第一部分

必考问题2　函数与方程及函数的实际应用

‖ 真题体验 ‖

- 1．(2010·天津)函数$f(x)=2^x+3x$的零点所在的一种区间是
- (　　).
- A．(－2，－1)　　B
-

- 2．(2012·湖北)函数$f(x)=x\cos x^2$在区间[0,4]上的零点个数为
- (　　).
- A．4　　B．5
- C．6　　D．7

答案：C　[令 $x\cos x^2=0$，则 $x=0$，或 $x^2=k\pi+\frac{\pi}{2}$，又 $x\in[0,4]$，因此 $x_k=\sqrt{k\pi+\frac{\pi}{2}}(k=0,1,2,3,4)$，共有 6 个零点．]

3．(2012·北京)函数$f(x)=x^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{1}{2}\right)^x$的零点个数为

( ).

A．0　　B．1

C．2　　D．3

答案：B [因为 $y=x^{\frac{1}{2}}$ 在 $x\in[0,+\infty)$上单调递增，$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 在 $x\in\mathbf{R}$ 上单调递减，所以 $f(x)=x^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 在 $x\in[0,+\infty)$上单调递增，又 $f(0)=-1<0$，$f(1)=\frac{1}{2}>0$，所以 $f(x)=x^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 在定义域内有唯一零点，选 B.]

4．(2010·**山东**)已知某生产厂家的年利润y(单位：万元)与年产量x(单位：万件)的函数关系式为$y=-\frac{1}{3}x^3+81x-234$，则使该生产厂家获取最大年利润的年产量为________万件．

解析　$\because y=f(x)=-\frac{1}{3}x^3+81x-234$，$\therefore y'=-x^2+81$.

令 $y'=0$，得 $x=9$，$x=-9$(舍去).

当 $0<x<9$ 时，$y'>0$，函数 $f(x)$单调递增；

当 $x>9$ 时，$y'<0$，函数 $f(x)$单调递减.

故当 $x=9$ 时，y 取最大值.

高考定位

- 高考对本部分的考察有：
- (1)①拟定函数零点；
- ②拟定函数零点的个数；
- ③根据函数零点的存在状况求参数值或取值范畴.
- (2)函数简朴性质的综合考察．函数的实际应用问题.
- (3)函数与导数、数列、不等式等知识综

应对策略

- 1．二次函数图象是连接三个“二次”的纽带，是理解和解决问题的核心，应认真研究、纯熟掌握．
- 2．有关零点问题，要学会分析转化，能够把与之有关的不同形式的问题，化归为适宜方程的零点问题．
- 3．函数模型的实际应用问题，重要抓好常见函数模型的训练，重点放在信息整顿与建模上．

必 备 知 识 方 法

- 必备知识

1

- 零点存在性定理
- 如果函数$y=f(x)$在区间$[a，b]$上的图象是持续不停的一条曲线，且有$f(a)\cdot f(b)<0$，那么，函数$y=f(x)$在区间$(a，b)$内有零点，即存在$c\in(a，b)$使得$f(c)=0$，这个c也就是方程$f(x)=0$的根.
- 注意下列两点：
- ①满足条件的零点可能不唯一；
- ②不满足条件时，也可能有零点.

2

- 在解决二次函数问题时，要注意f(x)的几个常见体现形式
- (1)y＝ax2＋bx＋c；
- (2)y＝a(x－x1)(x－x2)；
- (3)y＝a(x－h)2＋k.
- 应根据题目的特点灵活选用上述体现式.

3 应用函数模型解决实际问题的一般程序

$$\frac{\text{读题}}{(\text{文字语言})}\Rightarrow\frac{\text{建模}}{(\text{数学语言})}\Rightarrow\frac{\text{求解}}{(\text{数学应用})}\Rightarrow\frac{\text{反馈}}{(\text{检验作答})}$$

与函数有关的应用题，经常涉及到物价、路程、产值、环保等实际问题，也可涉及角度、面积、体积、造价的最优化问题．解答这类问题的关键是确切的建立相关函数解析式，然后应用函数、方程、不等式和导数的有关知识加以综合解答．

- 必备办法
- 1．在求方程解的个数或者根据解的个数求方程中的字母参数的范畴的问题时，数形结合是基本的解题办法，即把方程分拆为一种等式，使两端都转化为我们所熟悉的函数的解析式，然后构造两个函数$f(x)$，$g(x)$，即把方程写成$f(x)=g(x)$的形式，这时方程根的个数就是两个函数图象交点的个数，能够根据图象的变化趋势找到方程中字母参数所满足的多个关系．

- 2．二次函数$y＝a(x－h)2＋k(a\neq 0)$，$x\in[p，q]$的最值问题事实上是研究函数在$[p，q]$上的单调性．惯用办法：(1)注意是“轴动区间定”，还是“轴定区间动”，找出分类的原则；(2)运用导数知识，最值能够在端点和驻点处寻找．
- 3．$f(x)\geq 0$在$[p，q]$上恒成立问题，等价于$f(x)min\geq 0$，$x\in[p，q]$．

热 点 命 题 角 度

命题角度 1 函数零点的判断

- 常考察：①根据函数解析式判断零点所在的区间；②根据函数解析式求零点的个数问题．可采用零点鉴定定理、数形结正当求解，高考命题有加强的趋势，难度中档偏下．

【例 1】▸ (2011·陕西)函数 $f(x)=\sqrt{x}-\cos x$ 在$[0, +\infty)$内

(　　).

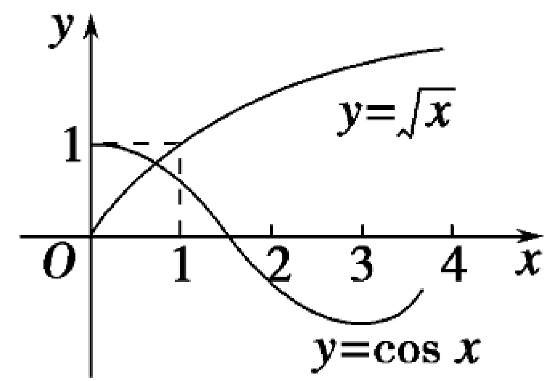
A．没有零点　　B．有且仅有一个零点

C．有且仅有两个零点　　D．有无穷多个零点

[审题视点] 将问题转化为判断 $y=\sqrt{x}$ 与 $y=\cos x$ 的交点个数

[听课记录]

答案：B [在同一直角坐标系中分别作出函数 $y=\sqrt{x}$ 和 $y=\cos x$ 的图象，如图，由于 $x>1$ 时，$y=\sqrt{x}>1$，$y=\cos x\leqslant 1$，所以两图象只有一个交点，即方程 $\sqrt{x}-\cos x=0$ 在 $[0,+\infty)$ 内只有一个根，所以 $f(x)=\sqrt{x}-\cos x$ 在 $[0,+\infty)$ 内只有一个零点．]



方法锦囊》　拟定函数零点的惯用办法：

- ①解方程鉴定法，若方程易求解时用此法；
- ②零点存在的鉴定定理法，经常要结合函数的性质、导数等知识；
- ③数形结正当，在研究函数零点、方程的根及图象交点的问题时，当从正面求解难以入手，能够转化为某一易入手的等价问题求解，如求解含有绝对值、分式、指数、对数、三角式等较复杂的函数零点问题，常转化为熟悉的两个函数图象的交点问题求解.

【突破训练 1】 函数$f(x)=\begin{cases}x^2+2x-3，x\leqslant 0,\\-2+\ln x，x>0\end{cases}$的零点个数为 (　　).

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

命题角度 2 函数思想的应用

- 函数思想在高考中并不单独考察，而往往与导数结合命制压轴性大题，试题围绕二次函数、二次方程及二次不等式的关系展开，解题的核心是从鉴别式、韦达定理、对称轴、开口方向等方面去考虑结论成立的全部条件，难度较大.

【例 2】▸ 已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$.

(1)若 $a>b>c$，且 $a+b+c=0$，试证明 $f(x)=0$ 必有两个实根；

(2)若对 $x_1, x_2\in\mathbf{R}$ 且 $x_1<x_2, f(x_1)\neq f(x_2)$，试证明方程 $f(x)=\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$ 有两不等实根，且必有一个实根属于 (x_1, x_2).

[**审题视点**] (1)将已知条件 $b=-(a+c)$ 代入 $f(x)=0$ 后，再对 $f(x)=0$ 分解因式求根. (2)利用函数与方程的思想构造函数 $f(x)-\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$，利用函数零点判定定理可知函数在 (x_1, x_2) 有一零点.

[听课记录]

证明　(1)若 $a>b>c$，$a+b+c=0$，

则 $a>0$，$c<0$，且 $b=-(a+c)$，

所以方程 $f(x)=0$ 可化为 $ax^2-(a+c)x+c=0$，

即 $a(x-1)\left(x-\frac{c}{a}\right)=0$，

则 $f(x)=0$ 有两根 $x_1=1$，$x_2=\frac{c}{a}$.

(2)令 $g(x)=f(x)-\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$，

$g(x_1)=\frac{1}{2}[f(x_1)-f(x_2)]$，$g(x_2)=\frac{1}{2}[f(x_2)-f(x_1)]$，

且 $x_1<x_2$，$f(x_1)\neq f(x_2)$，

所以 $g(x_1)g(x_2)=-\frac{1}{4}[f(x_1)-f(x_2)]^2<0$，

即函数 $g(x)$在区间$(x_1，x_2)$内有零点，则方程 $g(x)=0$ 有一实根属于$(x_1，x_2)$，由二次函数的性质可知必有另一实根.

方法锦囊» 二次函数问题普通运用二次方程、二次不等式之间的关系来解决，从而使方程问题函数化，函数问题方程化，体现了函数与方程的思想.

- 【突破训练2】 已知a是实数，函数$f(x)=2ax2+2x-3-a$，如果函数$y=f(x)$在区间$[-1,1]$上有零点，求实数a的取值范畴.

解　当 $a=0$ 时，$f(x)=2x-3$，

其零点 $x=\frac{3}{2}$不在区间$[-1,1]$上.

当 $a\neq0$ 时，函数 $f(x)$在区间$[-1,1]$分为两种情况：

①函数在区间$[-1,1]$上只有一个零点，

此时$\begin{cases}\Delta=4-8a(-3-a)\geq0, \\ f(-1)f(1)=(a-5)(a-1)\leq0,\end{cases}$ 或

$$\begin{cases}\Delta=4-8a(-3-a)=0, \\ -1\leq-\frac{1}{2a}\leq1.\end{cases}$$

解得 $1\leq a\leq5$ 或 $a=-\frac{3+\sqrt{7}}{2}$.

②函数在区间$[-1,1]$上有两个零点，此时

$$\begin{cases} a>0, \\ \Delta=8a^2+24a+4>0, \\ -1<-\dfrac{1}{2a}<1, \\ f(1)\geqslant 0, \\ f(-1)\geqslant 0 \end{cases} \text{或} \begin{cases} a<0, \\ \Delta=8a^2+24a+4>0, \\ -1<-\dfrac{1}{2a}<1, \\ f(1)\leqslant 0, \\ f(-1)\leqslant 0, \end{cases}$$

解得 $a\geqslant 5$ 或 $a<-\dfrac{3+\sqrt{7}}{2}$.

综上所述，如果函数在区间$[-1,1]$上有零点，

那么实数 a 的取值范围为$\left(-\infty, -\dfrac{3+\sqrt{7}}{2}\right]\cup[1, +\infty)$.