利用传统方法求线线角、线面角、二面角与距离的问题

【考点预测】

知识点 1：线与线的夹角

(1) 位置关系的分类：$\begin{cases}共面直线\begin{cases}平行直线\\相交直线\end{cases}\\异面直线：不同在任何一个平面内，没有公共点\end{cases}$

(2) 异面直线所成的角

①定义：设 a，b 是两条异面直线，经过空间任一点 O 作直线 $a' \parallel a$，$b' \parallel b$，把 a' 与 b' 所成的锐角 (或直角) 叫做异面直线 a 与 b 所成的角 (或夹角).

②范围：$\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$

③求法：平移法：将异面直线 a，b 平移到同一平面内，放在同一三角形内解三角形.

知识点 2：线与面的夹角

①定义：平面上的一条斜线与它在平面的射影所成的锐角即为斜线与平面的线面角.

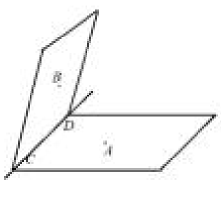
②范围：$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

③求法：

常规法：过平面外一点 B 做 $BB' \perp$ 平面 α，交平面 α 于点 B'；连接 AB'，则 $\angle BAB'$ 即为直线 AB 与平面 α 的夹角．接下来在 $Rt\triangle ABB'$ 中解三角形．即 $\sin\angle BAB' = \frac{BB'}{AB} = \frac{h}{斜线长}$(其中 h 即点 B 到面 α 的距离，可以采用等体积法求 h，斜线长即为线段 AB 的长度)；

知识点 3：二面角

(1)二面角定义：从一条直线出发的两个半平面所组成的图形称为二面角，这条直线称为二面角的棱，这两个平面称为二面角的面．（二面角 $\alpha - l - \beta$ 或者是二面角 $A - CD - B$）

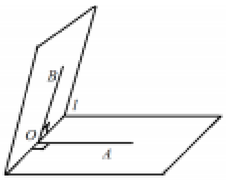


(2)二面角的平面角的概念：平面角是指以二面角的棱上一点为端点，在两个半平面内分别做垂直于棱的两条射线，这两条射线所成的角就叫做该二面角的平面角；范围 [0，π].

(3)二面角的求法

法一：定义法

在棱上取点，分别在两面内引两条射线与棱垂直，这两条垂线所成的角的大小就是二面角的平面角，如图在二面角 $\alpha - l - \beta$ 的棱上任取一点 O，以 O 为垂足，分别在半平面 α 和 β 内作垂直于棱的射线 OA 和 OB，则射线 OA 和 OB 所成的角称为二面角的平面角(当然两条垂线的垂足点可以不相同，那求二面角就相当于求两条异面直线的夹角即可)．



B
l
O
A

法二：三垂线法

在面 α 或面 β 内找一合适的点 A，作 $AO\perp\beta$ 于 O，过 A 作 $AB\perp c$ 于 B，则 BO 为斜线 AB 在面 β 内的射影，$\angle ABO$ 为二面角 $\alpha-c-\beta$ 的平面角．如图 1，具体步骤：

①找点做面的垂线；即过点 A，作 $AO\perp\beta$ 于 O；

②过点 (与①中是同一个点) 做交线的垂线；即过 A 作 $AB\perp c$ 于 B，连接 BO；

③计算：$\angle ABO$ 为二面角 $\alpha-c-\beta$ 的平面角，在 $Rt\triangle ABO$ 中解三角形．

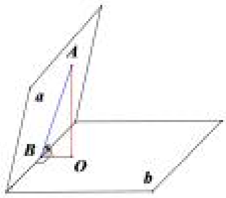


图 1

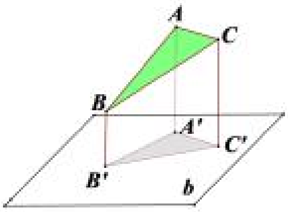


图 2

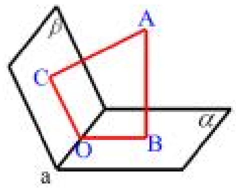


图 3

法三：射影面积法

凡二面角的图形中含有可求原图形面积和该图形在另一个半平面上的射影图形面积的都可利用射影面积公式 ($\cos\theta=\frac{S_{射}}{S_{斜}}=\frac{S_{\triangle A'B'C'}}{S_{\triangle ABC}}$，如图 2) 求出二面角的大小；

法四：补棱法

当构成二面角的两个半平面没有明确交线时，要将两平面的图形补充完整，使之有明确的交线 (称为补棱)，然后借助前述的定义法与三垂线法解题． 当二平面没有明确的交线时，也可直接用法三的摄影面积法解题．

法五：垂面法

由二面角的平面角的定义可知两个面的公垂面与棱垂直，因此公垂面与两个面的交线所成的角，就是二面角的平面角．

例如：过二面角内一点 A 作 $AB\perp\alpha$ 于 B，作 $AC\perp\beta$ 于 C，面 ABC 交棱 a 于点 O，则 $\angle BOC$ 就是二面角的平面角．如图 3． 此法实际应用中的比较少，此处就不一一举例分析了．

知识点 4：空间中的距离

求点到面的距离转化为三棱锥等体积法求解.

【题型归纳目录】

题型一：异面直线所成角

题型二：线面角

题型三：二面角

题型四：距离问题

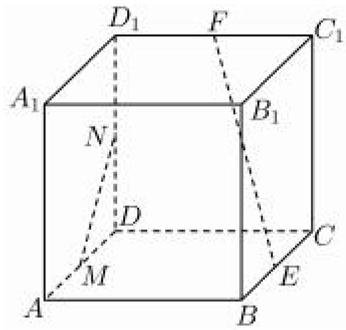
【典例例题】

题型一：异面直线所成角

例1.(2022·吉林·长春市第二实验中学高三阶段练习) 如图，在棱长为 **2** 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M,N,E,F 分别是 DD_1,BC,C_1D_1 的中点，则异面直线 MN 与 EF 所成的角为 (　　)

A. $\frac{\pi}{2}$　　B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{\pi}{6}$　　D. $\frac{\pi}{4}$



【答案】C

【解析】取 CC_1 的中点 H，连接 FH，EH，NH，ME，

由正方体的性质可知 $NH \underline{\angle} ME$ 且 $NH = ME$，所以 $MNHE$ 为平行四边形，
所以 $MN \underline{\angle} EH$，

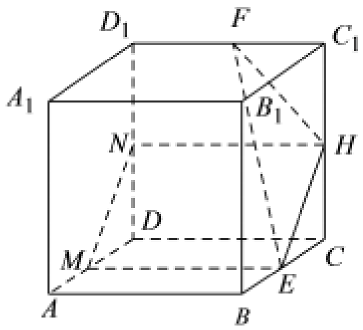
所以异面直线 MN 与 EF 所成的角的平面角为 $\angle FEH$，
又 $AB = 2$，

则 $EH = FH = \sqrt{2}$，$FE = \sqrt{2^2+1^2+1^2} = \sqrt{6}$，

则 $\cos\angle FEH = \frac{EH^2+EF^2-FH^2}{2\times EH\times EF} = \frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以 $\angle FEH = \frac{\pi}{6}$，

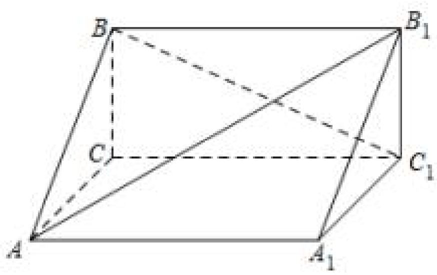
故选：C.



例2.(2022·四川内江·模拟预测 (理)) 如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$BC\perp$ 面 ACC_1A_1，$CA = CC_1 = 2CB$，则直线 BC_1 与直线 AB_1 夹角的余弦值为 (　　)

A. $\frac{2\sqrt{2}}{5}$　　B. $\frac{\sqrt{5}}{3}$

C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　D. $\frac{3}{5}$



【答案】C

【解析】连接 CB_1 交 BC_1 于 D，若 E 是 AC 的中点，连接 BE,ED，

由 $ABC-A_1B_1C_1$ 为直棱柱，各侧面四边形为矩形，易知：D 是 CB_1 的中点，
所以 $ED \underline{\angle} AB_1$，故直线 BC_1 与直线 AB_1 夹角，即为 ED 与 BC_1

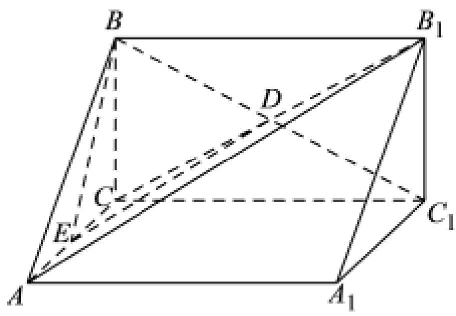
的夹角 $\angle BDE$ 或补角，

若 $BC = 1$，则 $CE = 1$，$BD = CD = \frac{\sqrt{5}}{2}$，

$BC\perp$ 面 ACC_1A_1，$EC\subset$ 面 ACC_1A_1，则 $CB\perp CE$，

而 $EC\perp CC_1$，又 $BC\cap CC_1 = C$，$BC,CC_1\subset$ 面 BCC_1B_1，故 $EC\perp$ 面 BCC_1B_1，

又 $CD\subset$ 面 BCC_1B_1，所以 $CE\perp CD$.



所以$ED=\sqrt{CD^2+CE^2}=\frac{3}{2}$, $BE=\sqrt{CB^2+CE^2}=\sqrt{2}$,

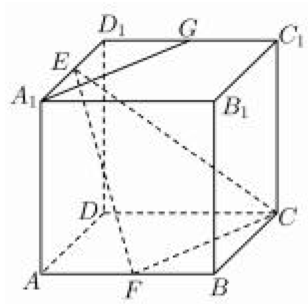
在$\triangle BDE$中$\cos\angle BDE=\frac{BD^2+ED^2-BE^2}{2BD\cdot ED}=\frac{\frac{5}{4}+\frac{9}{4}-2}{2\times\frac{\sqrt{5}}{2}\times\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

故选：C

例3.(2022·全国·模拟预测) 已知正方体中 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，E，G 分别为 A_1D_1，C_1D_1 的中点，则直线 A_1G，CE 所成角的余弦值为 (　　)

A. $\frac{\sqrt{30}}{10}$　　B. $\frac{\sqrt{30}}{15}$

C. $\frac{4\sqrt{5}}{15}$　　D. $\frac{\sqrt{145}}{15}$



【答案】C

【解析】如图所示：

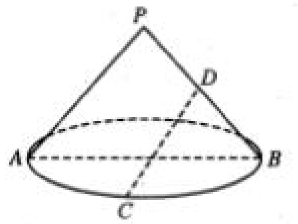
取 AB 的中点 F，连接 EF，CF，易知 $A_1G\parallel CF$，则 $\angle ECF$(或其补角) 为直线 A_1G 与 CE 所成角．不妨设 $AB=2$，则 $CF=\sqrt{5}$，$EF=\sqrt{6}$，$EC=3$，由余弦定理得 $\cos\angle ECF=\frac{9+5-6}{2\times3\times\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{15}$ 即直线 A_1G 与 CE 所成角的余弦值为 $\frac{4\sqrt{5}}{15}$．

故选：C．

例4.(2022·全国·模拟预测) 在如图所示的圆锥中，底面直径为 $4\sqrt{3}$，母线长为4，点 C 是底面直径 AB 所对弧的中点，点 D 是母线 PB 的中点，则异面直线 AB 与 CD 所成角的余弦值为 (　　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

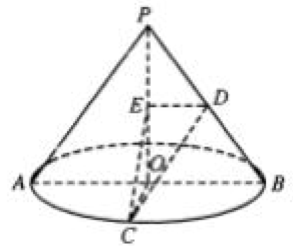
C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\frac{4}{5}$



【答案】B

【解析】设底面圆心为 O，连接 PO，OC，取 PO 的中点 E，连接 DE，CE，则 $DE\parallel AB$，且 $DE=\sqrt{3}$，所以 $\angle CDE$ 为 AB 与 CD 所成的角(或其补角)．

由题意知 $OB=2\sqrt{3}$，$PB=4$，所以 $PO=2$，所以 $CE=\sqrt{OE^2+OC^2}=\sqrt{13}$．由题意知 $OC\perp AB$，$OC\perp PO$，$AB\cap PO=O$，AB，$PO\subset$ 平面 POB，



所以 $OC\perp$ 平面 POB．又 $OC\subset$ 平面 POC，所以平面 $POC\perp$ 平面 POB，又平面 $POC\cap$ 平面 $POB=PO$，$DE\subset$ 平面 POB 且 $DE\perp PO$，

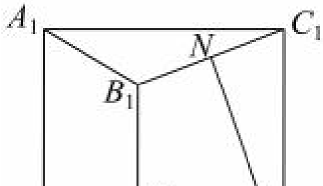
所以 $DE\perp$ 平面 POC，因为 $CE\subset$ 平面 POC，

所以 $DE\perp CE$．又 $DE=\frac{1}{2}OB=\sqrt{3}$，所以 $CD=\sqrt{DE^2+CE^2}=4$，

所以 $\cos\angle CDE=\frac{\sqrt{3}}{4}$．

故选：B．

例5.(2020·黑龙江·哈师大附中高三期末 (文)) 如图，在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB=AA_1=2$，M、N 分别是 BB_1 和 B_1C_1 的中点，则直线 AM 与 CN 所成角的余弦值等于 (　　)



A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　B. $\frac{2\sqrt{5}}{2}$

C. $\frac{2}{}$　　D. $\frac{3}{}$

5 5

【答案】D

【解析】作 BC 的中点 E，连接 B_1E，作 BE 的中点 F，连接 MF、A_1F，

即 $\angle AMF$ 为异面直线 AM 与 CN 所成的角，

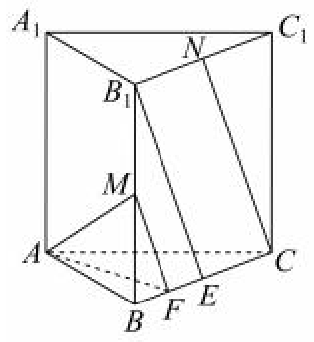
由已知条件得 $B_1E=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$，则 $MF=\frac{\sqrt{5}}{2}$，$AM=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$，

由余弦定理得 $AF=\sqrt{2^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\times2\times\frac{1}{2}\times\cos60^\circ}=\frac{\sqrt{13}}{2}$，

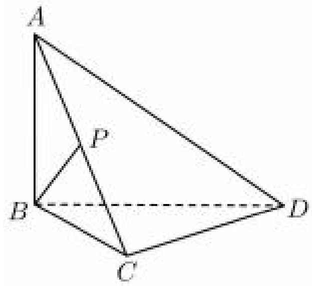
在△AMF 中，有余弦定理可知 $AF^2=AM^2+MF^2-2AM.MF.\cos\angle AMF$，

即 $\frac{13}{4}=5+\frac{5}{4}-2\times\sqrt{5}\times\frac{\sqrt{5}}{2}\times\cos\angle AMF$，解得 $\cos\angle AMF=\frac{3}{5}$，

故选：D.



例6.(2023·全国·高三专题练习（文)) 如图，在四面体 $ABCD$ 中，$\angle BCD=90^\circ$，$AB\perp$ 平面 BCD，$AB=BC=CD$，P 为 AC 的中点，则直线 BP 与 AD 所成的角为（　　）



A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{4}$

C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{\pi}{2}$

【答案】D

【解析】在四面体 $ABCD$ 中，$AB\perp$ 平面 BCD，$CD\subset$ 平面 BCD，则 $AB\perp CD$，而 $\angle BCD=90^\circ$，

即 $BC\perp CD$，又 $AB\cap BC=B$，$AB,BC\subset$ 平面 ABC，则有 $CD\perp$ 平面 ABC，而 $BP\subset$ 平面 ABC，

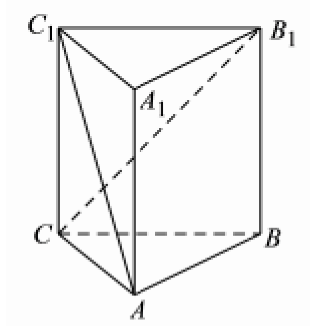
于是得 $CD\perp BP$，因 P 为 AC 的中点，即 $AC\perp BP$，而 $AC\cap CD=C$，$AC,CD\subset$ 平面 ACD，

则 $BP\perp$ 平面 ACD，又 $AD\subset$ 平面 ACD，从而得 $BP\perp AD$，

所以直线 BP 与 AD 所成的角为 $\frac{\pi}{2}$

. 故选：D

例7.(2022·河南省杞县高中模拟预测（文)) 如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AA_1\perp$ 平面 ABC，$\angle ACB=90^\circ$，$BC=AA_1=\sqrt{3}$，$AC=1$，则异面直线 AC_1 与 CB_1 所成角的余弦值为（　　）



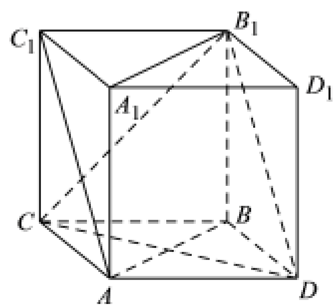
A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{6}}{4}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

【答案】B

【解析】把三棱柱补成如图所示长方体，连接 B_1D，CD，则 $B_1D\parallel AC_1$，

所以 $\angle CB_1D$ 即为异面直线 AC_1 与 CB_1 所成角（或补角）.



由题意可得 $CD=AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{1+3}=2$，

$B_1D=AC_1=\sqrt{AC^2+CC_1^2}=2$，$CB_1=\sqrt{3+3}=\sqrt{6}$

，

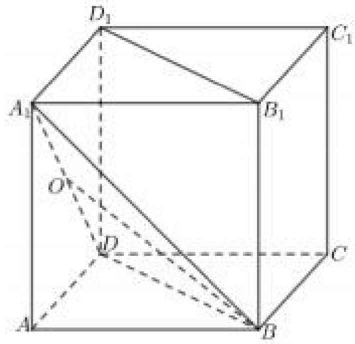
所以 $\cos\angle CB_1D=\frac{CB_1^2+B_1D^2-CD^2}{2CB_1\cdot B_1D}=\frac{6+4-4}{2\sqrt{6}\cdot2}=\frac{\sqrt{6}}{4}$.

故选：B.

例8.(2022·全国·高三专题练习) 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，过点 C 做直线 l，使得直线 l 与直线 BA_1 和 B_1D_1 所成的角均为 70°，则这样的直线 l(　　)

A. 不存在　　　　B. 2 条

C. 4 条　　　　D. 无数条



【答案】C

【解析】在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，连接 A_1D, BD，如图，

则有 $BD \underline{\angle} B_1D_1$，显然 $A_1B=A_1D=BD$，即直线 BA_1 和 B_1D_1 所成角 $\angle A_1BD=60^{\circ}$，

过点 C 做直线 l 与直线 BA_1 和 B_1D_1 所成的角均为 70° 可以转化为过点 B 做直线 l' 与直线 BA_1 和 BD 所成的角均为 70°，

$\angle A'BD$ 的平分线 AO 与直线 BA_1 和 BD 都成 30° 的角，让 l' 绕着点 B 从 AO 开始在过直线 AO 并与平面 $A'BD$ 垂直的平面内转动时，

在转动到 $l'\perp$ 平面 $A'BD$ 的过程中，直线 l' 与直线 BA_1 和 BD 所成的角均相等，角大小从 30° 到 90°，

由于直线 l' 的转动方向有两种，从而得有两条直线与直线 BA_1 和 BD 所成的角均为 70°，又 $\angle A'BD$ 的邻补角大小为 120°，其角平分线与直线 BA_1 和 BD 都成 60° 的角，

当直线 l' 绕着点 B 从 $\angle A'BD$ 的邻补角的平分线开始在过该平分线并与平面 $A'BD$ 垂直的平面内转动时，在转动到 $l'\perp$ 平面 $A'BD$ 的过程中，直线 l' 与直线 BA_1 和 BD 所成的角均相等，角大小从 60° 到 90°，

由于直线 l' 的转动方向有两种，从而得有两条直线与直线 BA_1 和 BD 所成的角均为 70°，综上得，这样的直线 l' 有 4 条，

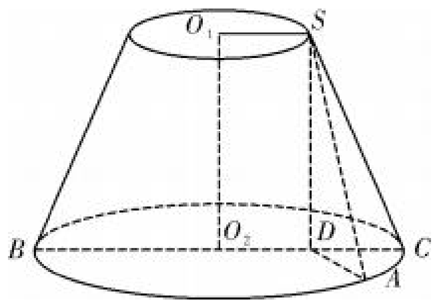
所以过点 C 与直线 BA_1 和 B_1D_1 所成的角均为 70° 的直线 l 有 4 条. 故选：C

例9.(2022·湖南·长沙一中高三开学考试) 已知点 A 为圆台 O_1O_2 下底面圆 O_2 的圆周上一点，S 为上底面圆 O_1 的圆周上一点，且 $SO_1=1$，$O_1O_2=$、3，$O_2A=2$，记直线 SA 与直线 O_1O_2 所成角为 θ，则(　　)

A. $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{6}\right]$　　B. $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right]$　　C. $\theta\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$　　D. $\theta\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$

【答案】C

【解析】由题意，设上 下底面半径分别为 R_1, R_2，其中 $R_1=1, R_2=2$，如图，过 S 作 SD 垂直下底面于 D，则 $O_1O_2\parallel SD$，



所以直线 SA 与直线 O_1O_2 所成角即为直线 SA 与直线 SD 所成角，即 $\angle ASD=\theta$，

而 $\tan\theta=\frac{AD}{SD}=\frac{AD}{\sqrt{3}}$，由圆的性质，$1=R_2-O_2D\le AD\le O_2D+R_2=3$，

所以 $\tan\theta=\frac{AD}{SD}=\frac{AD}{\sqrt{3}}\in\left[\frac{\sqrt{3}}{3},\sqrt{3}\right]$，所以 $\theta\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$，

故选：C.

例10.(2022·湖北武汉·模拟预测) 已知异面直线 a，b 的夹角为 θ，若过空间中一点 P，作与两异面直线夹角