

线性代数

第一次讨论课

1. 导语
2. 讨论内容目录
3. 正文
4. 个人总结

导语：

矩阵是研究线性代数方程组和其他相关问题的有力工具，也是线性代数的主要研究对象之一。它的理论和方法在自然科学、工程技术、社会科学等众多领域等都有极其广泛的应用。矩阵作为一些抽象数学的具体表现，在数学研究中占有极其重要的地位。本文从矩阵的概念讨论矩阵的运算及性质，进而讨论用途很广的矩阵的初等变换及其应用。

讨论内容目录

矩阵的初等变换及其应用

1. 两个矩阵的等价
2. 两个矩阵的乘积
3. 将矩阵化为行阶梯型、行最简形、标准型
4. 求矩阵的秩
5. 求可逆矩阵的逆矩阵
6. 求线性方程组的解
7. 判断向量组的线性相关性
8. 求向量组的秩与极大无关组
9. 求矩阵的对角化矩阵（采用行列初等变换，对角线元素为特征值）
10. 二次型化为标准形

正文

一、 矩阵的等价

1. 定义：若矩阵 A 经过一系列初等行变换化为 B 矩阵，则称 A

与 B 行等价；若矩阵 A 经过一系列初等列变换化为 B 矩阵，
则称 A 与 B 列等价；若矩阵 A 经过一系列初等变换化为 B 矩阵，
则称 A 与 B 等价（相抵）。

2. 矩阵的等价变换形式主要有如下几种：

- 1) 矩阵的 i 行（列）与 j 行（列）的位置互换；
- 2) 用一个非零常数 k 乘矩阵的第 i 行（列）的每个元；
- 3) 将矩阵的第 j 行（列）的所有元得 k 倍加到第 i 行（列）
的对应元上去；

即如果两个矩阵可通过有限次上述变换中的一个或几个的组合
变为一样的，两个矩阵等价。

3. 矩阵等价具有下列性质

- （1）反身性 任一矩阵 A 与自身等价；
- （2）对称性 若 A 与 B 等价，则 B 与 A 等价；
- （3）传递性 若 A 与 B 等价，B 与 C 等价，则 A 与 C 等价；

注意：矩阵作初等变换是矩阵的一种运算，得到的是一个新矩阵，这个矩阵一般与原矩阵不会相等。

下面举例说明矩阵等价及等价变换：

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -6 & 4 \\ 0 & 8 & -24 & 10 \\ 0 & -4 & 12 & -2 \\ 0 & 4 & -12 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 + r_3}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -6 & 4 \\ 0 & 8 & -24 & 10 \\ 0 & -4 & 12 & -2 \\ 0 & 4 & -12 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2+3r_1 \\ r_3-r_1 \\ r_4+2r_1}} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -6 & 4 \\ 0 & 8 & -24 & 10 \\ 0 & -4 & 12 & -2 \\ 0 & 4 & -12 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{r_4+r_3 \\ r_3+\frac{1}{2}r_1}} \\
\begin{pmatrix} -1 & 3 & -6 & 4 \\ 0 & 8 & -24 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_4-2r_3} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -6 & 4 \\ 0 & 8 & -24 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B \\
\xrightarrow{\substack{\frac{1}{3}r_1 \\ r_2-10r_3 \\ r_1-4r_3 \\ \frac{1}{8}r_2}} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{r_1-3r_2 \\ -r_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = C$$

显然，根据矩阵等价的定义，以上变换过程中的每一个矩阵均为等价的，每个步骤都是等价转换。

二．矩阵的乘法

1. 定义：设 $A = (a_{ij})$ 是一个 $m \times s$ 的矩阵， $B = (b_{ij})$ 是一个 $s \times n$ 的矩阵，规定矩阵 A 与矩阵 B 的乘积是 $m \times n$ 矩阵 $C = (c_{ij})$ ，记为 $C = AB$ ，其中

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{is}b_{sj} = \sum_{k=1}^s a_{ik}b_{kj}$$

$$(i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n)$$

由矩阵乘积的定义可见，不是任何两个矩阵都可以相乘。位于左边矩阵的列数与位于右边矩阵的行数相等的两个矩阵才能相乘；其乘积是一个与左边矩阵有相同行数，与右边矩阵有相同列数的矩阵；乘积矩阵的第 i 行第 j 列的元等于左边矩阵第 i 行的各元与右边矩阵第 j 列的对应元乘积之和。所谓对应元，及第 i 行的列号与第 j 列的行号相同的元。

例：求矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ 与 } B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ 的乘积。}$$

$$\begin{aligned} \text{解：} AB &= \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \times 2 + 1 \times 1 + (-1) \times 0 & 3 \times 3 + 1 \times 5 + (-1) \times 3 \\ 2 \times 2 + 0 \times 1 + 4 \times 0 & 2 \times 3 + 0 \times 5 + 4 \times 3 \\ 1 \times 2 + (-1) \times 1 + 2 \times 0 & 1 \times 3 + (-1) \times 5 + 2 \times 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 & 11 \\ 4 & 18 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

注意：1). 矩阵乘法不满足交换律,即在一般情况下, $AB \neq BA$.

2). 两个非零矩阵之积可能为零矩阵。

3). 若 $A \neq 0, AB=AC$, 不能推出 $B=C$.

2、矩阵乘法满足下列运算规律：

$$(1) \quad (AB)C = A(BC);$$

$$(2) \quad A(B+C) = AB+BC, (B+C)A = BA+CA;$$

$$(3) \quad \alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B), \text{ 其中 } \alpha \text{ 是数};$$

$$(4) \quad E_m A_{m \times n} = A_{m \times n} E_n = A_{m \times n}.$$

三、将矩阵化为行阶梯型、行最简型、标准型

将矩阵化为行阶梯型、行最简型、标准型就是利用矩阵的初等变换。下面是以上三种形式的定义：

1、若满足以下两个条件：

(1) 若有零行（元全为 0 的行），则零行位于非零行（元不全为 0 的行）的下方；

(2) 每个首非零元（非零行从左边数起第一个不为零的元）前面零

的个数逐行增加。

则为行阶梯型，简称阶梯型。

2、首非零元为 1，且首非零元所在的列其他元都为 0 的行阶梯形称为行最简矩阵，简称最简形。

3、对任何 $m \times n$ 矩阵 A ，必可经有限次初等变换化为如下形式的矩阵

$$N = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

我们称 N 为矩阵 A 的等价标准形。此标准形是有 m, n, r 完全确定的，其中 r 就是行阶梯矩阵中非零行的个数。

是否每个矩阵都能经过初等变换化为行阶梯型或行最简型呢？下面这个定理给出了肯定的回答。

定理 1：任意 $m \times n$ 矩阵 A 总可以经初等变换行阶梯型及行最简型矩阵。

推论： $m \times n$ 矩阵 A 经过初等变换化为的行最简型是唯一的。

例：

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -6 & 4 \\ 0 & 8 & -24 & 10 \\ 0 & -4 & 12 & -2 \\ 0 & 4 & -12 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 + r_3} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -6 & 4 \\ 0 & 8 & -24 & 10 \\ 0 & -4 & 12 & -2 \\ 0 & 4 & -12 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} r_2 + 3r_1 \\ r_3 - r_1 \\ r_4 + 2r_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -6 & 4 \\ 0 & 8 & -24 & 10 \\ 0 & -4 & 12 & -2 \\ 0 & 4 & -12 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} r_4 + r_3 \\ r_3 + \frac{1}{2}r_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -6 & 4 \\ 0 & 8 & -24 & 10 \\ 0 & -4 & 12 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_4 - 2r_3} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -6 & 4 \\ 0 & 8 & -24 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

$$\xrightarrow{\begin{matrix} \frac{1}{3}r_1 \\ r_2-10r_3 \\ r_1-4r_3 \\ \frac{1}{8}r_2 \end{matrix}} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} r_1-3r_2 \\ -r_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = C$$

则 B 为阶梯型，C 为最简型。

四、求矩阵的秩

矩阵的秩是矩阵的一个重要的数值特征，是反映矩阵本质属性的一个不变的量。它在线性方程组等问题的研究起着非常重要的作用。下面我们介绍一下矩阵秩的求解方法。

1. 矩阵的秩的定义：

如果矩阵 A 中有一个不等于零的 r 阶子式 D，而所有的 r+1 阶子式（如果存在的话）全为 0，那么 D 称为矩阵 A 的一个最高阶非零子式。数 r 称为矩阵 A 的秩，记作 R(A) 或 r(A)，并规定零矩阵的秩为 0。

由定义可得：

(1) 若矩阵 A 有一个 r 阶子式不等于零，则 $(R) \geq r$,

若矩阵 A 的所有 r+1 子式全为零，则 $(R) \leq r$.

(2) 若任意 m*n 矩阵 A，必有 $R(A)=R(A^T)$.

(3) 矩阵 A 的秩既不会超过它的行数，也不会超过它的列数。

(4) 若矩阵 B 是矩阵 A 的子矩阵，则 $R(B) \leq R(A)$.

2. 求矩阵的秩的方法

(1) 子式判别法（定义）：

例 $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 为阶梯型矩阵，求 $R(B)$.

解：由于 $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$ ，存在一个二阶子式不为零，而所有三阶子式全为零，所以 $R(B) = 2$.

结论：阶梯型矩阵的秩=台阶数.

(2) 用初等变换求矩阵的秩

定理：初等变换不改变矩阵的秩

推论 设 A 是任一 $m \times n$ 矩阵， P 、 Q 分别是 m 阶、 n 阶可逆（满秩）矩阵，则必有

$$R(PA) = R(AQ) = R(PAQ).$$

例： $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & 3 & -6 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

求 $R(A)$ 。

解： $A \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以 $R(A) = 2$.

求矩阵 A 的秩方法：

- 1) 利用初等行变换化矩阵 A 为阶梯形矩阵 B
- 2) 数阶梯形矩阵 B 非零行的行数即为矩阵 A 的秩。

五、求可逆矩阵的逆矩阵

逆矩阵是矩阵中单独的一个分支，但是其求解等各种方法与矩阵基本方法规律相同。

下面是矩阵的逆矩阵的定义：

设 A 为 n 方阵，若存在 n 阶方阵 B，使

$$AB=BA=E$$

则称 A 为可逆矩阵或 A 是可逆的，并且称 B 为 A 的逆矩阵。

可逆矩阵具有唯一性，即 A 若可逆，其可逆矩阵是唯一的。

矩阵的逆矩阵的求法有三种：

(1) 特殊的矩阵。

1) 矩阵为对角阵或者分块都为对角阵，可用特殊的方法求解。

若矩阵为对角阵，逆矩阵就是每一个元素分别求倒数放到原来位置。

若矩阵分块都为对角阵，可将每个小块分别求逆矩阵，然后将逆矩阵放到原来的位置即可。

2) 矩阵为两阶的矩阵，可运用公式求解（公式根据逆矩阵的定义推出）

若 $ad-bc \neq 0$ ，则矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 可逆，且逆矩阵为

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

(2) 运用矩阵的初等变换求矩阵的逆矩阵。

其原理如下：

若 A 为 n 阶可逆矩阵，其逆也是 n 阶可逆矩阵，故 A 可表示为初等矩阵的乘积，即存在初等矩阵 $P_1, P_2, \dots, P_m$ ，使得

$A^{-1} = P_1 P_2 \dots P_m$ 。由逆矩阵定义，有

$$A^{-1}(A:E) = (E:A^{-1})$$

即

$$P_1 P_2 \dots P_m (A:E) = (E:A^{-1})$$

即有

$$(A:E) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (E:A)$$

若摆放方式不同也可以将 A, E 竖放在经过初等列变换可得逆矩阵与单位矩阵。与第一个问题相关的是，变换前后两个矩阵等价。

(3) 根据公式 $A^* A = A A^* = |A| E$ ，可知 A 的逆矩阵为 $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$ 。

这个公式在使用时十分复杂，但是若用于理论及电脑计算就有较大优势。

例：信息加密问题

将 26 个英文字母按顺序逐一与数字对应后，“send money” 编码

为 19,5,14,13,15,14,5,25，如果直接发出编码，很容易被人破译，显然这是不可取的，如何进行加密呢，可将式子表示为一个三阶方阵，乘以一个三阶方阵后密码的破译难度就大多了，问题是如何解密呢？根据式子 $AB=C$ ，知 $B=A^{-1}C$ 。可知破译方式，即将得到的信息乘以逆矩阵就可以了。

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

则

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

明文 SEND MONEY 对应的 9 个数值按 3 列被排成以下矩阵：

$$B = \begin{pmatrix} 19 & 4 & 14 \\ 5 & 13 & 5 \\ 14 & 15 & 25 \end{pmatrix}$$

矩阵乘积：

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 19 & 4 & 14 \\ 5 & 13 & 5 \\ 14 & 15 & 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 81 & 77 & 93 \\ 62 & 73 & 79 \\ 38 & 32 & 44 \end{pmatrix}$$

对应密文编码为：

81,77,93,62,73,79,38,32,44。

合法用户用密钥乘上述矩阵即可解密得到明文。

$$A^{-1}(AB) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 81 & 77 & 93 \\ 62 & 73 & 79 \\ 38 & 32 & 44 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 4 & 14 \\ 5 & 13 & 5 \\ 14 & 15 & 25 \end{pmatrix}$$

最后得到的序列对应写出明文即可。

这里所述仅是信息加密的原理，实际应用中密钥矩阵的阶数可能很

大，其构造也十分复杂。

六、求线性方程组的解

求线性方程组的解可利用行列式和矩阵

1. 利用行列式求解

用行列式求线性方程组的解的主要原理是**克拉默法则**，下面是克拉默法则的内容：

如果线性方程组的系数行列式 $D=|A| \neq 0$ ，则线性方程组有唯一解且

$$x_j = \frac{D_j}{D}, \quad j=1, 2, 3, \dots, n;$$

其中 D_j 是用常数项 $b_1, b_2, \dots, b_n$ 替换系数矩阵 D 中的第 j 列所称的行列式。

由克拉默法则，可得下述定理：

齐次线性方程组有非零解的充要条件是它的系数行列式 $|A|=0$ 。

这种方法是十分容易理解的，用于计算机计算也十分方便，但是不看出判断线性方程组的解的根本性质，因此要用到矩阵等方法进一步讨论。

2 利用矩阵判定线性方程组的解

判断线性方程组的解有如下定理：

n 元线性方程组 $Ax=b$,

(1) 有解的充要条件是 $R(A) = R(B)$;

(2) 有唯一解的充要条件是 $R(A) = R(B) = n$;

(3) 有无穷多解的充要条件是 $R(A) = R(B) < n$.

(其中 B 为 A 的增广矩阵)

注意： (1) 的你的否命题为：线性方程组 $Ax=b$ 误解的充要条件是 $R(A) < R(B)$.

对于齐次线性方程组，判断其解有**定理**：

n 个方程的 n 元齐次线性方程组 $Ax=0$ 有非零解的充要条件是 $|A|=0$.

推论： n 元齐次线性方程组 $Ax=0$ 有非零解的充要条件是 $|A|=0$.

通过以上讨论，线性方程组的判断已经很容易了，下一步就是要使用向量这个工具讨论线性方程组通解性质。

下面就是求线性方程组通解的方法：

关于基础解系的定义：

齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解空间 V 的基称为该方程组的**基础解系**。

基础解系的特解线性无关，且方程组任一解都基础解系解的线性组合。

首先讨论线性方程组通解的性质：

性质 1：

若 X_1, X_2 是 $Ax=0$ 的任意两个解，则 X_1+X_2 也是 $Ax=0$ 的解。：

性质 2：

若 X 是 $Ax=0$ 的解， k 为任意数，则 kX 也是 $Ax=0$ 的解。

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/26702211510006060>