$a(2x-3)-b-1=0$，整理得$a(2x-3)-b=1$，

则$a(2x-3)-b=-4a-b$，

$\therefore 2x-3=-4$，解得$x=-\frac{1}{2}$，

故答案为$-\frac{1}{2}$.

【点睛】本题考查了一元一次方程的解及等式的性质，熟练掌握等式两边相同未知数前面系数相等是解题的关键.

【变式 2-3】（2022·山西临汾·七年级阶段练习）如果关于 x 的一元一次方程$ax+b=0$的解是$x=-2$，则关于 y 的一元一次方程$a(y-1)+b=0$的解是_____.

【答案】－1

【分析】根据题中两个方程的关系，可知 y-1=-2，即可求出 y 的值．

【详解】解：∵关于 x 的一元一次方程 ax+b=0 的解是 x=-2，

∴-2a+b=0，

∴b=2a，

把 b=2a 代入关于 y 的一元一次方程 a（y-1）+b=0 得，

a（y-1）+2a=0，

∵a≠0，

∴（y-1）+2=0，

解得，y=-1．

故答案为：-1．

【点睛】本题考查了一元一次方程的解的定义，熟记使一元一次方程左右两边相等的未知数的值叫做一元一次方程的解是解题的关键．

【题型 3　根据两个一元一次方程的解之间的关系求参数】

【例 3】（2022·全国·七年级单元测试）关于 x 的方程$4x-2m=3x-1$的解是$x=2x-3m$的解的 2 倍，则 m 的值为（　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{1}{4}$　　C．$-\frac{1}{4}$　　D．$-\frac{1}{2}$

【答案】C

【分析】分别表示出两个方程的解，根据解的关系列出方程，求出方程的解即可得到 m 的值．

【详解】解：方程 4x-2m=3x-1，

解得：x=2m-1，

方程 x=2x-3m，

解得：x=3m，

根据题意得：2m-1=6m，

解得：m=-$\frac{1}{4}$．

故选：C．

【点睛】此题考查了一元一次方程的解，方程的解即为能使方程左右两边相等的未知数的值．

【变式 3-1】（2022·山东菏泽·七年级期末）若方程$\frac{1}{2}(x+1)=1$的解与关于 x 的方程$\frac{1-k}{2}=x+1$的解互为倒数，

则 k 的值是_____.

【答案】-3

【分析】求出第一个方程的解，利用倒数定义求出第二个方程的解，代入第二个方程计算即可求出 k 的值.

【详解】解：$\frac{1}{2}(x+1)=1$，

解得：x=1，

1 的倒数为 1，

把 x=1 代入$\frac{1-k}{2}=x+1$，

得：$\frac{1-k}{2}=1+1$，

解得：$k=-3$，

故答案为：-3.

【点睛】此题考查了一元一次方程的解，方程的解即为能使方程左右两边相等的未知数的值.

【变式 3-2】（2022·全国·七年级课时练习）若关于x的方程$3x+6=0$与关于y的方程$5y+2m=18$的解互为相反数，则$m=$____.

【答案】4

【分析】先解出 x 的值，再根据相反数的定义得到 y 的值，最后代入方程求出 m 的值.

【详解】解：解方程$3x+6=0$，解得$x=-2$，

∵这两个方程的解互为相反数，

∴$y=2$是方程$5y+2m=18$的解，

将$y=2$代入原方程，得到$10+2m=18$，解得$m=4$.

故答案是：4.

【点睛】本题考查一元一次方程的解和相反数的定义，掌握方程的解和解一元一次方程是解答本题的关键.

【变式 3-3】（2022·江苏·南通市八一中学七年级阶段练习）已知方程$2-3(x+1)=0$的解与关于x的方程$\frac{k+x}{2}-2=2x$的解互为倒数，求k的值.

【答案】$k=-5$

【分析】先求出第一个方程的解是$x=-\frac{1}{3}$，把 x=-3 代入第二个方程得出$\frac{k-3}{2}-2=2\times(-3)$，求出 k 的值即

可.

【详解】解方程$2-3(x+1)=0$得：$x=-\frac{1}{3}$,

∵方程$2-3(x+1)=0$的解与关于x的方程$\frac{k+x}{2}-2=2x$的解互为倒数，

∴关于x的方程$\frac{k+x}{2}-2=2x$的解是$x=-3$，

把$x=-3$代入方程$\frac{k+x}{2}-2=2x$得：$\frac{k-3}{2}-2=2\times(-3)$，

解得 $k=-5$.

【点睛】本题考查了倒数的定义，解一元一次方程和一元一次方程的解等知识点，能得出关于 k 的一元一次方程是解此题的关键.

【题型 4　错解一元一次方程问题】

【例 4】（2022·全国·七年级专题练习）在解关于 x 的方程$\frac{x+2}{3}=\frac{x+a}{5}-2$时，小颖在去分母的过程中，右边的“$-2$”漏乘了公分母 15，因而求得方程的解为$x=4$，则方程正确的解是（ ）

A．$x=-10$　　B．$x=16$　　C．$x=\frac{20}{3}$　　D．$x=4$

【答案】A

【分析】先根据小颖解方程的过程求出 a 的值，然后正确求出原方程的解即可.

【详解】解：由题意得$5(x+2)=3(x+a)-2$的解为$x=4$，

∴$5\times(4+2)=3(4+a)-2$，

解得$a=\frac{20}{3}$,

∴$\frac{x+2}{3}=\frac{x+\frac{20}{3}}{5}-2$,

去分母得：$5(x+2)=3\left(x+\frac{20}{3}\right)-30$,

去括号得：$5x+10=3x+20-30$,

移项得：$5x-3x=20-30-10$,

合并得：$2x=-20$,

解得：$x=-10$,

故选 A.

【点睛】本题主要考查了解一元一次方程，正确理解题意是解题的关键.

【变式 4-1】（2022·河南·上蔡县第一初级中学七年级阶段练习）将方程$\frac{x+1}{2}-\frac{2x-3}{6}=1$ 去分母，得到

$3x+3-2x-3=6$，错在（　）

A．最简公分母找错　　B．去分母时，漏掉乘不含分母的项

C．去分母时，分子部分没有加括号　　D．去分母时，各项所乘的数不同

【答案】C

【分析】去分母时，方程两端同乘各分母的最小公倍数时，分子如果是多项式，需要将这个多项式作为整体加括号．

【详解】解：方程$\frac{x+1}{2}-\frac{2x-3}{6}=1$去分母得：$3(x+1)-(2x-3)=6$，

去括号得：$3x+3-2x+3=6$，

故选：C．

【点睛】本题考查解带分母的方程，先找出分母的最小公倍数，然后去分母求解.需要特别注意：分子如果是多项式，需要将这个多项式作为整体加括号．

【变式 4-2】（2022·江苏·兴化市周庄初级中学七年级期中）小王在解关于 x 的方程 2 - $\frac{2x-4}{3}$ =3a - 2x 时，误将 - 2x 看作+2x，得方程的解 x=1．

（1）求 a 的值；

（2）求此方程正确的解．

【答案】（1）$\frac{2}{9}$　（2）$x=-2$

【分析】（1）1）把 x=1 代入错误方程中计算即可求出 a 的值；

（2）把 a 的值代入原方程，求出解即可．

【详解】（1）把 x=1 代入 2 - $\frac{2x-4}{3}$ =3a+2x

得：2+$\frac{2}{3}$ =3a+2，

解得：$a=\frac{2}{9}$；

（2）把 $a=\frac{2}{9}$ 代入原方程得：2 - $\frac{2x-4}{3}=\frac{2}{3}$ - 2x，

去分母得：6 - （2x - 4）=2 - 6x，

去括号得：6 - 2x+4=2 - 6x，

移项得：- 2x+6x= - 10+2，

合并同类项得：4x= - 8，

解得：x= - 2．

【点睛】此题考查了解一元一次方程，其步骤为：去分母，去括号，移项合并，把未知数系数化为 1，求出解.

【变式 4-3】（2022·四川·威远县凤翔中学七年级期中）小李在解方程$3a-x=13$（x 为未知数）时，误将$-x$看作$+x$，解得方程的解$x=-2$，则 a=_____，原方程的解为_____.

【答案】 5 $x=2$

【分析】根据$-x$看作$+x$，解得方程的解$x=-2$，得$3a+(-2)=13$，解出a的值，再计算方程.

【详解】∵$-x$看作$+x$，解得方程的解$x=-2$

∴$3a+(-2)=13$

解得$a=5$

∴原方程为：$3\times5-x=13$

解得$x=2$.

故答案为：5；$x=2$.

【点睛】本题考查一元一次方程，解题的关键是理解方程的解的定义，以及解一元一次方程.

【题型 5 解一元一次方程】

【例 5】（2022·全国·七年级课时练习）方程$-\frac{1}{3}[-\frac{1}{2}(-1-x)-\frac{1}{6}]-\frac{1}{12}=-\frac{1}{24}$的解是 x=(　)

A. $\frac{1}{12}$　　B. $-\frac{1}{12}$　　C. $\frac{11}{12}$　　D. $-\frac{11}{12}$

【答案】D

【详解】方程两边同乘以 24 可得-8[$-\frac{1}{2}(-1-x)-\frac{1}{6}$]-2=-1，去括号，可得-8（$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x-\frac{1}{6}$）-2=-1，即-4-4x+$\frac{4}{3}$-2=-1，4x=-5+$\frac{4}{3}$，解得 x=-$\frac{11}{12}$.

故选 D.

【变式 5-1】（2022·山东威海·期末）解方程：

(1)$4-2(x+4)=2(x-1)$；

(2)$\frac{1}{3}(x+7)=\frac{2}{5}-\frac{1}{2}(x-5)$；

(3)$\frac{0.3x-0.4}{0.2}+2=\frac{0.5x-0.2}{0.3}$.

【答案】(1)$x=-0.5$

(2)$x=\frac{17}{25}$

(3)$x=4$

【分析】（1）按照去括号，移项，合并，系数化为 1 的步骤解方程即可；

（2）按照去分母，去括号，移项，合并，系数化为 1 的步骤解方程即可；

（3）按照去分母，移项，合并，系数化为 1 的步骤解方程即可．

（1）

解：$4-2(x+4)=2(x-1)$

去括号得：$4-2x-8=2x-2$，

移项得：$-2x-2x=-2-4+8$，

合并得：$-4x=2$，

解得$x=-0.5$；

（2）

解：$\frac{1}{3}(x+7)=\frac{2}{5}-\frac{1}{2}(x-5)$

去分母得：$10(x+7)=12-15(x-5)$，

去括号得：$10x+70=12-15x+75$，

移项得：$10x+15x=12+75-70$，

合并得：$25x=17$，

解得$x=\frac{17}{25}$；

（3）

解：$\frac{0.3x-0.4}{0.2}+2=\frac{0.5x-0.2}{0.3}$

整理得$\frac{3x-4}{2}+2=\frac{5x-2}{3}$

去分母得：$3(3x-4)+12=2(5x-2)$，

去括号得：$9x-12+12=10x-4$，

移项得：$9x-10x=-4+12-12$，

合并得：$-x=-4$，

解得$x=4$．

【点睛】本题主要考查了解一元一次方程，熟知解一元一次方程的方法是解题的关键．

【变式 5-2】（2022·全国·七年级单元测试）解方程：

(1)$3(2-x)=4-x$.

(2)$\frac{x+1}{2}-1=\frac{3x-2}{3}$.

(3)$9-3y=5y+5$.

(4)$\frac{3x-1}{4}-1=\frac{5x-7}{6}$.

【答案】(1)x=1

(2)$x=\frac{1}{3}$

(3)$y=\frac{1}{2}$

(4)x=-1

【分析】（1）按照去括号、移项、合并同类项、系数化为 1 的步骤解答即可；

（2）按照去分母、去括号、移项、合并同类项、系数化为 1 的步骤解答即可；

（3）按照移项、合并同类项、系数化为 1 的步骤解答即可；

（4）按照去分母、去括号、移项、合并同类项、系数化为 1 的步骤解答即可.

（1）

解：$3(2-x)=4-x$

6-3x=4-x

-3x+x=4-6

-2x=-2

x=1；

（2）

解：$\frac{x+1}{2}-1=\frac{3x-2}{3}$

3（x+1）-6=2（3x-2）

3x+3-6=6x-4

3x-6x=-4+6-3

-3x=-1

$x=\frac{1}{3}$；

（3）

解：$9-3y=5y+5$

-3y-5y=5-9

-8y=-4

y=$\frac{1}{2}$;

（4）

解：$\frac{3x-1}{4}-1=\frac{5x-7}{6}$

3（3x-1）-12=2（5x-7）

9x-3-12=10x-14

9x-10x=-14+3+12

-x=1

x=-1.

【点睛】本题主要考查了解一元一次方程，解一元一次方程的基本步骤为去分母、去括号、移项、合并同类项、系数化为 1.

【变式 5-3】（2022·全国·七年级课时练习）方程$x+\frac{x}{1+2}+\frac{x}{1+2+3}+\cdots+\frac{x}{1+2+\cdots+2018+2019}=2019$的解是$x=$____.

【答案】1010

【分析】方程左边整理后，利用折项法变形，计算即可求出解.

【详解】∵$x+\frac{x}{1+2}+\frac{x}{1+2+3}+\cdots+\frac{x}{1+2+\cdots+2018+2019}=2019$

∴方程整理为：$x(\frac{2}{1\times2}+\frac{2}{2\times3}+\frac{2}{3\times4}+\cdots+\frac{2}{2019\times2020})=2019$

即$2x(\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{2019\times2020})=2019$

即$2x(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2019}-\frac{1}{2020})=2019$

化简得，$2x(1-\frac{1}{2020})=2019$，即$2x\cdot\frac{2019}{2020}=2019$

整理得，$2x=2020$

解得，$x=1010$

故答案为：1010.

【点睛】此题考查了解一元一次方程，解一元一次方程的一般步骤：去分母，去括号，移项，合并同类项，系数化为 1，这仅是解一元一次方程的一般步骤，针对方程的特点，灵活应用，各种步骤都是为使方程逐渐

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/266054120031010232