

2025 届辽宁省阜蒙县第二高级中学高考压轴卷数学试卷

注意事项

1. 考生要认真填写考场号和座位序号。
2. 试题所有答案必须填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。第一部分必须用 2B 铅笔作答；第二部分必须用黑色字迹的签字笔作答。
3. 考试结束后，考生须将试卷和答题卡放在桌面上，待监考员收回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

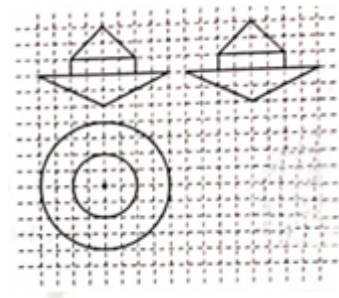
1. 设集合 $A = \{x | x^2 - x - 2 > 0\}$ ， $B = \{x | \log_2 x \leq 2\}$ ，则集合 $(C_R A) \cap B =$

- A. $\{x | -1 \leq x \leq 2\}$ B. $\{x | 0 < x \leq 2\}$ C. $\{x | 0 < x \leq 4\}$ D. $\{x | -1 \leq x \leq 4\}$

2. 已知复数 z 满足 $\frac{1}{z} = 1 + i$ ，则 $|z|$ 的值为 ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\sqrt{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. 2

3. 陀螺是中国民间较早的娱乐工具之一，但陀螺这个名词，直到明朝刘侗、于奕正合撰的《帝京景物略》一书中才正式出现.如图所示的网格纸中小正方形的边长均为 1，粗线画出的是一个陀螺模型的三视图，则该陀螺模型的表面积为 ()



- A. $(8\sqrt{5} + 4\sqrt{2} + 4)\pi$ B. $(8\sqrt{5} + 8\sqrt{2} + 4)\pi$
 C. $(8\sqrt{5} + 4\sqrt{2} + 16)\pi$ D. $(8\sqrt{5} + 8\sqrt{2} + 16)\pi$

4. 已知定义在 R 上的可导函数 $f(x)$ 满足 $(1-x) \cdot f(x) + x \cdot f'(x) > 0$ ，若 $y = f(x+2) - e^3$ 是奇函数，则不等式 $x \cdot f(x) - 2e^{x+1} < 0$ 的解集是 ()

- A. $(-\infty, 2)$ B. $(-\infty, 1)$ C. $(2, +\infty)$ D. $(1, +\infty)$

5. 复数 z 满足 $(1+i)z = |1-i|$ ，则 $z =$ ()

- A. $1-i$ B. $1+i$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

12. 已知集合 $A = \{x | x^2 < 1\}$, $B = \{x | \log_2 x < 1\}$, 则

A. $A \cap B = \{x | 0 < x < 2\}$

B. $A \cap B = \{x | x < 2\}$

C. $A \cup B = \{x | x < 2\}$

D. $A \cup B = \{x | -1 < x < 2\}$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $a_1 - a_2 = 2$, $a_2 - a_3 = 6$, 则 $S_4 =$ _____.

14. 已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 数列 $\{b_n\}$ 为等比数列, 满足 $\{a_1, a_2, a_3\} = \{b_1, b_2, b_3\} = \{a, b, -2\}$, 其中 $a > 0$, $b > 0$, 则 $a + b$ 的值为 _____.

15. 已知各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项积为 T_n , $a_4 a_8 = 4$, $\log_b T_{11} = \frac{22}{3}$ ($b > 0$ 且 $b \neq 1$), 则 $b =$ _____.

16. 若 x, y 均为正数, 且 $x + y = xy$, 则 $x + y$ 的最小值为 _____.

三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 都是各项不为零的数列, 且满足 $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = c_n S_n, n \in N^*$, 其中 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $\{c_n\}$ 是公差为 d ($d \neq 0$) 的等差数列.

(1) 若数列 $\{a_n\}$ 是常数列, $d = 2, c_2 = 3$, 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $a_n = \lambda n$ (λ 是不为零的常数), 求证: 数列 $\{b_n\}$ 是等差数列;

(3) 若 $a_1 = c_1 = d = k$ (k 为常数, $k \in N^*$), $b_n = c_{n+k}$ ($n \geq 2, n \in N^*$). 求证: 对任意 $n \geq 2, n \in N^*$, $\frac{b_n}{a_n} > \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}$ 的恒成立.

18. (12 分) 已知 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对边的长分别为 a, b, c , 且 $a \cos B = \frac{1}{2} b + c$.

(1) 求角 A 的大小;

(2) 求 $\sin^2 B + \sin^2 C + \sin B \sin C$ 的值.

19. (12 分) 已知各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 S_n 是 a_n 与 $\frac{1}{a_n}$ 的等差中项.

(1) 证明: $\{S_n^2\}$ 为等差数列, 并求 S_n ;

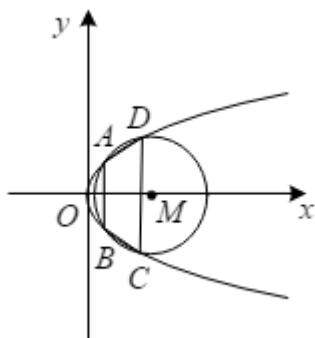
(2) 设 $b_n = \frac{1}{S_{n+1} + S_n}$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求满足 $T_n \geq 5$ 的最小正整数 n 的值.

20. (12分) 已知 $f(x) = x^3 + 3ax^2 + bx + a^2 (a > 1)$ 的图象在 $x = -1$ 处的切线方程为 $y = 0$.

(1) 求常数 a, b 的值;

(2) 若方程 $f(x) = c$ 在区间 $[-4, 1]$ 上有两个不同的实根, 求实数 c 的值.

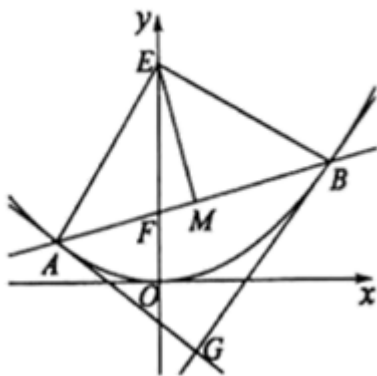
21. (12分) 如图, 已知抛物线 $E: y^2 = 4x$ 与圆 $M: (x-3)^2 + y^2 = r^2 (r > 0)$ 相交于 A, B, C, D 四个点,



(1) 求 r 的取值范围;

(2) 设四边形 $ABCD$ 的面积为 S , 当 S 最大时, 求直线 AD 与直线 BC 的交点 P 的坐标.

22. (10分) 已知抛物线 $C: x^2 = 4py (p$ 为大于 2 的质数) 的焦点为 F , 过点 F 且斜率为 $k (k \neq 0)$ 的直线交 C 于 A, B 两点, 线段 AB 的垂直平分线交 y 轴于点 E , 抛物线 C 在点 A, B 处的切线相交于点 G . 记四边形 $AEBG$ 的面积为 S .



(1) 求点 G 的轨迹方程;

(2) 当点 G 的横坐标为整数时, S 是否为整数? 若是, 请求出所有满足条件的 S 的值; 若不是, 请说明理由.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、B

【解析】

先求出集合 A 和它的补集，然后求得集合 B 的解集，最后取它们的交集得出结果。

【详解】

对于集合 A ， $(x-2)(x+1) > 0$ ，解得 $x < -1$ 或 $x > 2$ ，故 $C_R A = [-1, 2]$ 。对于集合 B ， $\log_2 x \leq 2 = \log_2 4$ ，解得 $0 < x \leq 4$ 。故 $(C_R A) \cap B = (0, 2]$ 。故选 B。

【点睛】

本小题主要考查一元二次不等式的解法，考查对数不等式的解法，考查集合的补集和交集的运算。对于有两个根的一元二次不等式的解法是：先将二次项系数化为正数，且不等号的另一边化为 0，然后通过因式分解，求得对应的一元二次方程的两个根，再利用“大于在两边，小于在中间”来求得一元二次不等式的解集。

2、C

【解析】

由复数的除法运算整理已知求得复数 z ，进而求得其模。

【详解】

因为 $\frac{1}{z} = 1+i \Rightarrow z = \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{1-i^2} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ ，所以 $|z| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

故选：C

【点睛】

本题考查复数的除法运算与求复数的模，属于基础题。

3、C

【解析】

根据三视图可知，该几何体是由两个圆锥和一个圆柱构成，由此计算出陀螺的表面积。

【详解】

最上面圆锥的母线长为 $2\sqrt{2}$ ，底面周长为 $2\pi \times 2 = 4\pi$ ，侧面积为 $\frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 4\pi = 4\sqrt{2}\pi$ ，下面圆锥的母线长为 $2\sqrt{5}$ ，底面周长为 $2\pi \times 4 = 8\pi$ ，侧面积为 $\frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times 8\pi = 8\sqrt{5}\pi$ ，没被挡住的部分面积为 $\pi \times 4^2 - \pi \times 2^2 = 12\pi$ ，中间圆柱的侧面积为 $2\pi \times 2 \times 1 = 4\pi$ 。故表面积为 $(8\sqrt{5} + 4\sqrt{2} + 16)\pi$ ，故选 C。

【点睛】

本小题主要考查中国古代数学文化，考查三视图还原为原图，考查几何体表面积的計算，属于基础题。

4、A

【解析】

构造函数 $g(x) = \frac{x \cdot f(x)}{e^x}$ ，根据已知条件判断出 $g(x)$ 的单调性. 根据 $y = f(x+2) - e^3$ 是奇函数，求得 $f(2)$ 的值，

由此化简不等式 $x \cdot f(x) - 2e^{x+1} < 0$ 求得不等式的解集.

【详解】

构造函数 $g(x) = \frac{x \cdot f(x)}{e^x}$ ，依题意可知 $g'(x) = \frac{(1-x) \cdot f(x) + x \cdot f'(x)}{e^x} > 0$ ，所以 $g(x)$ 在 R 上递增. 由于

$y = f(x+2) - e^3$ 是奇函数，所以当 $x=0$ 时， $y = f(2) - e^3 = 0$ ，所以 $f(2) = e^3$ ，所以 $g(2) = \frac{2 \times e^3}{e^2} = 2e$.

由 $x \cdot f(x) - 2e^{x+1} < 0$ 得 $g(x) = \frac{x \cdot f(x)}{e^x} < 2e = g(2)$ ，所以 $x < 2$ ，故不等式的解集为 $(-\infty, 2)$.

故选：A

【点睛】

本小题主要考查构造函数法解不等式，考查利用导数研究函数的单调性，考查化归与转化的数学思想方法，属于中档题.

5、C

【解析】

利用复数模与除法运算即可得到结果.

【详解】

解： $z = \frac{|1-i|}{1+i} = \frac{\sqrt{2}}{1+i} = \frac{\sqrt{2}(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{\sqrt{2}(1-i)}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ ，

故选：C

【点睛】

本题考查复数除法运算，考查复数的模，考查计算能力，属于基础题.

6、B

【解析】

设 $|BF_2| = t$ ，则 $|BF_1| = 2a - t$ ， $|AB| = a + t$ ，

因为 $|AF_1| = a$ ，所以 $|AB| > |AF_1|$. 若 $|AF_1| = |BF_1|$ ，则 $a = 2a - t$ ，所以 $a = t$ ，

所以 $|AF_1| + |BF_1| = |AB| = 2a$ ，不符合题意，所以 $|BF_1| = |AB|$ ，则 $2a - t = a + t$ ，

所以 $a = 2t$ ，所以 $|BF_1| = |AB| = 3t$ ， $|AF_1| = 2t$ ，设 $\angle BAF_1 = 2\theta$ ，则 $e = \sin \theta$ ，

在 $\triangle ABF_1$ 中，易得 $\cos 2\theta = \frac{1}{3}$ ，所以 $1 - 2\sin^2 \theta = \frac{1}{3}$ ，解得 $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ （负值舍去），

所以椭圆 Γ 的离心率 $e = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 。故选 B。

7、A

【解析】

根据题意可知最后计算的结果为 a, b 的最大公约数。

【详解】

输入的 a, b 分别为 176, 320, 根据流程图可知最后计算的结果为 a, b 的最大公约数，按流程图计算 $320 - 176 = 144$ ， $176 - 144 = 32$ ， $144 - 32 = 112$ ， $112 - 32 = 80$ ， $80 - 32 = 48$ ， $48 - 32 = 16$ ， $32 - 16 = 16$ ，易得 176 和 320 的最大公约数为 16，

故选：A。

【点睛】

本题考查的是利用更相减损术求两个数的最大公约数，难度较易。

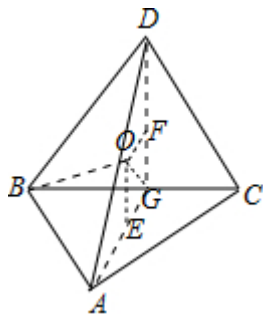
8、A

【解析】

由题意画出图形，求出多面体外接球的半径，代入表面积公式得答案。

【详解】

如图，



取 BC 中点 G，连接 AG，DG，则 $AG \perp BC$ ， $DG \perp BC$ ，

分别取 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DBC$ 的外心 E，F，分别过 E，F 作平面 ABC 与平面 DBC 的垂线，相交于 O，

则 O 为四面体 A-BCD 的球心，

由 $AB = AC = DB = DC = BC = 2$ ，得正方形 OEGF 的边长为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ，则 $OG = \frac{\sqrt{6}}{3}$ ，

\therefore 四面体 A-BCD 的外接球的半径 $R = \sqrt{OG^2 + BG^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{5}{3}}$ ，

∴ 球 O 的表面积为 $4\pi \times (\sqrt{\frac{5}{3}})^2 = \frac{20\pi}{3}$.

故选 A.

【点睛】

本题考查多面体外接球表面积的法，考查空间想象能力与思维能力，是中档题.

9、B

【解析】

$f(x) = \sqrt{2} \sin(2x + \frac{\pi}{4}) + 2, x \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$, $-\frac{\pi}{4} \leq 2x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{4}$ 利用整体换元法求最小值.

【详解】

由已知, $f(x) = 1 + 2 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x = \sin 2x + \cos 2x + 2 = \sqrt{2} \sin(2x + \frac{\pi}{4}) + 2$,

又 $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$, $\therefore -\frac{\pi}{4} \leq 2x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{4}$, 故当 $2x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$, 即 $x = -\frac{\pi}{4}$ 时, $f(x)_{\min} = 1$.

故选: B.

【点睛】

本题考查整体换元法求正弦型函数的最值, 涉及到二倍角公式的应用, 是一道中档题.

10、B

【解析】

甲同学所有的选择方案共有 $C_2^1 C_4^2 = 12$ 种, 甲同学同时选择历史和化学后, 只需在生物、政治、地理三科中再选择一

科即可, 共有 $C_3^1 = 3$ 种选择方案, 根据古典概型的概率计算公式, 可得甲同学同时选择历史和化学的概率

$P = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$, 故选 B.

11、C

【解析】

利用 $a_n = S_n - S_{n-1} (n \geq 2)$ 证得数列 $\left\{ \frac{a_n}{2n-1} \right\}$ 为常数列, 并由此求得 $\{a_n\}$ 的通项公式.

【详解】

由 $a_{n+1} = \frac{4S_n - 1}{2n-1}$, 得 $(2n-1)a_{n+1} = 4S_n - 1$, 可得 $(2n-3)a_n = 4S_{n-1} - 1 (n \geq 2)$.

相减得 $(2n+1)a_n = (2n-1)a_{n+1}$, 则 $\frac{a_n}{2n-1} = \frac{a_{n+1}}{2n+1} (n \geq 2)$, 又

由 $a_{n+1} = \frac{4S_n - 1}{2n - 1}$, $a_1 = 1$, 得 $a_2 = 3$, 所以 $\frac{a_1}{2 \times 1 - 1} = \frac{a_2}{2 \times 1 + 1}$, 所以 $\left\{ \frac{a_n}{2n - 1} \right\}$ 为常

数列, 所以 $\frac{a_n}{2n - 1} = \frac{a_1}{2 \times 1 - 1} = 1$, 故 $a_n = 2n - 1$.

故选: C

【点睛】

本小题考查数列的通项与前 n 项和的关系等基础知识; 考查运算求解能力, 逻辑推理能力, 应用意识.

12、D

【解析】

因为 $A = \{x | x^2 < 1\} = \{x | -1 < x < 1\}$, $B = \{x | \log_2 x < 1\} = \{x | 0 < x < 2\}$, 所以 $A \cap B = \{x | 0 < x < 1\}$,

$A \cup B = \{x | -1 < x < 2\}$, 故选 D.

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13、-40

【解析】

由题意, 设等比数列的公比为 q , 根据已知条件, 列出方程组, 求得 a_1, q 的值, 利用求和公式, 即可求解.

【详解】

由题意, 设等比数列的公比为 q ,

因为 $a_1 - a_2 = 2, a_2 - a_3 = 6$, 即 $\begin{cases} a_1 - a_1q = 2 \\ a_1q - a_1q^2 = 6 \end{cases}$, 解得 $q = 3, a_1 = -1$,

所以 $S_4 = \frac{a_1(1 - q^4)}{1 - q} = \frac{-1(1 - 3^4)}{1 - 3} = -40$.

【点睛】

本题主要考查了等比数列的通项公式, 及前 n 项和公式的应用, 其中解答中根据等比数列的通项公式, 正确求解首项和公比是解答本题的关键, 着重考查了推理与计算能力, 属于基础题.

14、5

【解析】

根据题意, 判断出 $b_2 = -2$, 根据等比数列的性质可得 $b_2^2 = b_1b_3 = (-2)^2 = 4$, 再令数列 $\{a_n\}$ 中的 $a_1 = -2, a_2 = a,$

$a_3 = b$, 根据等差数列的性质, 列出等式 $2a = -2 + b$, 求出 a 和 b 的值即可.

【详解】

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/267111022102010041>