第 5 讲　导数切线方程 11 类

【题型一】 求切线基础型：给切点求切线

【典例分析】

已知函数 $f\left(x\right)=\dfrac{2\sin x}{x+1}$，则曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $\left(0,0\right)$ 处的切线的方程为_________.

【变式演练】

1.曲线 $f\left(x\right)=\left(x+1\right)e^{x}+x$ 在点 $\left(0,1\right)$ 处的切线方程为______.

2.已知点 $P\left(-1,1\right)$ 在曲线 $y=\dfrac{x^{2}}{x+a}$ 上，则曲线在点 P 处的切线方程为_________.

3.已知曲线 $f(x)=\ln x+\dfrac{x^{2}}{a}$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线的倾斜角为 $\dfrac{3\pi}{4}$，则 a 的值为（　）

A．1　　B．-1　　C．$-\dfrac{1}{2}$　　D．-4

【题型二】 求切线基础型：有切线无切点求切点

【典例分析】

曲线 $f\left(x\right)=x^{3}+x-2$ 在 p_{0} 处的切线平行于直线 $y=4x-1$，则 p_{0} 点的坐标为（　　）

A．$\left(1,0\right)$　　B．$\left(2,8\right)$　　C．$\left(1,0\right)$ 和 $\left(-1,-4\right)$　　D．$\left(2,8\right)$ 和 $\left(-1,-4\right)$

【变式演练】

1.已知函数 $f(x)=e^{x}+\dfrac{a}{e^{x}}$ 为偶函数，若曲线 $y=f(x)$ 的一条切线与直线 $2x+3y=0$ 垂直，则切点的横坐标为（　）

A．$\sqrt{2}$　　B．2　　C．$2\ln 2$　　D．$\ln 2$

2.过曲线 $y=\cos x$ 上一点 $P\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{1}{2}\right)$ 且与曲线在点 P 处的切线垂直的直线的方程为（　　）

A．$2x-\sqrt{3}y-\dfrac{2\pi}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}=0$　　B．$\sqrt{3}x+2y-\dfrac{\sqrt{3}\pi}{3}-1=0$

C．$2x-\sqrt{3}y-\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}=0$　　D．$\sqrt{3}x+2y-\dfrac{\sqrt{3}\pi}{3}+1=0$

3.曲线 $y=\sin x+2x+1$ 在点 P 处的切线方程是 $3x-y+1=0$，则切点 P 的坐标是____________.

【题型三】 求切线基础：无切点求参

【典例分析】

已知曲线 $y=x^3$ 在点 $\left(a,b\right)$ 处的切线与直线 $x+3y+1=0$ 垂直，则 a 的取值是（　　）

A．-1　　　　B．±1　　　　C．1　　　　D．±3

【变式演练】

1.若曲线 $y=\ln x(x>0)$ 的一条切线是直线 $y=\frac{1}{2}x+b$，则实数 b 的值为___________

2.已知曲线 $y=ax^3$ 与直线 $6x-y-4=0$ 相切，则实数 a 的值为__________.

3.已知 x 轴为曲线 $f\left(x\right)=4x^3+4\left(a-1\right)x+1$ 的切线，则 a 的值为________.

【题型四】 无切点多参

【典例分析】

若直线 $y=2x+b$ 是曲线 $y=2a\ln x$ 的切线，且 $a>0$，则实数 b 的最小值是______.

【变式演练】

1 已知函数 f（x）=$axlnx-bx$（a，b∈R）在点（e，f（e））处的切线方程为 y=3$x-e$，则 a+b=_____.

2. 若曲线 $f\left(x\right)=mxe^x+n$ 在 $\left(1,f\left(1\right)\right)$ 处的切线方程为 $y=ex$，则 $m+n=$__________

3. 已知曲线 $y=a\mathrm{e}^x+x\ln x$ 在点 $\left(1,ae\right)$ 处的切线方程为 $y=2x+b$，则（　）

A．$a=e,b=-1$　　B．$a=e,b=1$　　C．$a=e^{-1},b=1$　　D．$a=e^{-1},b=-1$

【题型五】 “过点”型切线

【典例分析】

过原点作曲线 $y=\ln x$ 的切线，则切点的坐标为___________，切线的斜率为__________.

【变式演练】

1.过点 $(-1,-1)$ 与曲线 $y=e^x+x$ 相切的直线方程为______________.

2.过点$(0,-1)$作曲线$f(\sqrt{x})=\ln x$（$x>0$）的切线，则切点坐标为________.

3.已知直线$y=ax$是曲线$y=\ln x$的切线，则实数$a=$（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　　　B. $\frac{1}{2e}$　　　　C. $\frac{1}{e}$　　　　D. $\frac{1}{e^2}$

【题型六】 判断切线条数

【典例分析】

已知曲线$S: y=3x-x^3$，则过点$P\left(2,2\right)$可向S引切线，其切线条数为（　　）

A．1　　　　B．2　　　　C．3　　　　D．0

【变式演练】

1.已知过点A（a，0）作曲线C：y＝x•e^{x}的切线有且仅有两条，则实数a的取值范围是（　　）

A.（﹣∞，﹣4）∪（0，+∞）　　　　B.（0，+∞）

C.（﹣∞，﹣1）∪（1，+∞）　　　　D.（﹣∞，﹣1）

2.已知函数$f(x)=x-e^{\frac{x}{a}}$存在单调递减区间，且$y=f(x)$的图象在$x=0$处的切线l与曲线$y=e^x$相切，符合情况的切线l（ ）

A．有3条　　　　B．有2条　　　　C．有1条　　　　D．不存在

3.已知函数$f\left(x\right)=x^3+ax^2-9x+1,a\in R$，当$x_0\neq 1$时，曲线$y=f\left(x\right)$在点$\left(x_0,f\left(x_0\right)\right)$与点$\left(2-x_0,f\left(2-x_0\right)\right)$处的切线总是平行时，则由点$\left(a,a\right)$可作曲线$y=f\left(x\right)$的切线的条数为（　　）

A．1　　　　B．2　　　　C．3　　　　D．无法确定

【题型七】 多函数（多曲线）的公切线

【典例分析】

直线$y=kx+b$与曲线$y=f(x)$相切也与曲线$y=g(x)$相切，则称直线$y=kx+b$为曲线$y=f(x)$和曲线$y=g(x)$的公切线，已知函数$f(x)=x^2,g(x)=a\ln x,$，其中$a\neq 0$，若曲线$y=f(x)$和曲线$y=g(x)$的公切线有两条，则a的取值范围为（ ）

A．$a<0$　　　　B．$a<-1$　　　　C．$0<a<2\mathrm{e}$　　　　D．$0<a<\frac{2}{e}$

【变式演练】

1.函数 $f(x)=\ln x+\dfrac{mx}{x+1}$ 与 $g(x)=x^2+1$ 有公切线 $y=ax,(a>0)$，则实数 m 的值为（　　）

A．4　　B．2　　C．1　　D．$\dfrac{1}{2}$

2.曲线 $f(x)=e^{x-1}$ 与曲线 $g(x)=\ln x$ 有（　　）条公切线.

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

3.若函数 $f(x)=\ln x(x>0)$ 与函数 $g(x)=x^2+a$ 有公切线，则实数 a 的最小值为（　　）

A．$-\dfrac{1}{2}\ln 2-\dfrac{1}{2}$　　B．$-\ln 2-1$　　C．$-\dfrac{1}{2}$　　D．$-\ln 2$

【题型八】 切线的应用：距离最值

【典例分析】

点 P 在函数 $y=\ln x$ 的图像上，若满足到直线 $y=x+a$ 的距离为 1 的点 P 有且仅有 1 个，则 $a=$（　　）

A．$\sqrt{2}+1$　　B．$\sqrt{2}-1$　　C．$-\sqrt{2}-1$　　D．$\pm\sqrt{2}-1$

【变式演练】

1.点 A 在直线 $y=x$ 上，点 B 在曲线 $y=\ln x$ 上，则 $|AB|$ 的最小值为（　　）

A．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　B．1　　C．$\sqrt{2}$　　D．2

2.已知点 M 在函数 $f(x)=e^x$ 图象上，点 N 在函数 $g(x)=\ln x$ 图象上，则 $|MN|$ 的最小值为（　　）

A．1　　B．$\sqrt{2}$　　C．2　　D．3

3.抛物线 $y=x^2$ 上的一动点 M 到直线 $l:x-y-1=0$ 距离的最小值是

A．$\dfrac{3\sqrt{2}}{8}$　　B．$\dfrac{3}{8}$　　C．$\dfrac{3}{4}$　　D．$\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$

【题型九】 切线的应用：距离公式转化型

【典例分析】

若 $x_1,x_2\in R$，则 $\left(x_1-e^{x_2}\right)^2+\left(x_2-e^{x_1}\right)^2$ 的最小值是

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

【变式演练】

1.若$x_1,x_2\in R$，则$\left(x_1-e^{x_2}\right)^2+\left(x_2-e^{x_1}\right)^2$的最小值是

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

2.设$b<0$，当$(a+b)^2+(a-\frac{4}{b})^2$取得最小值$c$时，函数$f(x)=|x-b|+|x-c|$的最小值为___________.

3.已知$a\in R$，$b\in R$，则$\sqrt{\left(a-b\right)^2+\left(a-1-e^b\right)^2}$的最小值为______.

【题型十】 切线的应用：恒成立求参等应用

【典例分析】

已知a为实数，则"$e^x>ax$对任意的实数x恒成立"是"$0<a<2$"的（　　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

【变式演练】

1.已知函数$f(x)=a^x(a>0,a\neq 1)$的图象在$(0,1)$处的切线方程为$y=2x+1$，若$f(x)\geq mx+x$恒成立，则m的取值范围为（　　）

A．$\left[-1,2e-1\right]$　　B．$(-\infty,2e-1]$

C．$\left[-1,e-1\right]$　　D．$(-\infty,e-1]$

2.若曲线$y=\ln x$在点$P\left(x_1,y_1\right)$处的切线与曲线$y=e^x$相切于点$Q\left(x_2,y_2\right)$，则$\frac{x_1+1}{x_1-1}+x_2=$__________.

3.已知函数$f\left(x\right)=\ln x$，$g\left(x\right)=ax+1$，若存在$x_0\geq\frac{1}{e}$使得$f\left(x_0\right)=g\left(-x_0\right)$，则实数$a$的取值范围是（　　）

A．$\left[-2e,\frac{1}{e^2}\right]$　　B．$\left[-\frac{1}{e^2},2e\right]$　　C．$\left[\frac{1}{2e},e^2\right]$　　D．$\left[\frac{1}{e^2},2e\right]$

【题型十一】 切线的应用：零点等

【典例分析】

已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=f(\frac{1}{x})$，当 $x\in[1,3]$ 时，$f(x)=\ln x$，若在区间 $[\frac{1}{3},3]$ 内，函数 $g(x)=f(x)-ax$ 与 x 轴有三个不同的交点，则实数 a 的取值范围是_________.

【变式演练】

1.已知函数 $y=\begin{cases}\sin(x+\frac{\pi}{2}),x\in\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)(k\in z)\\-\sin(x+\frac{\pi}{2}),x\in\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right)(k\in z)\end{cases}$ 的图象与直线 $y=m(x+2)(m>0)$ 恰有四个公共点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$，$D(x_4,y_4)$，其中 $x_1<x_3<x_3<x_4$，则 $(x_4+2)\tan x_4=$______.

2.关于 x 的方程 $kx=\sin x(k\in(0,1))$ 在 $(-3\pi,3\pi)$ 内有且仅有 5 个根，设最大的根是 α，则 α 与 $\tan\alpha$ 的大小关系是

A．$\alpha>\tan\alpha$　　B．$\alpha<\tan\alpha$　　C．$\alpha=\tan\alpha$　　D．以上都不对

3.已知函数 $f(x)$ 满足 $f(1+x)=f(1-x)$，且 $x\in\left[1,e^2\right]$ 时，$f(x)=\ln x$，若 $x\in\left[2-e^2,1\right]$ 时，方程 $f(x)=k(x-2)$ 有三个不同的根，则 k 的取值范围为（　　）

A．$\left(\frac{2}{e^2},\frac{1}{e}\right]$　　B．$\left(-\infty,\frac{1}{e}\right)$　　C．$\left(-\frac{1}{e},-\frac{2}{e^2}\right]$　　D．$\left(-\frac{1}{e},+\infty\right)$

【课后练习】

1.已知函数 $f(x)=\ln(a+x)$ 在 $\left(0,f\left(0\right)\right)$ 处的切线方程为 $y=x$，则满足 $0\le f\left(x-2\right)\le 1$ 的 x 的取值范围为_________.

2.已知函数 $f\left(x\right)=\frac{\ln x}{x}-ax^2$，若曲线 $y=f\left(x\right)$ 在 $\left(1,f\left(1\right)\right)$ 处的切线与直线 $2x-y+1=0$ 平行，则 $a=$______.

3.已知过点 $A(a,0)$ 作曲线 $C:y=x\cdot e^x$ 的切线有且仅有 1 条，则实数 a 的取值是（　　）

A．0　　B．4　　C．0 或-4　　D．0 或 4

4.已知直线 $x-y=0$ 是函数 $f(x)=\frac{a\ln x}{x}$ 图像的一条切线，且关于 x 的方程 $f(f(x))=t$ 恰有一个实数解，则（ ）

A．$t\in\{e\ln 2\}$　　B．$t\in[0,e\ln 2]$　　C．$t\in[0,2]$　　D．$t\in(-\infty,0]$

5.．函数 $f\left(x\right)=\ln x$ 在点 $P\left(x_0,f\left(x_0\right)\right)$ 处的切线 l 与函数 $g\left(x\right)=e^x$ 的图象也相切，则满足条件的切点 P 的个数有（　　）

A. 0 个　　B. 1 个

C. 2 个　　D. 3 个

6.已知过点 $M\left(m,0\right)$ 作曲线 C： $y=x\cdot\ln x$ 的切线有且仅有两条，则实数 m 的取值范围是______.

7.已知函数 $f(x)=x^2-4x+4,g(x)=x^{-1}$，则 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的公切线的条数为

A．三条　　B．二条　　C．一条　　D．0 条

8.若两曲线 $y=x^2-1$ 与 $y=a\ln x-1$ 存在公切线，则正实数 a 的取值范围是__________.

9.已知函数 $f\left(x\right)=x^2+1$， $g\left(x\right)=\ln x$，若曲线 $y=f\left(x\right)$ 与 $y=g\left(x\right)$ 的公切线与曲线 $y=f\left(x\right)$ 切于点 $\left(x_1,y_1\right)$，则 $x_1^2-\ln\left(2x_1\right)=$__________.

10.已知 $a-\ln b=0$， $c-d=1$，求 $(a-c)^2+(b-d)^2$ 的最小值________.

11.已知方程 $\dfrac{|\cos x|}{x}=k(k>0)$ 有且仅有两个不同的实数解 θ， $\varphi(\theta>\varphi)$，则以下有关两根关系的结论正确的是

A．$\cos\varphi=\varphi\sin\theta$　　B．$\sin\varphi=-\varphi\cos\theta$　　C．$\cos\theta=\theta\cos\varphi$　　D．$\sin\theta=-\theta\sin\varphi$

12.已知 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}x+1,x\le 1\\ \ln x,x>1\end{cases}$，则方程 $f(x)=ax$ 恰有 2 个不同的实根，实数 a 取值范围__________________.

13.已知函数 $f\left(x\right)=x^3-x.$

（1）求曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $M\left(1,0\right)$ 处的切线方程；

（2）如果过点 $\left(1,b\right)$ 可作曲线 $y=f\left(x\right)$ 的三条切线, 求实数 b 的取值范围

第 5 讲 导数切线方程 11 类

【题型一】 求切线基础型：给切点求切线

【典例分析】

已知函数 $f\left(x\right)=\dfrac{2\sin x}{x+1}$**，则曲线** $y=f\left(x\right)$ **在点** $\left(0,0\right)$ **处的切线的方程为__________.**

【答案】 $2x-y=0$

【解析】【分析】先求导函数，求得在切点处的直线斜率；再根据点斜率求得切线方程.

【详解】因为 $f'\left(x\right)=\dfrac{2\left(x+1\right)\cos x-2\sin x}{\left(x+1\right)^2}$，所以 $k=f'\left(0\right)=2$，

则所求切线的方程为 $y=2x$. 故答案为：$2x-y=0$.

【变式演练】

1.曲线 $f\left(x\right)=\left(x+1\right)e^x+x$ **在点** $\left(0,1\right)$ **处的切线方程为______.**

【答案】 $3x-y+1=0$

【分析】利用导数的几何意义求解，先对函数求导，然后将点 $\left(0,1\right)$ 的横坐标代入导函数所得的值就是切线的斜率，再利用点斜式可与出切线方程.

解：由 $f\left(x\right)=\left(x+1\right)e^x+x$，得 $f^{'}\left(x\right)=e^x+(x+1)e^x+1$，

所以在点 $\left(0,1\right)$ 处的切线的斜率为 $f^{'}\left(0\right)=e^0+(0+1)e^0+1=3$，

所以所求的切线方程为 $y-1=3(x-0)$，即 $3x-y+1=0$，

故答案为：$3x-y+1=0$，

2.已知点 $P\left(-1,1\right)$ **在曲线** $y=\dfrac{x^2}{x+a}$ **上，则曲线在点** P **处的切线方程为_________.**

【答案】 $y=-3x-2$

【分析】将点 P 的坐标代入曲线方程，可求得 a 的值，然后利用导数的几何意义可求得曲线在点 P 处的切线方程.

【详解】因为点 $P\left(-1,1\right)$ 在曲线 $y=\dfrac{x^2}{x+a}$ 上，$\therefore\dfrac{1}{a-1}=1$，可得 $a=2$，所以，$y=\dfrac{x^2}{x+2}$，

对函数求导得 $y'=\dfrac{2x\left(x+2\right)-x^2}{\left(x+2\right)^2}=\dfrac{x^2+4x}{\left(x+2\right)^2}$，

则曲线在点 P 处的切线斜率为 $k=y'\big|_{x=-1}=-3$，

因此，曲线在点 P 处的切线方程为 $y-1=-3\left(x+1\right)$，即 $y=-3x-2$.

故答案为： $y=-3x-2$.

3.已知曲线 $f(x)=\ln x+\dfrac{x^2}{a}$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线的倾斜角为 $\dfrac{3\pi}{4}$，则 a 的值为（　）

A． 1　　　　**B．** -1　　　　**C．** $-\dfrac{1}{2}$　　　　**D．** -4

【答案】B

【分析】求出函数 $f\left(x\right)=\ln x+\dfrac{x^2}{a}$ 的导数 $f'(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2x}{a}$,利用函数 f(x)在 x=1 处的倾斜角为 $\dfrac{3\pi}{4}$ 得 $f'(1)=-1$,由此可求 a 的值.

解:函数 $f\left(x\right)=\ln x+\dfrac{x^2}{a}$ 的导数 $f'(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2x}{a}$,Q 函数 f(x)在 x=1 处的倾斜角为 $\dfrac{3\pi}{4}$,

$\therefore f'(1)=-1$,$\therefore 1+\dfrac{2}{a}=-1$,$\therefore a=-1$ 故选 B.

【题型二】 求切线基础型：有切线无切点求切点

【典例分析】

曲线 $f\left(x\right)=x^3+x-2$ 在 p_0 处的切线平行于直线 $y=4x-1$，则 p_0 点的坐标为（　　）

A． $\left(1,0\right)$　　**B．** $\left(2,8\right)$　　**C．** $\left(1,0\right)$ 和 $\left(-1,-4\right)$　　**D．** $\left(2,8\right)$ 和 $\left(-1,-4\right)$

【答案】C

【详解】令 $f'\left(x\right)=3x^2+1=4$，解得 $x=\pm 1$， $f\left(1\right)=0,f\left(-1\right)=-4$，故 p_0 点的坐标为 $\left(1,0\right),\left(-1,-4\right)$，故选 C.

【点睛】

本小题考查直线的斜率，考查导数与斜率的对应关系，考查运算求解能力，属于基础题.

【变式演练】

1.已知函数 $f(x)=e^x+\dfrac{a}{e^x}$ 为偶函数，若曲线 $y=f(x)$ 的一条切线与直线 $2x+3y=0$ 垂直，则切点的横坐标为（　）

A． $\sqrt{2}$　　　　**B．** 2　　　　**C．** $2\ln 2$　　　　**D．** $\ln 2$

【答案】D

【分析】先根据偶函数求参数 $a=1$，再求导数，根据导数几何意义得斜率，最后根据直线垂直关系得结果.

【详解】$f\left(x\right)$ 为偶函数，则 $f(-x)=e^{-x}+\dfrac{a}{e^{-x}}=e^{x}+\dfrac{a}{e^{x}}\therefore(e^{x}-e^{-x})(a-1)=0\therefore a=1$，

$\therefore f(x)=e^{x}+e^{-x}$，$\therefore f'(x)=e^{x}-e^{-x}$.设切点得横坐标为 x_0，则 $f'(x_0)=e^{x_0}-e^{-x_0}=\dfrac{3}{2}$.解得 $e^{x_0}=2$，（负值舍去）所以 $x_0=\ln 2$.故选：D

2.过曲线 $y=\cos x$ 上一点 $P\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{1}{2}\right)$ 且与曲线在点 P 处的切线垂直的直线的方程为（　　）

A． $2x-\sqrt{3}y-\dfrac{2\pi}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}=0$　　　　**B．** $\sqrt{3}x+2y-\dfrac{\sqrt{3}\pi}{3}-1=0$

C． $2x-\sqrt{3}y-\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}=0$　　　　**D．** $\sqrt{3}x+2y-\dfrac{\sqrt{3}\pi}{3}+1=0$

【答案】A

【分析】

求出函数得导函数，根据导数得几何意义即可求得切线得斜率，从而可求得与切线垂直得直线方程.

【详解】

解：$\because y=\cos x$，$\therefore y'=-\sin x$，

曲线在点 $P\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{1}{2}\right)$ 处的切线斜率是 $y'\Big|_{x=\frac{\pi}{3}}=-\sin\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

∴过点 P 且与曲线在点 P 处的切线垂直的直线的斜率为 $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$，

∴所求直线方程为 $y-\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$，即 $2x-\sqrt{3}y-\dfrac{2\pi}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}=0$.

故选：A.

3.曲线 $y=\sin x+2x+1$ 在点 P 处的切线方程是 $3x-y+1=0$，则切点 P 的坐标是____________.

【答案】$\left(0,1\right)$

【分析】

由导数的几何意义，求得切点P处的切线的斜率，得到$\cos x_0=1$，求得$x_0=2k\pi(k\in Z)$，分类讨论，即可求解.

【详解】由函数$y=\sin x+2x+1$，则$y'=\cos x+2$，

设切点P的坐标为$\left(x_0,y_0\right)$，则斜率$k=y'|_{x=x_0}=\cos x_0+2=3$，

所以$\cos x_0=1$，解得$x_0=2k\pi(k\in Z)$，

当$k=0$时，切点为$\left(0,1\right)$，此时切线方程为$3x-y+1=0$；

当$k\neq 0$，切点为$(2k\pi,4k\pi+1)(k\in Z)$，不满足题意，

综上可得，切点为$\left(0,1\right)$.故答案为：$\left(0,1\right)$.

【题型三】 求切线基础：无切点求参

【典例分析】

已知曲线$y=x^3$在点$\left(a,b\right)$处的切线与直线$x+3y+1=0$垂直，则a的取值是（　　）

A．-1　　　　**B．**±1　　　　**C．1**　　　　**D．**±3

【答案】B

【分析】求导得到$f'\left(x\right)=3x^2$，根据垂直关系得到$f'\left(a\right)=3a^2=3$，解得答案.

【详解】$y=f\left(x\right)=x^3$，$f'\left(x\right)=3x^2$，直线$x+3y+1=0$，$k=-\dfrac{1}{3}$，

故$f'\left(a\right)=3a^2=3$，解得$a=\pm1$.故选：B.

【变式演练】

1.若曲线$y=\ln x(x>0)$的一条切线是直线$y=\dfrac{1}{2}x+b$，则实数b的值为__________

【答案】$-1+\ln 2$

【解析】

【分析】

先设切点为(x_0,y_0)，对函数求导，根据切线斜率，求出切点坐标，代入切线方程，即可得出结果.

【详解】

设切点为(x_0, y_0)，对函数$y=\ln x$求导，得到$y'=\frac{1}{x}$，

又曲线$y=\ln x(x>0)$的一条切线是直线$y=\frac{1}{2}x+b$，

所以切线斜率为$\frac{1}{x_0}=\frac{1}{2}$，$\therefore x_0=2$，

因此$y_0=\ln 2$，即切点为$\left(2,\ln 2\right)$，代入切线$y=\frac{1}{2}x+b$，可得$b=-1+\ln 2$.

故答案为：$-1+\ln 2$.

2.已知曲线$y=ax^3$与直线$6x-y-4=0$相切，则实数a的值为__________.

【答案】2

【分析】先设出切点坐标(m,n)，然后由切点是公共点和切点处的导数等于切的斜率列方程组可求得结果.

解：设切点为(m,n)，

由$y=ax^3$得$y^{'}=3ax^2$，则由题意得，$\begin{cases}3am^2=6\\6m-n-4=0\\n=am^3\end{cases}$，解得$m=1,n=2,a=2$，

故答案为：2

3.已知x轴为曲线$f\left(x\right)=4x^3+4\left(a-1\right)x+1$的切线，则$a$的值为________.

【答案】$\frac{1}{4}$

【分析】设x轴与曲线$f\left(x\right)$的切点为$\left(x_0,0\right)$，由题意结合导数的几何意义可得

$\begin{cases}4x_0^3+4\left(a-1\right)x_0+1=0\\f'\left(x_0\right)=12x_0^2+4\left(a-1\right)=0\end{cases}$，解方程即可得解.

【详解】由题意$f'\left(x\right)=12x^2+4\left(a-1\right)$，设$x$轴与曲线$f\left(x\right)$的切点为$\left(x_0,0\right)$，则

$\begin{cases}4x_0^3+4\left(a-1\right)x_0+1=0\\f'\left(x_0\right)=12x_0^2+4\left(a-1\right)=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}x_0=\frac{1}{2}\\a=\frac{1}{4}\end{cases}$.故答案为：$\frac{1}{4}$.

【题型四】 无切点多参

【典例分析】

若直线$y=2x+b$是曲线$y=2a\ln x$的切线，且$a>0$，则实数b的最小值是______.

【答案】-2

【解析】

【分析】

求出 $y=2a\ln x$ 的导数，设切线为 (m,n)，由切点处的导数值为切线斜率求出 $m=a$，再由切点坐标可把 b 表示为 a 的函数，再利用导数可求得 b 的最小值.

【详解】

$y=2a\ln x$ 的导数为 $y'=\dfrac{2a}{x}$，由于直线 $y=2x+b$ 是曲线 $y=2a\ln x$ 的切线，设切点为 $\left(m,n\right)$，则 $\dfrac{2a}{m}=2$，

$\therefore m=a$，又 $2m+b=2a\ln m$，$\therefore b=2a\ln a-2a$（$a>0$），$b'=2\left(\ln a+1\right)-2=2\ln a$，

当 $a>1$ 时，$b'>0$，函数 b 递增，当 $0<a<1$ 时，$b'<0$，函数 b 递减，

$\therefore a=1$ 为极小值点，也为最小值点，$\therefore b$ 的最小值为 $2\ln 1-2=-2$.

故答案为：-2.

【变式演练】

1 已知函数 f（x）$=axlnx-bx$（a，$b\in$R）在点（e，f（e））处的切线方程为 $y=3x-e$，则 $a+b=$_____.

【答案】0

【分析】由题意 $f\left(e\right)=2e,f^{'}\left(e\right)=3$，列方程组可求 a,b，即求 $\boldsymbol{a+b}$.

【详解】$\because$ 在点 $\left(e,f\left(e\right)\right)$ 处的切线方程为 $y=3x-e$，$\therefore f\left(e\right)=2e$，代入 $f\left(x\right)=ax\ln x-bx$ 得 $a-b=2$ ①.

又Q $f^{'}\left(x\right)=a\left(1+\ln x\right)-b,\therefore f^{'}\left(e\right)=2a-b=3$ ②.

联立①②解得：$a=1,b=-1$ $.\therefore a+b=0$.故答案为：0.

2. 若曲线 $f\left(x\right)=mxe^{x}+n$ 在 $\left(1,f\left(1\right)\right)$ 处的切线方程为 $y=ex$，则 $m+n=$__________

【答案】$\dfrac{e+1}{2}$

解：将 $x=1$ 代入 $y=ex$，得切点为 $\left(1,e\right)$，$\therefore e=me+n$ ①，又 $f'\left(x\right)=me^{x}\left(x+1\right)$，

$\therefore f'\left(1\right)=2me=e$，$m=\dfrac{1}{2}$ ②. 联立①②解得：$m=\dfrac{1}{2}$，$n=\dfrac{e}{2}$，故 $m+n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{e}{2}=\dfrac{e+1}{2}$.故答案为：$\dfrac{e+1}{2}$.

3. 已知曲线 $y=ae^{x}+x\ln x$ 在点 $\left(1,ae\right)$ 处的切线方程为 $y=2x+b$，则（　）

A. $a=e,b=-1$　　**B.** $a=e,b=1$　　**C.** $a=e^{-1},b=1$　　**D.** $a=e^{-1},b=-1$

【答案】D

【详解】 $y'=ae^{x}+\ln x+1, k=y'|_{x=1}=ae+1=2$， $\therefore a=e^{-1}$ 将 $(1,1)$ 代入 $y=2x+b$ 得 $2+b=1,b=-1$，故选 D．

【题型五】 “过点”型切线

【典例分析】

过原点作曲线 $y=\ln x$ 的切线，则切点的坐标为__________，切线的斜率为_________.

【答案】 $(e,1)$ $\quad\frac{1}{e}$

【分析】设切点坐标为 (x,lnx)；利用导数求切线方程并求切点坐标．

解：设切点坐标为 (x,lnx)； $y'=\frac{1}{x}$；故由题意得， $\frac{lnx}{x}=\frac{1}{x}$；解得， $x=e$；故切点坐标为 $(e,1)$；切线的斜率为 $\frac{1}{e}$；

故切线方程为 $y=\frac{1}{e}(x-e)+1$，整理得 $x-ey=0$．故答案为：$(e,1)$； $\frac{1}{e}$．

【变式演练】

1.过点 $(-1,-1)$ 与曲线 $y=e^{x}+x$ 相切的直线方程为_____________.

【答案】 $y=2x+1$.

【详解】设切点坐标为 $\left(x_0,e^{x_0}+x_0\right)$，由 $y=e^{x}+x$ 得 $y'=e^{x}+1$， $\therefore$ 切线方程为

$y=\left(e^{x_0}+1\right)\left(x-x_0\right)+e^{x_0}+x_0$，

Q 切线过点 $\left(-1,-1\right)$， $\therefore -1=\left(e^{x_0}+1\right)\left(-1-x_0\right)+e^{x_0}+x_0$，即 $x_0e^{x_0}=0$， $\therefore x_0=0$，

即所求切线方程为 $y=2x+1$.故答案为： $y=2x+1$.

2.过点 $(0,-1)$ 作曲线 $f(\sqrt{x})=\ln x$（ $x>0$ ）的切线，则切点坐标为_______.

【答案】 $(\sqrt{e},1)$

【分析】先求出曲线的方程，再根据导数值为切线斜率，求出切点坐标.

【详解】由 $f(\sqrt{x})=\ln x$（ $x>0$ ），则 $f(x)=\ln x^{2},x>0$，化简得 $f(x)=2\ln x,x>0$，

则 $f'(x)=\frac{2}{x}$，设切点为 $(x_0,2\ln x_0)$，显然 $(0,-1)$ 不在曲线上，

则$\dfrac{2\ln x_0+1}{x_0}=\dfrac{2}{x_0}$，得$x_0=\sqrt{e}$，则切点坐标为$(\sqrt{e},1)$.

故答案为：$(\sqrt{e},1)$.

3.已知直线$y=ax$是曲线$y=\ln x$的切线，则实数$a=$（　　）

A. $\dfrac{1}{2}$　　　　**B.** $\dfrac{1}{2e}$　　　　**C.** $\dfrac{1}{e}$　　　　**D.** $\dfrac{1}{e^2}$

【答案】C

【分析】设切点为$(x_0,\ln x_0)$，求出切线方程$y=\dfrac{x}{x_0}+\ln x_0-1$，即得$\begin{cases}a=\dfrac{1}{x_0}\\ \ln x_0-1=0\end{cases}$，解方程即得a的值.

【详解】设切点为$(x_0,\ln x_0)$，$\therefore$切线方程是$y-\ln x_0=\dfrac{1}{x_0}(x-x_0)\Rightarrow y=\dfrac{x}{x_0}+\ln x_0-1$，

$\therefore\begin{cases}a=\dfrac{1}{x_0}\\ \ln x_0-1=0\end{cases}\Rightarrow a=\dfrac{1}{e}$，故答案为：C

【题型六】 判断切线条数

【典例分析】

已知曲线$S:y=3x-x^3$，则过点$P\left(2,2\right)$可向S引切线，其切线条数为（　　）

A. 1　　　　**B.** 2　　　　**C.** 3　　　　**D.** 0

【答案】C

【解析】

【分析】

设切点为$\left(t,3t-t^3\right)$，利用导数求出曲线S在切点$\left(t,3t-t^3\right)$处的切线方程，再将点P的坐标代入切线方程，可得出关于t的方程，解出该方程，得出该方程根的个数，即为所求.

【详解】

设在曲线S上的切点为$\left(t,3t-t^3\right)$，Q $y=3x-x^3$，则$y'=3-3x^2$，

所以，曲线S在点$\left(t,3t-t^3\right)$处的切线方程为$y-\left(3t-t^3\right)=\left(3-3t^2\right)\left(x-t\right)$，

将点$P\left(2,2\right)$的坐标代入切线方程得$t^3-3t^2+2=0$，即$\left(t-1\right)\left(t^2-2t-2\right)=0$，

解得$t_1=1$，$t_2=1+\sqrt{3}$，$t_3=1-\sqrt{3}$.

因此，过点 $P(2,2)$ 可向 S 引切线，有三条.故选：C.

【变式演练】

1.已知过点 A（a，0）作曲线 C：y＝x•e^x 的切线有且仅有两条，则实数 a 的取值范围是（　　）

A.（－∞，－4）∪（0，+∞）　　　　**B.**（0，+∞）

C.（－∞，－1）∪（1，+∞）　　　　**D.**（－∞，－1）

【答案】 A

【详解】设切点为 $\left(x_0, x_0 e^{x_0}\right)$，$y' = (x+1)e^x$，$\therefore y'\big|_{x=x_0} = (x_0+1)\cdot e^{x_0}$，则切线方程为：

$y - x_0 e^{x_0} = \left(x_0+1\right)\cdot e^{x_0}(x - x_0)$，切线过点 $A(a,0)$ 代入得：$-x_0 e^{x_0} = \left(x_0+1\right)\cdot e^{x_0}(a - x_0)$

$\therefore a = \dfrac{{x_0}^2}{x_0+1}$，即方程 ${x_0}^2 - a x_0 - a = 0$ 有两个解，则有 $\Delta = a^2 + 4a > 0 \Rightarrow a > 0$ 或 $a < -4$.故答案为:A.

2.已知函数 $f(x) = x - e^{\frac{x}{a}}$ 存在单调递减区间，且 $y = f(x)$ 的图象在 $x = 0$ 处的切线 l 与曲线 $y = e^x$ 相切，符合情况的切线 l（ ）

A．有 3 条　　　　**B．有 2 条**　　　　**C．有 1 条**　　　　**D．不存在**

【答案】 D

【解析】

试题分析：$f'(x) = 1 - \dfrac{e^{\frac{x}{a}}}{a}$，依题意，$f'(x) < 0$ 在 R 上有解.当 $a < 0$ 时，$f'(x) < 0$ 在 R 上无解，不符合题意；当 $a > 0$ 时，$f'(x) < 0, a\left\langle e^{\frac{x}{a}}, x\right\rangle a\ln a$ 符合题意，故 $a > 0$.易知曲线 $y = f(x)$ 在 $x = 0$ 处的切线为 $y = \left(1 - \dfrac{1}{a}\right)x - 1$.假设该直线与 $y = e^x$ 相切，设切点为 $\left(x_0, y_0\right)$，即有 $e^{x_0} = 1 - \dfrac{1}{a} = \left(1 - \dfrac{1}{a}\right)x_0 - 1$，消去 a 化简得 $e^{x_0} = x_0 e^{x_0} - 1$，分别画出 $e^x, xe^x - 1$ 的图像，观察可知它们交点横坐标 $x_0 > 1$，$e^{x_0} > e$，这与 $1 - \dfrac{1}{a} < 1$ 矛盾，故不存在.

3.已知函数 $f(x) = x^3 + ax^2 - 9x + 1, a \in R$，当 $x_0 \neq 1$ 时，曲线 $y = f(x)$ 在点 $\left(x_0, f(x_0)\right)$ 与点 $\left(2 - x_0, f(2 - x_0)\right)$ 处的切线总是平行时，则由点 (a,a) 可作曲线 $y = f(x)$ 的切线的条数为（　　）

A． 1　　　　**B．** 2　　　　**C．** 3　　　　**D．无法确定**

【答案】 C

【解析】

分析：由曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $\left(x_0,f\left(x_0\right)\right)$ 与点 $\left(2-x_0,f\left(2-x_0\right)\right)$ 处的切线总是平行,可得导函数的对称轴，从而求出 a 的值，设出切点坐标，可得关于切点横坐标的方程有三个解，从而可得结果.

详解：由 $f\left(x\right)=x^3+ax^2-9x+1$，得 $f'\left(x\right)=3x^2+2ax-9$，

Q 曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $\left(x_0,f\left(x_0\right)\right)$ 与点 $\left(2-x_0,f\left(2-x_0\right)\right)$ 处的切线总是平行,

$\therefore y=f'\left(x\right)$ 关于 $x=1$ 对称,

即 $-\dfrac{a}{3}=1\Rightarrow a=-3$，点 $\left(a,a\right)$，即为 $\left(-3,-3\right)$，

所以 $f\left(x\right)=x^3-3x^2-9x+1$， $f'\left(x\right)=3x^2+2ax-9$，设切点为 $\left(t,f\left(t\right)\right)$ 切线的方程为

$y+3=f'\left(t\right)\left(x+3\right)$,

将点 $\left(t,t^3-3t^2-9t+1\right)$ 代入切线方程可得 $t^3-3t^2-9t+3=\left(3t^2-6t-9\right)\left(t+3\right)$，化为

$2t^3-6t^2-36t-31=0$，

设 $g\left(t\right)=2t^3-6t^2-36t-31$ $g'\left(t\right)=6t^2-12t-18$ 令 $g'\left(t\right)>0$ 得 $t>3$ 或 $t<-1$，令 $g'\left(t\right)<0$ 得

$-1<t<0$，

$g\left(t\right)=2t^3-6t^2-36t-31$ 在 $\left(-\infty,-1\right),\left(3,+\infty\right)$ 上递增，在 $\left(-1,3\right)$ 上递减，

$\therefore t$ 在 -1 处有极大值，在 3 处有极小值，$\therefore g\left(-1\right)=1>0$ 且 $g\left(3\right)=-139<0$，

$g\left(t\right)=2t^3-6t^2-36t-31$ 与 x 有三个交点，$\therefore$ 方程 $g\left(t\right)=0$ 有三个根，

即过 $\left(a,a\right)$ 的切线有 3 条，故答案为 3.

【题型七】 多函数（多曲线）的公切线

【典例分析】

直线 $y=kx+b$ 与曲线 $y=f(x)$ 相切也与曲线 $y=g(x)$ 相切，则称直线 $y=kx+b$ 为曲线 $y=f(x)$ 和曲线 $y=g(x)$ 的公切线，已知函数 $f(x)=x^2,g(x)=a\ln x,$，其中 $a\neq 0$，若曲线 $y=f(x)$ 和曲线 $y=g(x)$ 的公切线有两条，则 a 的取值范围为（ ）

A. $a<0$　　**B.** $a<-1$　　**C.** $0<a<2\mathrm{e}$　　**D.** $0<a<\dfrac{2}{e}$

【答案】C

【解析】

【分析】

设切点求出两个函数的切线方程，根据这个两个方程表示同一直线，可得方程组，化简方程组，可以得到变量a关于其中一个切点横坐标的函数形式，求导，求出函数的单调性，结合该函数的正负性，画出图象图形，最后利用数形结合求出a的取值范围.

【详解】

设曲线$f(x)=x^2$的切点为：(s,s^2)，$f(x)=x^2 \Rightarrow f'(x)=2x$，所以过该切点的切线斜率为$f'(s)=2s$，因此过该切点的切线方程为：$y-s^2=2s(x-s) \Rightarrow y=2sx-s^2$；

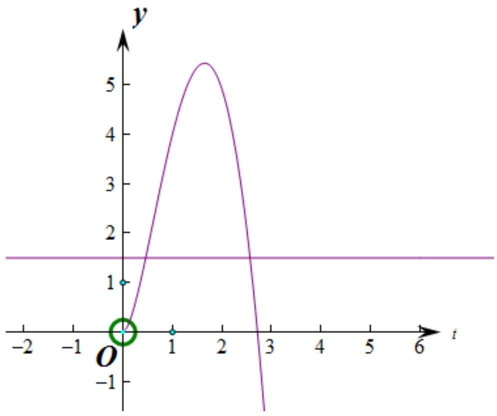
设曲线$y=g(x)$的切点为：$(t,a\ln t)$，$g(x)=a\ln x \Rightarrow g'(x)=\frac{a}{x}$，所以过该切点的切线斜率为$g'(t)=\frac{a}{t}$，

因此过该切点的切线方程为：$y-a\ln t=\frac{a}{t}(x-t) \Rightarrow y=\frac{a}{t}x-a+a\ln t$，则两曲线的公切线应该满足：

$$\begin{cases}2s=\frac{a}{t}\\ -s^2=-a+a\ln t\end{cases} \Rightarrow a=4t^2(1-\ln t),$$

构造函数$h(t)=4t^2(1-\ln t)(t>0) \Rightarrow h'(t)=4t(1-2\ln t)$，

当$t>e^{\frac{1}{2}}$时，$h'(t)<0,h(t)$单调递减，当$0<t<e^{\frac{1}{2}}$时，$h'(t)>0,h(t)$单调递增，所以函数有最大值为：$h(e^{\frac{1}{2}})=2e$，当$t>e$时，$h(t)<0$，当$0<t<e$，$h(t)>0$，函数的图象大致如下图所示：



要想有若曲线$y=f(x)$和曲线$y=g(x)$的公切线有两条，则a的取值范围为$0<a<2e$.

故选：C

【变式演练】

1.函数$f(x)=\ln x+\frac{mx}{x+1}$与$g(x)=x^2+1$有公切线$y=ax,(a>0)$，则实数$m$的值为（　　）

A．4　　**B．2**　　**C．1**　　**D．$\frac{1}{2}$**

【答案】A

【解析】