2.4.2

平面向量数量积的坐标表示、模、夹角

教师专用 学习目标

1. 掌握平面向量数量积的坐标表示，会用向量的坐标形式求数量积、向量的模及两个向量的夹角
2. 会用两个向量的数量积判断它们的垂直关系

★重点难点

1. 重点是平面向量的数量积的坐标表示及运算
2. 难点是利用向量的坐标来解决与向量的模、夹角、垂直有关的问题

教师专用 学法指导

1. 通过对平面向量数量积的坐标表示，用不同的数学语言描述数量积，进而认识数量积的本质
2. 结合例题掌握数量积、模、夹角的坐标表示的应用

课前自主预习

【自主预习】

主题1:平面向量数量积的坐标表示

已知两个非零向量$a=(x_1, y_1)$, $b=(x_2, y_2)$. 据此回答下列问题:

(1)若i, j是两个互相垂直且分别与x轴, y轴的正向同向的单位向量, 则a, b如何用i, j表示?

提示: $a=x_1i+y_1j$, $b=x_2i+y_2j$.

(2)在问题(1)的基础上,计算a·b,你能得到什么结论?

用文字语言描述:________两个平面向量的数量积等于它们对应

________坐标的乘积的和.

⇓

用坐标表示:若$a=(x_1,y_1)$,$b=(x_2,y_2)$,则$a\cdot b=$________.

$x_1x_2+y_1y_2$

主题2:平面向量模的坐标表示

1. 若$\mathbf{a}=(x, y)$,怎样利用平面向量数量积的坐标表示$|\mathbf{a}|$?

提示:由数量积的定义及性质即可.

2. 若已知向量$\mathbf{a}$的起点和终点的坐标,则$|\mathbf{a}|$如何表示?

提示:可先求出$\mathbf{a}$的坐标然后再求$|\mathbf{a}|$.

总结以上探究,试着写出向量模的坐标表示:

1. 若a=(x, y),则|a|=

$\sqrt{x^2+y^2}$.

2. 若向量a的起点与终点坐标分别为(x_1, y_1),(x_2, y_2),

则|a|=________________.

$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

主题3:平面向量垂直与夹角余弦值的坐标表示

1. 设$a=(x_1, y_1)$, $b=(x_2, y_2)$,若$a\perp b$,则如何寻找x_1, y_1, x_2, y_2之间的关系?

提示:由$a\perp b$得$a\cdot b=0$.从而得到关系.

2. 设a・b都是非零向量, $a=(x_1, y_1)$, $b=(x_2, y_2)$, θ 是a与b的夹角, 那么cos θ 如何用坐标表示?

提示: 由$\cos\theta=\frac{a\cdot b}{|a||b|}$, 再将模及数量积分别用坐标表示即可.

结合以上探究,试着写出向量垂直与向量夹角的余弦的坐标表示

向量垂直的坐标表示:设$a=(x_1, y_1)$, $b=(x_2, y_2)$,则$a\perp b$

$\Leftrightarrow$____________.

$x_1x_2+y_1y_2=0$

$\Downarrow$

两向量夹角的坐标表示：设a, b都是非零向量, a=(x_1, y_1)，

b=(x_2, y_2)，θ 是a与b的夹角, 则cos θ =$\underline{\qquad\qquad}$ $\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$

【深度思考】

结合教材P107例6你认为应怎样求向量a与b的夹角?

第一步:用坐标计算 $a\cdot b=x_1x_2+y_1y_2$;

第二步:计算 $|a|$ 与 $|b|$,即 $|a|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$, $|b|=\sqrt{x_2^2+y_2^2}$;

第三步:代入公式 $\cos\theta=\dfrac{a\cdot b}{|a|\cdot|b|}$ 求出 $\cos\theta$,再求 θ.

【预习小测】

1. 若a=(3, 4), b=(5, 12), 则a与b夹角的余弦值为(　　)

A. $\frac{63}{65}$　　B. $\frac{33}{65}$　　C. $-\frac{33}{65}$　　D. $-\frac{63}{65}$

【解析】选A. 设a与b的夹角为θ,

则cos θ =

$$\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|}=\frac{15+48}{5\times 13}=\frac{63}{65}.$$

2. 已知$\mathbf{a}=(x,1)$, $\mathbf{b}=(1,-2)$, 若$\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$, 则$x=$　(　　)

A. 2　　B. 1　　C. 3　　D. -2

【解析】选A. 因为$\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$, 所以$x+1\times(-2)=0$, 即$x=2$.

3. 若a=(1, 1), b=(-3, 4). 则a·b=__________.

【解析】a·b=1×(-3)+1×4=1.

答案:1

4. 已知$a=(3,2)$，$b=(5,-7)$，则$(a+b)\cdot(a-b)=$________.

【解析】$a+b=(8,-5)$，$a-b=(-2,9)$，

所以$(a+b)\cdot(a-b)=8\times(-2)+(-5)\times9=-61$.

答案:-61

5. 若A(4, -4), B(1, 3), 则$|\overrightarrow{AB}|$=________.

【解析】$\overrightarrow{AB}$=(-3, 7), 则 $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-3)^2+7^2}=\sqrt{58}$.

答案: $\sqrt{58}$

【备选训练】已知a=(4, 3), b=(-1, 2). 求a与b的夹角 θ 的余弦值. (仿照教材P107例6的解析过程)

【解析】因为$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=4\times(-1)+3\times2=2$,

所以$|\mathbf{a}|=\sqrt{4^2+3^2}=5$, $|\mathbf{b}|=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}$,

所以$\cos\theta=\dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}=\dfrac{2}{5\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{25}$.

课堂合作探究

【互动探究】

1. 向量数量积的坐标公式适用于任何两个向量吗?

提示:适用.无论是零向量,还是非零向量,均可使用向量数量积的坐标公式.

2. 向量有几种表示方法?由于表示方法的不同,计算数量积的方法有什么不同?

提示:向量有几何表示法、代数表示法和坐标表示法三种方法. 几何表示法、代数表示法表示向量时,用数量积的定义计算数量积,坐标表示法表示向量时,用数量积的坐标运算求数量积.

3. 已知$a=(x_1, y_1)$, $b=(x_2, y_2)$, 求$|a+b|$时可用哪些方法?

提示:方法一:可先求$a+b$的坐标, 再求$|a+b|$;方法二:可利用$|a+b|^2=a^2+2a\cdot b+b^2$求解.

4. 对任意的向量a与b, 向量夹角的坐标公式及垂直的坐标公式都成立吗?

提示:不一定. 当a=(0, 0)时, |a|=0, 此时, $\cos\theta=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$无意义, 但夹角为0°; 同时, a·b=$x_1x_2+y_1y_2=0$, 但向量a与b不垂直, 而是a∥b.

故向量夹角的坐标公式及垂直的坐标公式都成立的前提条件是$a \neq 0$且$b \neq 0$.

5. 如何利用向量数量积的坐标形式的运算,确定两个非零向量夹角的范围?

提示:设a=(x_1, y_1), b=(x_2, y_2), a与b的夹角为θ,

则:(1)当$x_1x_2+y_1y_2>0$时,$0\leqslant\theta<$ 　 .

(2)当$x_1x_2+y_1y_2=0$时,$\theta=$ 　 .

(3)当$x_1x_2+y_1y_2<0$时, 　 $<\theta\leqslant\pi$.

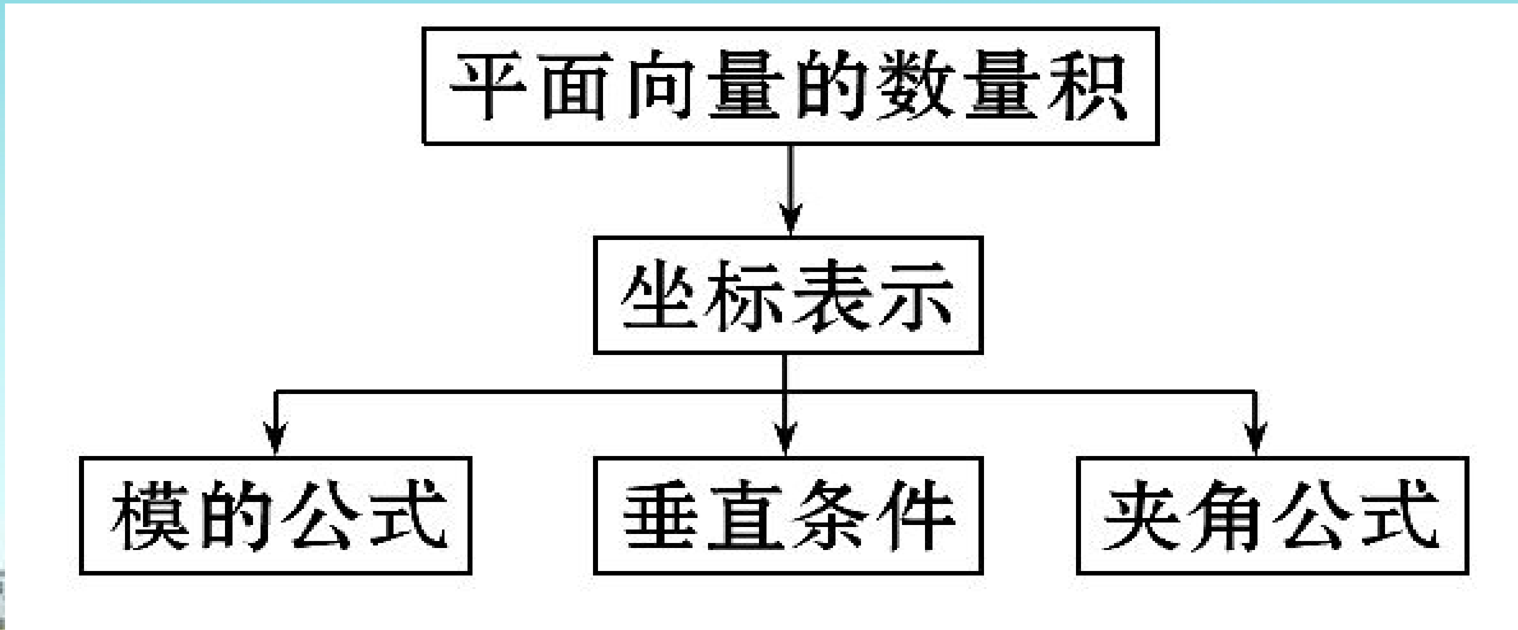
$\frac{\pi}{2}$

$\frac{\pi}{2}$

$\frac{\pi}{2}$

【探究总结】

知识归纳:



方法总结:解决向量夹角问题的方法及注意事项

(1)先利用平面向量的坐标表示求出这两个向量的数量积$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$以及$|\mathbf{a}||\mathbf{b}|$,再由$\cos\theta=\dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}$求出$\cos\theta$,也可以由坐标表示$\cos\theta=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1+y_1}\sqrt{x_2+y_2}}$直接求出$\cos\theta$.

由三角函数值$\cos\theta$求角θ时,应注意角θ的取值范围是$0\leqslant\theta\leqslant\pi$.

(2)由于$0\leqslant\theta\leqslant\pi$,利用$\cos\theta=\dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}$来判断角$\theta$时,要注意$\cos\theta<0$有两种情况:一是$\theta$是钝角,二是$\theta=\pi$;

$\cos\theta>0$也有两种情况:一是θ为锐角,二是$\theta=0$.

【题型探究】

类型一:平面向量数量积与模的坐标运算

【典例1】(1)(2016·石家庄高一检测)设x∈R,向量

a=(x,1),b=(1,-2),且a∥b,则|a+b|= ( )

A. B. C.2 D.5

(2)已知正方形ABCD的边长为2,E为CD的中点,则

$\sqrt{5}$ $\frac{\sqrt{5}}{2}$ $\sqrt{5}$

=__________.

$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BD}$

【解题指南】(1)由a∥b利用向量共线的坐标表示求x的值.再利用向量模的坐标公式求|a+b|的模.

(2)方法一:用$\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}$分别表示向量$\overrightarrow{AE},\overrightarrow{BD}$,用数量积的定义计算$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BD}$.方法二:坐标运算.首先要建立坐标系,确定各关键点的坐标,再求得数量积$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BD}$.

【解析】(1)选B. 因为**a**=(x, 1), **b**=(1, −2), 且**a**∥**b**,

所以−2x−1×1=0, 解得x=−$\frac{1}{2}$.

所以**a**+**b**=$\left(-\frac{1}{2},1\right)+\left(1,-2\right)=\left(\frac{1}{2},-1\right)$,

|**a**+**b**|=$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-1\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.