

2024 年高考数学第一次模拟考试

数学（理科）全解全析

(考试时间: 120 分钟 试卷满分: 150 分)

注意事项:

1. 本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分。答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答第 I 卷时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。写在本试卷上无效。
3. 回答第 II 卷时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
4. 测试范围：**高考全部内容**
5. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第 I 卷（选择题）

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 已知复数 z 满足 $|z - 3 - 4i| = |2\sqrt{6} - i|$, 则 $\bar{z}$ ()

- A. $\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$
- B. $\frac{4}{5} - \frac{3}{5}i$
- C. $\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$
- D. $\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$

【答案】 A

【分析】根据复数的运算法则和模的定义即可求出复数 z ，再根据共轭复数定义即可得结果.

【详解】由 $z^3 = 4i$ ， $|z| = |2\sqrt{6}i|$ ，得 $z = \frac{\sqrt{(2\sqrt{6})^2 - (-1)^2}}{3 + 4i} = \frac{5 + 3i}{3 + 4i} = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$ ，

所以 $\bar{z} = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$,

故选：A.

2. 已知集合 $A = \{x | 2^x \leq 4\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} | \log_2 x \leq 3\}$, 则 $\partial_R A \cap B =$ ()

- A. 0,2 B. 0,2 C. 1,2 D. 1,2

【答案】 C

【分析】利用指数函数单调性求解集合 A，从而求解 $\bigcap_R A$ ，利用对数函数单调性结合整数概念求解集合 B，最后利用交集运算即可求解.

【详解】因为集合 $A = \{x \mid 2 \leq x \leq 4\}$ ，所以 $\complement_{\mathbb{R}} A = \{x \mid x < 2 \text{ 或 } x > 4\}$ ，

又 $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid \log_2 x \leq 3, x \in \mathbb{Z} \mid 0 < x \leq 2^3\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$,

所以 $\delta_{\mathbb{R}} A \cap B = \{1, 2\}$.

故选：C

3. 下列条件中，为“关于 x 的不等式 $mx^2 - mx - 1 < 0$ 对 $x \in \mathbb{R}$ 恒成立”的充分不必要条件的有（ ）

- A. $0 < m < 4$ B. $0 < m < 2$ C. $1 < m < 6$ D. $-1 < m < 6$

【答案】B

【分析】先求出关于 x 的不等式 $mx^2 - mx - 1 < 0$ 对 $x \in \mathbb{R}$ 恒成立的充要条件，然后根据充分不必要条件的定义即可求解.

【详解】若关于 x 的不等式 $mx^2 - mx - 1 < 0$ 对 $x \in \mathbb{R}$ 恒成立，
当 $m = 0$ 时，不等式等价于 $-1 < 0$ 恒成立，故 $m = 0$ 满足要求，

当 $m \neq 0$ 时，原不等式恒成立当且仅当 $\Delta = m^2 + 4m < 0$ ，解得 $0 < m < 4$ ，

综上所述，若关于 x 的不等式 $mx^2 - mx - 1 < 0$ 对 $x \in \mathbb{R}$ 恒成立，则当且仅当 $0 < m < 4$ ，
而选项中只有 $0 < m < 2$ 是 $0 < m < 4$ 的充分不必要条件.

故选：B.

4. 已知函数 $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x}$ ，则下列说法错误的是（ ）

- A. 函数 $f(x)$ 的图象关于原点对称 B. π 是函数 $f(x)$ 的一个周期
C. 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称 D. 当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时， $f(x)$ 的最小值为 1

【答案】C

【分析】根据函数奇偶性定义可判断 A；由三角函数的周期性与对称性可判断 B，C；根据复合函数结合正弦函数的性质即可得函数最值可判断 D.

【详解】选项 A：易知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x \mid x \neq k\pi, x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$ ，即 $\{x \mid x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$ ，

所以 $f(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} - \frac{\cos(-x)}{\sin(-x)} = \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x} = f(x)$ ，

所以 $f(x)$ 是奇函数，其图象关于原点对称，所以 A 正确.

选项 B： $f(x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} - \frac{\cos(x + \pi)}{\sin(x + \pi)} = \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x} = f(x)$ ，

所以 π 是函数 $f(x)$ 的一个周期，所以 B 正确.

选项 C：根据 $f(x) = -f(\frac{\pi}{2} - x) = f(\frac{\pi}{2} + x)$ ，得 $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{\pi}{2}, 0)$ 对称，故 C 错误.

选项 D：

$$f(x) = \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{-\cos 2x}{\frac{1}{2} \sin 2x} = -\frac{2 \cos 2x}{\sin 2x}$$

$$= -\frac{2}{\tan 2x}$$

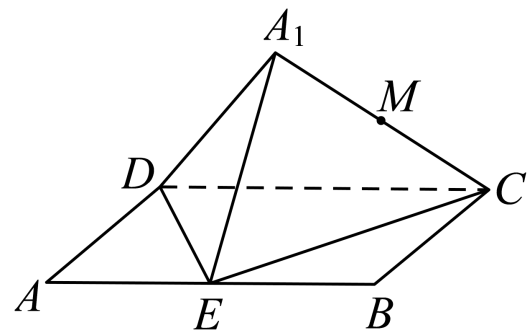
当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, $2x \in (0, \pi)$, 所以 $0 < \sin 2x \leq 1$,

所以 $f(x) = -\frac{2}{\tan 2x} \geq -2$, 当 $\sin 2x = 1$, 即 $x = \frac{\pi}{4}$ 时, 等号成立,

所以 $f(x)$ 的最小值为 -2 , 所以 D 正确.

故选: C.

5. 如图, 在矩形 ABCD 中, 已知 $AB = 2AD$, E 为边 AB 的中点. 将 $\triangle ADE$ 沿 DE 翻折成 $\triangle A_1DE$, 若 M 为线段 A_1C 的中点, 给出下列说法: ① 翻折到某个位置, 可以使得 $AC \perp$ 平面 A_1DE ; ② 无论怎样翻折, 点 M 总在某个球面上运动. 则 ().



A. ① 和② 都正确

B. ① 和② 都错误

C. ① 正确, ② 错误

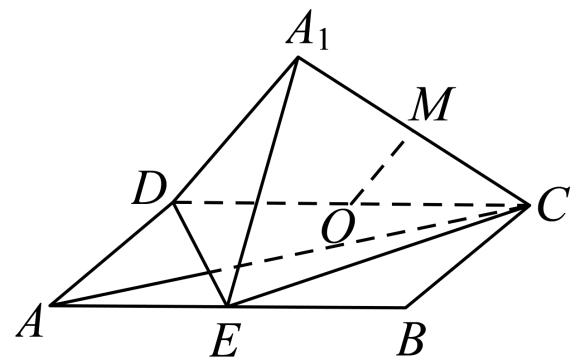
D. ① 错误, ② 正确

【答案】D

【分析】假设 $AC \perp$ 平面 A_1DE , 得到 $AC \perp DE$, 假设 AC, DE 不垂直, 假设不成立, ① 错误, 取 CD 中点 O, 连接 OM, $OM = \frac{1}{2}DA$, 得到② 正确, 得到答案.

【详解】对①: 假设 $AC \perp$ 平面 A_1DE , $DE \subset$ 平面 A_1DE , 则 $AC \perp DE$,

则 $\angle DEA = 45^\circ$, $\tan \angle CAB = \frac{1}{2} < 1$, 故 AC, DE 不垂直, 假设不成立, ① 错误;

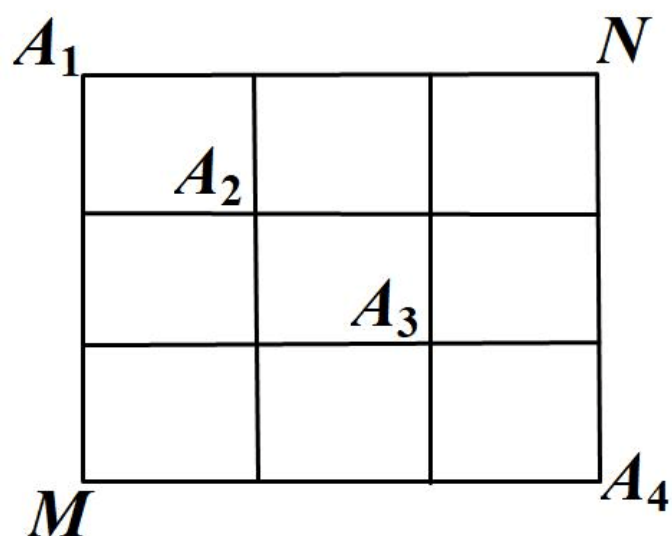


对②: 取 CD 中点 O, 连接 OM, M 为线段 A_1C 的中点, 则 $OM = \frac{1}{2}DA = \frac{1}{2}DA$,

则M 在以O 为球心，半径为 $\frac{1}{2}DA$ 的球上，② 正确；

故选：D

6. 如图，在某城市中，M N 两地之间有整齐的方格形道路网，其中 A_1 A_2 A_3 A_4 是道路网中位于一条对角线上的4个交汇处．今在道路网M N 处的甲 乙两人分别要到N M 处，他们分别随机地选择一条沿街的最短路径，以相同的速度同时出发，直到到达N M 处为止．则下列说法正确的是（ ）



- A. 甲从M 到达N 处的方法有120种
- B. 甲从M 必须经过 A_2 到达N 处的方法有64种
- C. 甲 乙两人在 A_2 处相遇的概率为 $\frac{81}{400}$
- D. 甲 乙两人相遇的概率为 $\frac{1}{2}$

【答案】C

【分析】分析甲从M 到达N 处以及甲从M 必须经过 A_2 到达N 处的走法，结合组合知识，可判断A，B；计算出甲 乙两人在 A_2 处相遇的走法种数，根据古典概型的概率公式即可判断C；分类考虑甲 乙两人相遇的地点，计算出相应的走法数，根据古典概型的概率公式即可判断D.

【详解】A 选项，甲从M 到达N 处，需要走6步，其中有3步向上走，3步向右走，

则甲从M 到达N 处的方法有 C_3^6 20种，A 选项错误；

B 选项，甲经过 A_2 到达N 处，可分为两步：第一步，甲从M 经过 A_2 需要走3步，

其中1步向右走，2步向上走，方法数为 C_1^3 种；

第二步，甲从 A_2 到N 需要走3步，其中1步向上走，2步向右走，方法数为 C_1^3 种，

故甲经过 A_2 到达N 的方法数为 $C_1^3 C_1^3$ 9种，B 选项错误；

C 选项，甲经过 A_2 的方法数为 $C_1^3 C_1^3$ 9种，乙经过 A_2 的方法数也为 $C_1^3 C_1^3$ 9种，

∴甲 乙两人在 A_2 处相遇的方法数为 $C_1^3 C_1^3 C_1^3 C_1^3$ 81种，

故甲、乙两人在 A_2 处相遇的概率为 $\frac{81}{C_3^6 C_3^6} = \frac{81}{400}$ ，C 选项正确；

D 选项，甲 乙两人沿最短路径行走，只可能在 A_1 、 A_2 、 A_3 、 A_4 处相遇，

若甲 乙两人在 A_1 处相遇，甲经过 A_1 处，则甲的前三步必须向上走，

乙经过 A_1 处，则乙的前三步必须向左走，两人在 A_1 处相遇的走法种数为 1 种；

若甲 乙两人在 A_2 处相遇，由 C 选项可知，走法种数为 81 种；

若甲 乙两人在 A_3 处相遇，甲到 A_3 处，前三步有 2 步向右走，后三步只有 1 步向右走，
乙到 A_3 处，前三步有 2 步向下走，后三步只有 1 步向下走，

$\therefore$ 两人在 A_3 处相遇的走法种数为 $C_2^3 C_1^3 C_2^3 C_1^3 = 81$ 种；

若甲 乙两人在 A_4 处相遇，甲经过 A_4 处，则甲的前三步必须向右走，乙经过 A_4 处，

则乙的前三步必须向下走，两人在 A_4 处相遇的走法种数为 1 种；

故甲 乙两人相遇的概率 $\frac{1}{C_3^6 C_3^6} = \frac{1}{100}$ ，D 选项错误，

故选：C.

【点睛】关键点睛：解答本题的关键在于利用组合数去计算对应的方法数，将从 M 到 N 的路线转变为六步，其中每一条路线向上步数确定后，则对应向右的步数也能确定，因此可以考虑从六步中选取向上或向右的步数，由此得到的组合数可表示对应路线的方法数.

7. 已知函数 $f(x) = \sin x - \omega$. 若 $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq f\left(\frac{\pi}{3}\right)$, 且 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上恰有 1 个零点, 则实数 ω 的取值范围为 ()

- A. $(0, \frac{3}{2}]$ B. $(\frac{3}{4}, \frac{3}{2}]$ C. $(\frac{3}{4}, \frac{9}{4}]$ D. $(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}]$

【答案】B

【分析】根据题意， $\frac{\pi}{3}$ 为 $f(x)$ 的最大值点，根据 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上恰有 1 个零点，结合三角函数图象，列不等式求出实数 ω 的取值范围.

【详解】由 $f(x) \leq f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ 得，

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = 1,$$

所以 $\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, 即 $\frac{\pi}{2} = 2k\pi + \frac{\pi}{3}$,

$$f(x) = \sin x = \sin\left(x - \frac{\pi}{2} + 2k\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right),$$

因为 $0 \leq x \leq \pi$, $\frac{\pi}{3} \leq x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{2\pi}{3}$,

因为 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上恰有 1 个零点，

所以

$$\textcircled{1} \quad \begin{matrix} \frac{3\pi}{2} & \frac{\pi}{3} & \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{\pi}{2} \end{matrix}, \text{ 无解,}$$

$$\textcircled{2} \quad \begin{matrix} \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{3} & 0 \\ \frac{\pi}{2} & \frac{2\pi}{3} & \frac{3\pi}{2} \end{matrix}, \text{ 解得 } \frac{3}{4}, \frac{3}{2},$$

综上，实数 ω 的取值范围为 $\frac{3}{4}, \frac{3}{2}$ ，

故选：B.

8. 已知实数 x, y 满足 $\begin{matrix} y & x & 2 \\ x & y & a \\ x & 1 & \end{matrix}$ ，其中 $a = \log_3 9 \log_2 8$ ，则实数 $\frac{x-1}{2y-1}$ 的最小值为（ ）

A. $\frac{2}{5}$

B. $\frac{2}{7}$

C. $\frac{2}{9}$

D. $\frac{2}{11}$

【答案】D

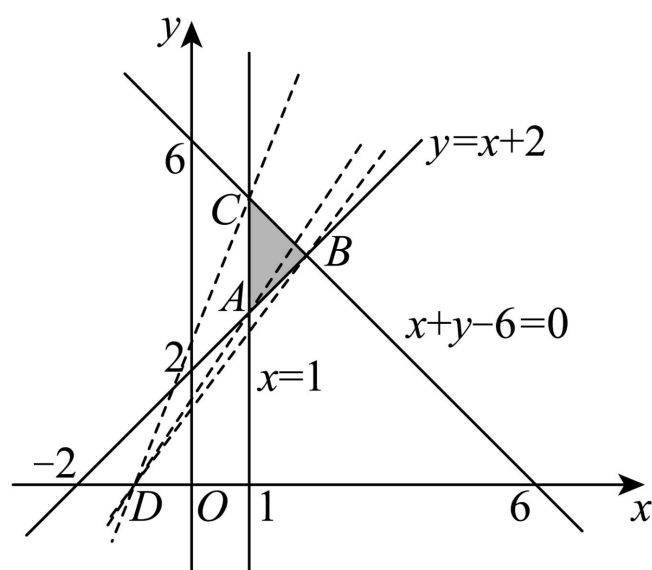
【分析】根据对数的运算性质可得 $a = 6$. 作出不等式组表示的可行域，设 $k = \frac{y - \frac{1}{2}}{x - 1}$ ，根据几何意义，

结合图象得出 $\frac{3}{2} \leq k \leq \frac{11}{4}$ ，进而即可根据不等式的性质得出答案.

【详解】由已知可得， $a = \log_3 9 \log_2 8 = 6$ ，

则不等式为 $\begin{matrix} y & x & 2 \\ x & y & 6 \\ x & 1 & \end{matrix}$.

作出可行域



设 $D(1, \frac{1}{2})$ ， $k = \frac{y - \frac{1}{2}}{x - 1}$ ，

则 k 表示可行域内的点与 D 点连线的斜率.

由图象可知，直线BD 的斜率最小，CD 的斜率最大.

联立 $\begin{cases} x+y=6 \\ y=x+2 \end{cases}$ 可得， $\begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$ ，所以 B (2, 4)， $k_{BD} = \frac{4-\frac{1}{2}}{2-1} = \frac{3}{2}$.

联立 $\begin{cases} x+y=6 \\ x=1 \end{cases}$ 可得， $\begin{cases} x=1 \\ y=5 \end{cases}$ ，所以 C (1, 5)， $k_{CD} = \frac{5-\frac{1}{2}}{1-1} = \frac{11}{4}$.

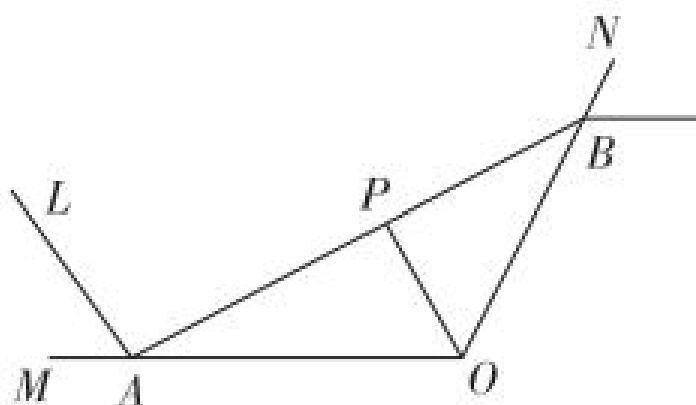
所以， $\frac{3}{2} \leq k \leq \frac{11}{4}$.

根据不等式的性质，可知 $\frac{4}{11} \leq \frac{1}{k} \leq \frac{x+1}{y-\frac{1}{2}} \leq \frac{2}{3}$,

所以， $\frac{2}{11} \leq \frac{x+1}{2y-1} \leq \frac{1}{2} \leq \frac{x+1}{y-\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{3}$.

故选：D.

9. 如图，某城市有一条公路从正西方MO 通过市中心O 后转向东北方ON，为了缓解城市交通压力，现准备修建一条绕城高速公路L，并在MO, ON 上分别设置两个出口A, B，若AB 部分为直线段，且要求市中心O 与AB 的距离为20 千米，则AB 的最短距离为（ ）



A. $20\sqrt{2}-1$ 千米

B. $40\sqrt{2}-1$ 千米

C. $20\sqrt{2}+1$ 千米

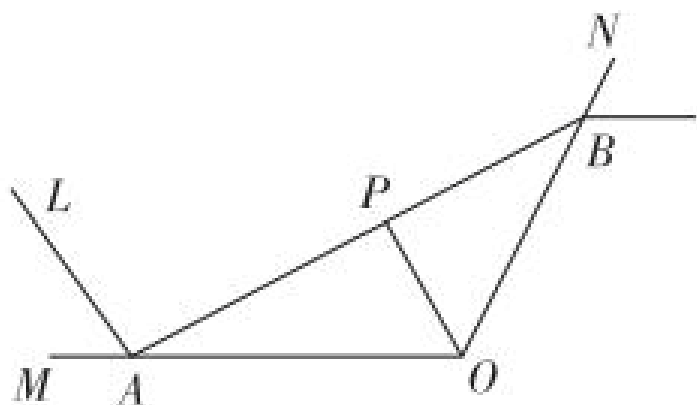
D. $40\sqrt{2}+1$ 千米

【答案】D

【分析】使用余弦定理及基本不等式，得到 $AB^2 \geq 2\sqrt{2}ab$ ，使用正弦定理及三角恒等变换得到

$ab \geq \frac{1600}{2\sqrt{2}}$ ，进而求得AB 的最短距离.

【详解】



在 $\triangle ABC$ 中, $\angle AOB = 135^\circ$,
 设 $AO = a, BO = b$,

则 $AB^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos 135^\circ = a^2 + b^2 - \sqrt{2}ab$,

当且仅当 $a = b$ 时取等号,

设 $\angle BAO = \alpha$ ，则 $\angle ABO = 45^\circ - \alpha$ ，

又O 到 AB 的距离为 20 千米，所以 $a = \frac{20}{\sin 45^\circ}$ ， $b = \frac{20}{\sin 45^\circ}$ ，

故^{ab} $\frac{400}{\sin \sin 45} \frac{1600}{2 \sin 2 \quad 45 \quad \sqrt{2}} \frac{1600}{2 \sqrt{2}}$ (22.5 时取等号),

所以 $AB = \frac{1600 \times 2 \times \sqrt{2}}{2 \times \sqrt{2}} = 1600 \times \sqrt{2} = 1^2$, 得 $AB = 40 \times \sqrt{2} = 1$,

故选：D

10. 若函数 $f(x) = a \ln x + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}$ ($a > 0$) 既有极大值也有极小值, 则错误的是 ()

B. ab 0

D. ac 0

【答案】A

【分析】求出函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$ ，由已知，可得函数 $f'(x)$ 在 0 ， $\frac{1}{2}$ 上有两个变号零点，转化为一元二次方程有两个不等的正根判断作答即可.

【详解】函数 $f(x)$ 的定义域为 $0, \frac{1}{2}$,

由 $f'(x) = a \ln x - \frac{b}{x} - \frac{c}{x^2} = 0$ ，得 $f'(x) = \frac{a}{x} - \frac{b}{x^2} - \frac{2c}{x^3} = \frac{ax^2 - bx - 2c}{x^3}$ ，

因为函数 $f(x)$ 既有极大值也有极小值,

所以函数 $f'(x)$ 在 0 , 上有两个变号零点, 而 $a > 0$,

所以方程 $ax^2 + bx + 2c = 0$ 有两个不等的正根 x_1, x_2 ,

$$\Delta \quad b_2 \quad 8ac \quad 0$$

所以 $x_1 = x_2 = \frac{b}{a} = 0$, 所以 $b_2 = 8ac = 0, a_b = 0, a_c = 0$,

$$\frac{x_1 x_2}{a} - \frac{2c}{a} = 0$$

所以 $a_2bc = 0$ ，即 $bc = 0$ 。

故 BCD 正确, A 错误.

故选：A.

11. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 若椭圆 C 上恰好有 6 个不同的点

12. 已知椭圆 C 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 点 P 在椭圆 C 上, 使得 $\triangle F_1PF_2$ 为等腰三角形, 则椭圆 C 的离心率的取值范围是 ()

$$A. \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$$

$$B. \frac{1}{2}, 1$$

$$C. \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \quad \frac{2}{3}, 1$$

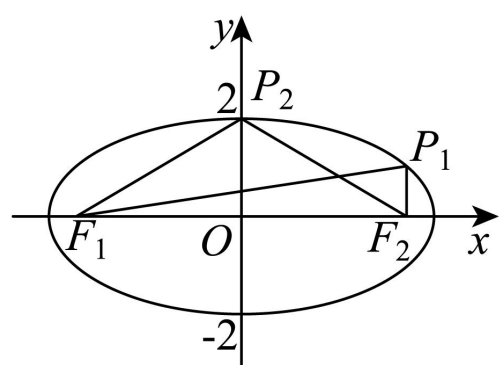
$$D. \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}, 1$$

【答案】D

【分析】分等腰三角形 $\triangle PF_1F_2$ 以 F_1F_2 为底或一腰两种情况讨论，在第一种情况下，直接确定点 P 为椭圆短轴的端点，在第二种情况下，分析可知，在每个象限内均存在点 P，使得 $|PF_1| = |F_1F_2|$ 或

$|PF_2| = |F_1F_2|$ ，设点 P (x, y) 在第一象限，结合两点间的距离公式可得出关于 a、c 的不等式，即可求出该椭圆离心率的取值范围。

【详解】如下图所示：



(1) 当点 P 与椭圆短轴的顶点重合时， $\triangle PF_1F_2$ 是以 F_1F_2 为底边的等腰三角形，此时，有 2 个满足条件的等腰 $\triangle PF_1F_2$ ；

(2) 当 $\triangle PF_1F_2$ 构成以 F_1F_2 为一腰的等腰三角形时，则 $|PF_1| = |F_1F_2|$ 或 $|PF_2| = |F_1F_2|$ ，此时点 P 在第一或第四象限，

由对称性可知，在每个象限内，都存在一个点 P，使得 $\triangle PF_1F_2$ 是以 F_1F_2 为一腰的等腰三角形，不妨设点 P (x, y) 在第一象限，则 $y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2$ ，其中 $0 < x < a$ ，

$$\text{则 } |PF_1| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2} = \sqrt{\frac{c^2}{a^2}x^2 + 2cx + a^2} = \frac{c}{a}x + a + 2c$$

$$\text{或 } |PF_2| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2} = \sqrt{\frac{c^2}{a^2}x^2 - 2cx + a^2} = a - \frac{c}{a}x + 2c,$$

$$\text{由 } \frac{c}{a}x + a + 2c = \frac{2ac}{c} \text{ 可得 } x = \frac{2ac - a^2}{c}, \text{ 所以, } 0 < \frac{2ac - a^2}{c} < a, \text{ 解得 } \frac{1}{2} < e < \frac{c}{a} + 1,$$

$$\text{由 } a - \frac{c}{a}x + 2c = \frac{a^2 - 2ac}{c}, \text{ 所以, } 0 < \frac{a^2 - 2ac}{c} < a, \text{ 解得 } \frac{1}{3} < e < \frac{c}{a} + \frac{1}{2},$$

综上所述，该椭圆的离心率的取值范围是 $\frac{1}{3}, \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}, 1$ 。

故选：D.

【点睛】方法点睛：求解椭圆或双曲线的离心率的方法如下：

- (1) 定义法：通过已知条件列出方程组，求得 a 、 c 的值，根据离心率的定义求解离心率 e 的值；
- (2) 齐次式法：由已知条件得出关于 a 、 c 的齐次方程，然后转化为关于 e 的方程求解；
- (3) 特殊值法：通过取特殊位置或特殊值，求得离心率.

12. 已知 $a, b, c \in (1, +\infty)$ ，且 $e^a = 9a \ln 11$, $e^b = 10b \ln 10$, $e^c = 11c \ln 9$ ，则 a, b, c 的大小关系为（ ）

- A. $a < b < c$
- B. $c < a < b$
- C. $b < c < a$
- D. $c < b < a$

【答案】D

【分析】构造函数 $f(x) = \frac{e^x}{x}, x > 1$ ，利用导数讨论其单调性，将问题转化为比较

$f(a), f(b), f(c)$ ，再转化为比较 $9 \ln 11, 10 \ln 10, 11 \ln 9$ ，构造函数 $g(x) = 20 - x \ln x$ ，利用导数讨论其单调性，利用单调性即可得答案.

【详解】由题知， $\frac{e^a}{a} = 9 \ln 11, \frac{e^b}{b} = 10 \ln 10, \frac{e^c}{c} = 11 \ln 9$ ，

记 $f(x) = \frac{e^x}{x}, x > 1$ ，则 $f'(x) = \frac{x - 1 - e^x}{x^2}$ ，

当 $x > 1$ 时， $f'(x) < 0$ ， $f(x)$ 单调递减，

故比较 a, b, c 的大小关系，只需比较 $f(a), f(b), f(c)$ 的大小关系，

即比较 $9 \ln 11, 10 \ln 10, 11 \ln 9$ 的大小关系，

记 $g(x) = 20 - x \ln x, x > 1$ ，则 $g'(x) = 20 - \ln x - \frac{20}{x}$ ，

记 $h(x) = 20 - \ln x - \frac{20}{x}$ ，则 $h'(x) = -\frac{1}{x} + \frac{20}{x^2}$ ，

所以 $h(x)$ 在 $(1, 20)$ 上单调递增，

又 $h(8) = 20 - \ln 8 - \frac{20}{8} = 1 - \frac{3}{2} - \ln 8 = \frac{3}{2} - \ln e^2 > 0$ ，

所以，当 $x > 8$ 时， $h(x) > 0$ ， $g(x)$ 单调递增，

所以 $g(11) > g(10) > g(9)$ ，即 $9 \ln 11 > 10 \ln 10 > 11 \ln 9$ ，

所以 $f(a) > f(b) > f(c)$ ，所以 $a < b < c$.

故选：D

【点睛】本题难点在于构造函数 $f(x) = \frac{e^x}{x}, x > 1$ ，将问题转化成比较 $f(a), f(b), f(c)$ 的大小

关系后，需要再次构造函数 $g(x) = 20 - x \ln x, x > 1$ ，对学生观察问题和分析问题的能力有很高的要求，属于难题.

第II卷（非选择题）

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分

13. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的渐近线与圆 $x^2 + y^2 - 6x + 8 = 0$ 相切，则双曲线的离心率为_____.

【答案】 $\frac{3\sqrt{2}}{4}$

【分析】 首先将圆的方程化为标准式，即可得到圆心坐标与半径，再表示出渐近线方程，利用圆心到直线的距离等于半径即可得到 $c = 3b$ ，即可求出离心率.

【详解】 圆 $x^2 + y^2 - 6x + 8 = 0$ 即 $(x - 3)^2 + y^2 = 1$ ，圆心为 $(3, 0)$ ，半径 $r = 1$ ，

双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x$ ，

依题意 $d = \frac{|3b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 1$ ，即 $c = 3b$ ，又 $c^2 = a^2 + b^2$ ，所以 $a = 2\sqrt{2}b$ ，

所以离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{3b}{2\sqrt{2}b} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$.

故答案为： $\frac{3\sqrt{2}}{4}$

14. 在 $\triangle ABC$ 中，过重心 G 的直线交边 AB 于点 P ，交边 AC 于点 Q (P, Q 为不同两点)，且 $\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{AB}} = \frac{\overrightarrow{AQ}}{\overrightarrow{AC}}$ ，则 $\frac{AP}{AB}$ 的取值范围为_____.

【答案】 $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$

【分析】 利用重心性质有 $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ ，代入已知 $\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{AB}} = \frac{\overrightarrow{AQ}}{\overrightarrow{AC}}$ ， $\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC}$ 得

$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AP} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AQ}$ ，由 P, G, Q 三点共线，得 $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$ ，然后可化为一元函数，再利用导数求得值域.

【详解】 由题意 $\frac{1}{2} \leq \frac{AP}{AB} \leq 1$ ， $\frac{1}{2} \leq \frac{AQ}{AC} \leq 1$ ，

延长 AG 交 BC 于 D ，则 D 是 BC 中点，

$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ ，

又 $\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{AB}} = \frac{\overrightarrow{AQ}}{\overrightarrow{AC}}$ ， $\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC}$ ，所以 $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AP} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AQ}$ ，

又 P, G, Q 三点共线，所以 $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$ ， $\mu = \frac{\lambda}{3\lambda + 1}$ ，

$\frac{1}{3\lambda + 1}$ ，

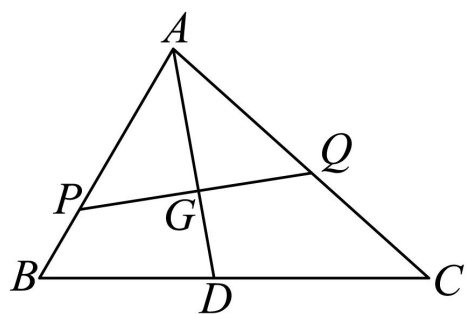
设 $f(\lambda) = \frac{1}{3\lambda + 1}$ ，则 $f(\lambda) = 1 - \frac{3}{(3\lambda + 1)^2} = \frac{3 - (3\lambda + 2)}{(3\lambda + 1)^2}$ ，

$\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{2}{3}$ 时, $f(x) \leq 0$, $f(x)$ 递减, $\frac{2}{3} \leq x \leq 1$ 时, $f(x) \geq 0$, $f(x)$ 递增,

$$f(x)_{\min} = f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}, \text{ 又 } f\left(\frac{1}{2}\right) = f(1) = \frac{3}{2}, \text{ 即 } f(x)_{\max} = \frac{3}{2},$$

所以 $f(x)$ 的取值范围是 $\left[\frac{4}{3}, \frac{3}{2}\right]$,

故答案为: $\left[\frac{4}{3}, \frac{3}{2}\right]$,



15. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = \sqrt{3}$, $C = \frac{\pi}{3}$, 当 $BC = 3AC$ 取最大值时, $AC =$ _____.

【答案】 $\frac{7\sqrt{13}}{13}$

【分析】用正弦定理将 $BC = 3AC$ 转化求得最大值, 根据 $C = \frac{\pi}{3}$ 用余弦定理联立方程组即可求解.

【详解】设 $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$,

$$c = \sqrt{3}, C = \frac{\pi}{3},$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2,$$

$$a = 3b = 2\sin A = 6\sin B,$$

$$a = 3b = 2\sin A = 6\sin\left(\frac{\pi}{3} - A\right),$$

$$a = 3b = 2\sin A = 6\sin\left(\frac{\pi}{3} - A\right),$$

$$a = 3b = 5\sin A = 3\sqrt{3}\cos A,$$

$$a = 3b = 2\sqrt{13}\sin A, \text{ 其中 } \cos A = \frac{5}{2\sqrt{13}},$$

$$\sin A > 0, \cos A > 0, A \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

当 $A = \frac{\pi}{2} - 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) 时 $a = 3b$ 取最大值 $2\sqrt{13}$,

$$C = \frac{\pi}{3},$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{1}{2},$$

$$a = 3b = 2\sqrt{13}$$

$$\frac{a^2 + b^2 - 3}{2ab} = \frac{1}{2},$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/266155150142011002>